

1 Mengenlehre

1.1 Begriff der Menge

Unter einer Menge versteht man die Zusammenfassung von voneinander **unterscheidbaren** Dingen (Elementen) zu einem Ganzen.

Eine Menge kann in aufzählender Form, mithilfe eines Mengenbildes (Venn-Diagramm) oder in beschreibender Form angegeben werden. Dabei bezeichnen wir Mengen mit grossen Buchstaben, die Elemente von Mengen meist mit kleinen Buchstaben.

Beispiel

Aufzählende Form

$$A = \{a, b, c\}$$

a ist Element von A

(man schreibt: $a \in A$)

b ist Element von A

(man schreibt: $b \in A$)

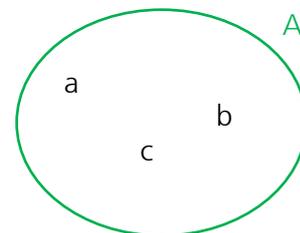
c ist Element von A

(man schreibt: $c \in A$)

d ist **nicht** Element von A

(man schreibt: $d \notin A$)

Mengenbild (Venn-Diagramm)

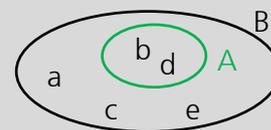


1.2 Beziehungen zwischen Mengen

Teilmenge

A ist eine Teilmenge von B, falls jedes Element von A auch Element von B ist.

man schreibt: $A \subset B$



Beispiel

$$A = \{b, d\}, B = \{a, b, c, d, e\} \text{ somit gilt: } A \subset B$$

Achtung

Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst:

$$A \subset A$$

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge:

$$\{\} \subset A \text{ und } \{\} \subset B$$

leere
Menge

Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

man schreibt: $A = B$

Beispiel

$$A = \{4, 5, 6\}, B = \{4, 5, 6\} \text{ somit gilt: } A = B$$

1.3 Verknüpfungen von Mengen (Mengenoperationen)

Durchschnittsmenge

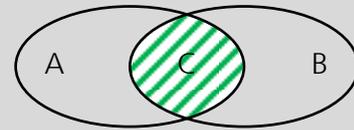
Die Durchschnittsmenge C der beiden Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A **und** zu B gehören.

$$C = A \cap B = \left\{ x \mid x \in A \quad \wedge \quad x \in B \right\}$$

logische 'und'

man liest:

« C gleich A geschnitten mit B ist die Menge aller x für die gilt, x ist Element von A **und** x ist Element von B »



$$C = A \cap B$$

Vereinigungsmenge

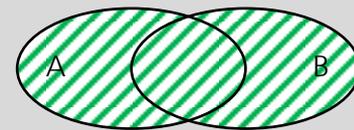
Die Vereinigungsmenge C der beiden Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A **oder** zu B **oder** zu beiden Mengen gehören.

$$C = A \cup B = \left\{ x \mid x \in A \quad \vee \quad x \in B \right\}$$

logische 'oder'

man liest:

« C gleich A vereinigt mit B ist die Menge aller x für die gilt, x ist Element von A **oder** x ist Element von B »



$$C = A \cup B$$

Differenzmenge

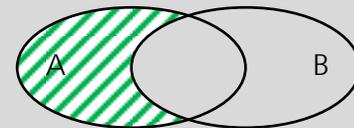
Die Differenzmenge $C = A \setminus B$ ist die Menge aller Elemente von A , die **nicht** zu B gehören.

$$C = A \setminus B = \left\{ x \mid x \in A \quad \wedge \quad x \notin B \right\}$$

logische 'und'

man liest:

« C gleich A **ohne** B ist die Menge aller x für die gilt, x ist Element von A und x ist nicht Element von B »



$$C = A \setminus B$$

¹ Das logische Zeichen \vee (für „oder“) bedeutet „oder“ im nicht ausschliessenden Sinn. Die Aussage „Neriah ruft an oder schreibt einen Brief“ lässt im nicht ausschliessenden Sinn drei Möglichkeiten zu:

1. Neriah ruft an, schreibt aber keinen Brief.
2. Neriah ruft nicht an, schreibt aber einen Brief.
3. Neriah ruft an und schreibt einen Brief.

Rechenregeln (Schaltalgebra)

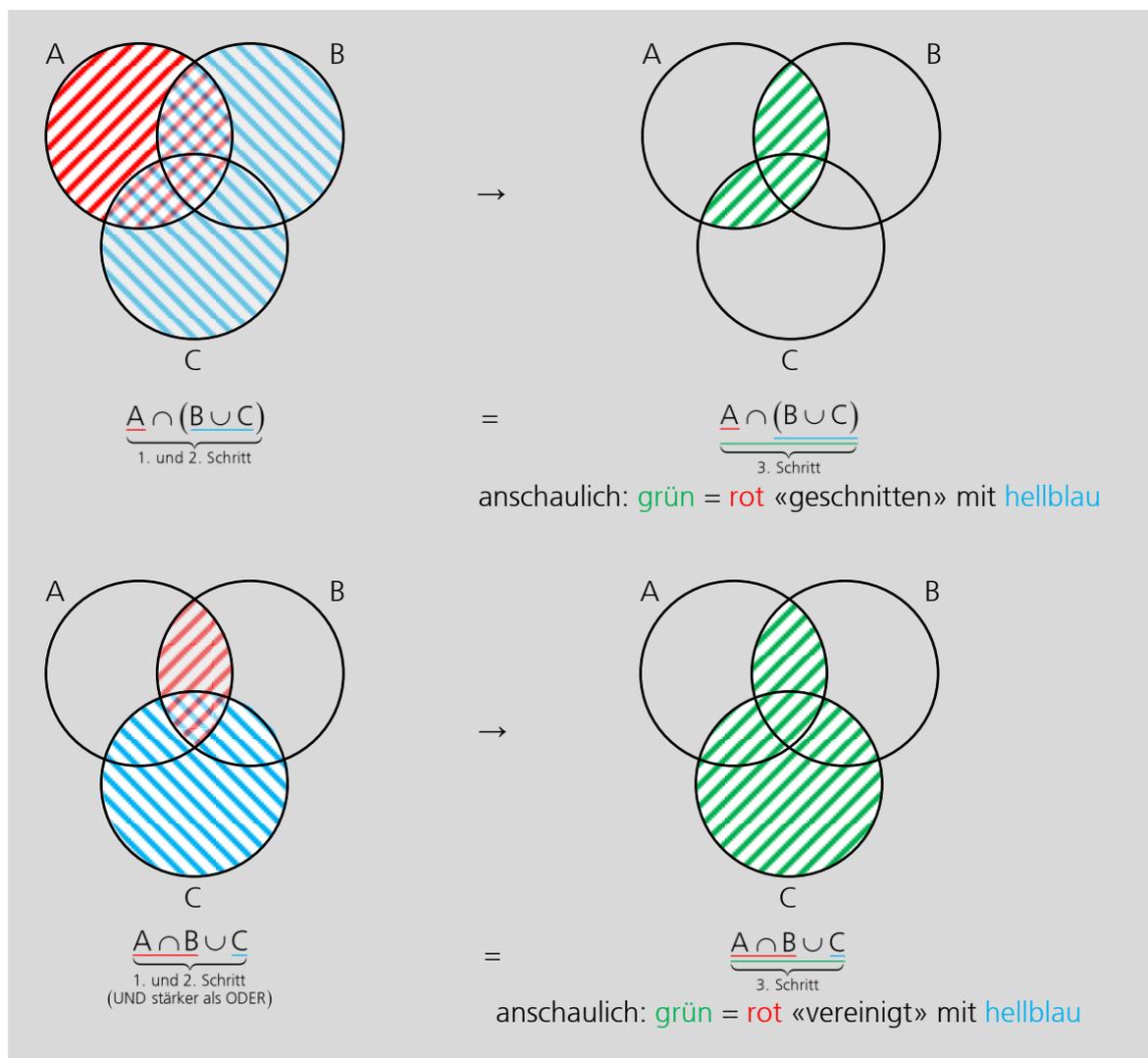
Logische Verknüpfungen lassen sich mit einer besonderen Art von Mathematik darstellen. Man spricht von der Schaltalgebra, die aus der Booleschen Algebra hervorgeht. Aufgrund des binären Zahlensystems kennt die Schaltalgebra nur zwei Konstanten: die 0 und die 1.

Es gelten folgenden Regeln (Vorrangigkeit und Bindungsstärke):

- a. UND bindet stärker als ODER
- b. Klammern binden stärker als UND
- c. Negationszeichen binden stärker als Klammern (siehe Kapitel 1.8)

Auf die Mengenlehre angewandt, bedeutet dies: $A \cap (B \cup C) \neq A \cap B \cup C = (A \cap B) \cup C$

Beweis



Fazit

Das Resultat kann von der Klammersetzung abhängen. Legen Sie deshalb die Reihenfolge der Mengenoperationen **eindeutig** mit Klammern fest!

Merke**Leere Menge**

Die Menge, die **kein Element** besitzt, heisst leere Menge. Man bezeichnet sie mit \emptyset (durchgestrichene Null). Die Schreibweise $\{\}$ ist nach DIN nicht vorgesehen. Wir werden die Schreibweise $\{\}$ trotzdem verwenden. Diese Schreibweise wirkt einem Missverständnis entgegen: Die leere Menge ist nicht *nichts*, sondern *etwas*, das nichts enthält.

Für die leere Menge treffen wir folgende Vereinbarungen:

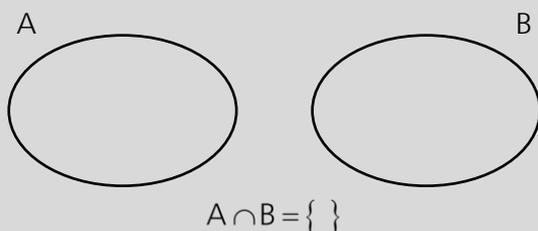
- Die leere Menge gehört zu den endlichen Mengen.
- Die leere Menge ist eine Teilmenge jeder Menge.

Unterscheiden Sie: $\{\}$ → Leere Menge, die kein Element enthält.

$\{0\}$ → Menge mit dem einzigen Element Null.

Elementfremd (disjunkt)

Zwei Mengen A und B heissen **elementfremd (disjunkt)**, falls gilt: $A \cap B = \{\}$.

**Eselsbrücke für \wedge**

Als Eselsbrücke für das logische «UND» können Sie sich für das Symbol \wedge den Anfangsbuchstaben A für das englische «AND» merken.

Verwechslung von \setminus mit $/$

Verwechseln Sie das Symbol für «ohne» nicht mit dem Symbol für die Division:
 \setminus nicht mit $/$ verwechseln!

Unterschied \in und \subset

Bei der Schreibweise \in bzw. \notin steht links immer ein Element, rechts wird die Menge angegeben! Bei der Schreibweise \subset bzw. $\not\subset$ steht links und rechts immer eine Menge:

Beispiele: $5 \in A$ bzw. $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Element
Menge
Menge
Menge

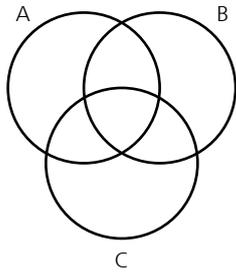
Ausnahme, wenn A eine Menge von Mengen ist: $A = \{\{1\}, \{2\}, \dots\} \rightarrow \{2\} \in A$ ist korrekt!

Arbeitstechnik

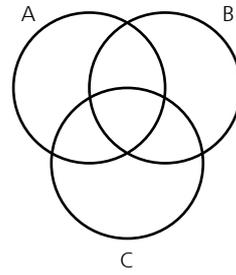
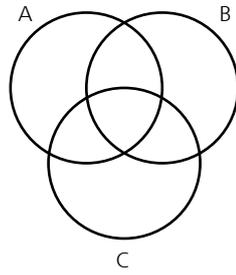
Verwenden Sie Farben wenn Sie Mengen schraffieren müssen. Markieren Sie die einzelnen Arbeitsschritte mit unterschiedlichen Farben. Ein Beispiel sehen Sie auf der Vorderseite.

Die Menge $A \cap (B \cup C)$ wird in drei Arbeitsschritten schraffiert!

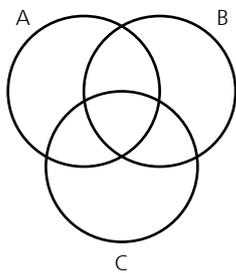
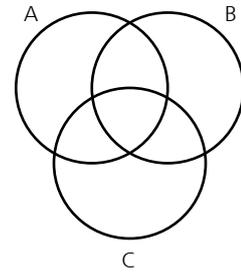
4. Schraffieren Sie die angegebenen Mengen.



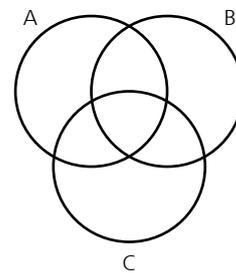
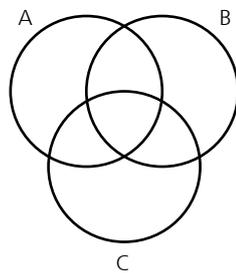
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$



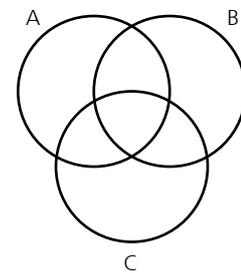
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$



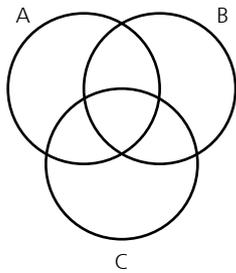
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$



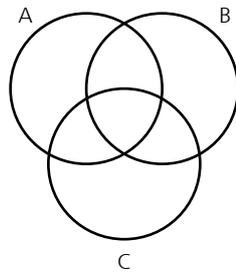
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$



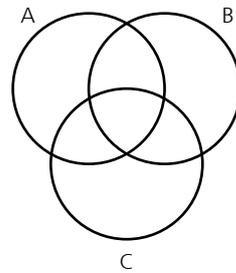
5. Schraffieren Sie die angegebenen Mengen.



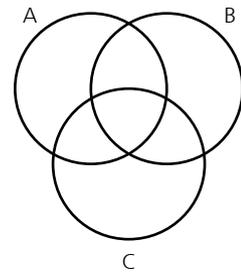
$$(A \setminus B) \cup C$$



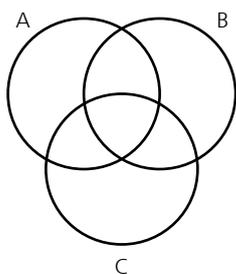
$$(A \setminus B) \cap C$$



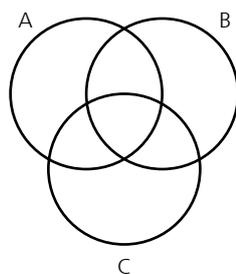
$$A \setminus (B \cup C)$$



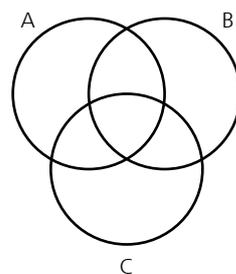
$$A \setminus (B \cap C)$$



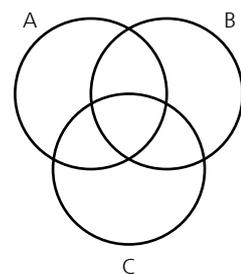
$$A \cup (B \setminus C)$$



$$A \cap (B \setminus C)$$

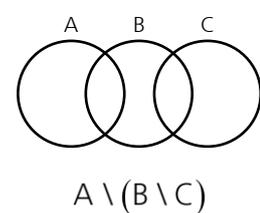
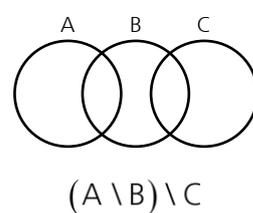
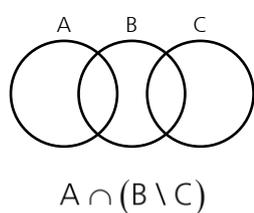
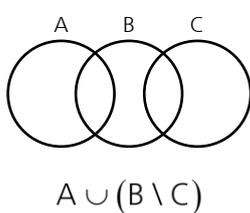
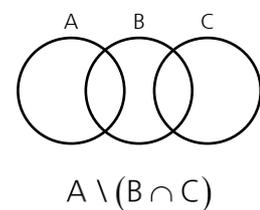
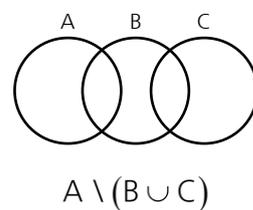
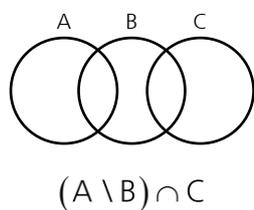
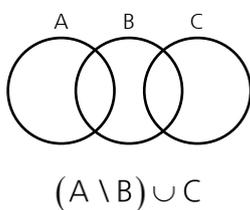
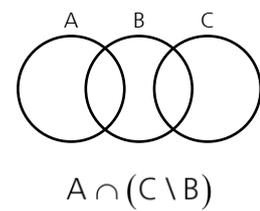
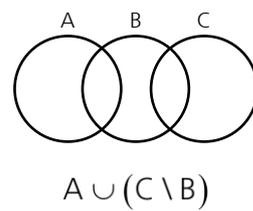
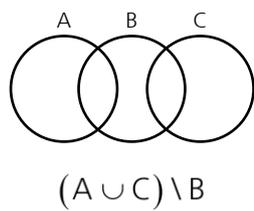
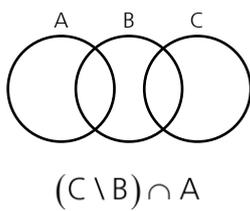
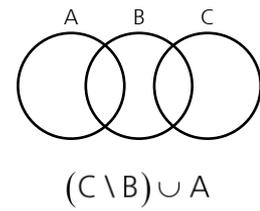
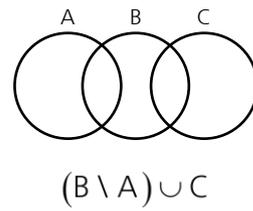
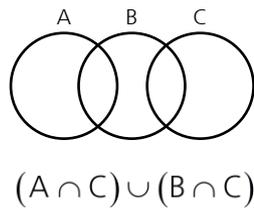
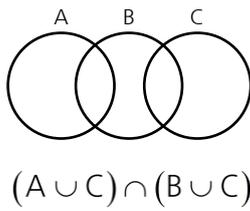
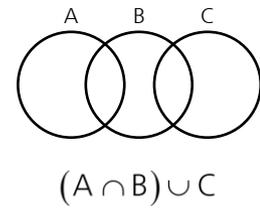
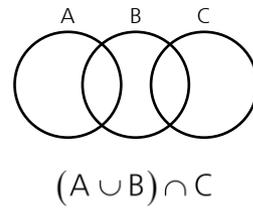
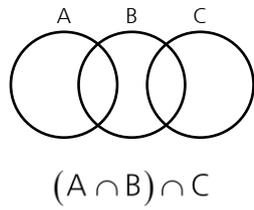
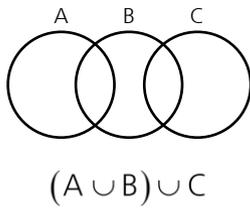


$$(A \setminus B) \setminus C$$



$$A \setminus (B \setminus C)$$

6. Schraffieren Sie die angegebenen Mengen.



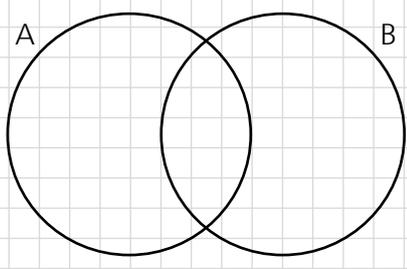
7. Gegeben sind vier Mengen $A = \{a, b, d, f\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$, $C = \{d, e, f\}$, $D = \{i, j, k\}$.

a. Bilden Sie die folgenden Mengen: $A \cup B$, $B \cup A$, $A \cap B$, $B \cap A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$

Sie sollen dabei erkennen: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, jedoch $A \setminus B \neq B \setminus A$

Man sagt: Für den Durchschnitt und für die Vereinigung zweier Mengen gilt das **Kommutativgesetz** (Vertauschungsgesetz).

Tipp: Elemente zuerst in Venn-Diagramm eintragen!



$A \cup B =$

$B \cup A =$

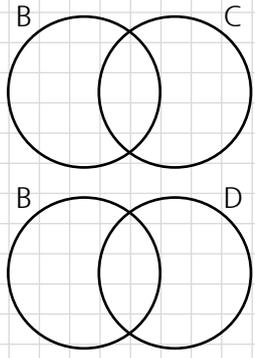
$A \cap B =$

$B \cap A =$

$A \setminus B =$

$B \setminus A =$

b. Bilden Sie die folgenden Mengen: $B \setminus C$, $C \setminus B$, $B \cup C$, $B \cap C$, $B \cup D$, und $B \cap D$



$B \setminus C =$

$C \setminus B =$

$B \cup C =$

$B \cap C =$

$B \cup D =$

$B \cap D =$

c. Berechnen Sie: $A \cup A = ?$, $A \cap A = ?$ und $A \setminus A = ?$

--	--

d. Was ist richtig, was ist falsch? Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

$b \in A$ <input type="checkbox"/> richtig <input type="checkbox"/> falsch	$\{b\} \in A$ <input type="checkbox"/> richtig <input type="checkbox"/> falsch
$A \subset B$ <input type="checkbox"/> richtig <input type="checkbox"/> falsch	$C \subset B$ <input type="checkbox"/> richtig <input type="checkbox"/> falsch
$A \not\subset B$ <input type="checkbox"/> richtig <input type="checkbox"/> falsch	$\{\} \not\subset B$ <input type="checkbox"/> richtig <input type="checkbox"/> falsch
$A \subset A$ <input type="checkbox"/> richtig <input type="checkbox"/> falsch	$B \subset C$ <input type="checkbox"/> richtig <input type="checkbox"/> falsch

e. Berechnen Sie: $A \cup \{\} = ?$, $A \cap \{\} = ?$, $A \setminus \{\} = ?$, $\{\} \setminus A = ?$

--	--

1.5 Übungen (alte BM-Prüfungen)

1. *Luzern 1993*

Der Hersteller von 3 Waschmitteln A, B und C stellt durch Umfrage bei 250 Haushalten fest: 15 Haushalte verwenden alle drei Waschmittel, 35 Haushalte Waschmittel A und B, 20 Haushalte B und C, 25 Haushalte A und C, 40 Haushalte nur B, 10 Haushalte nur C, 95 Haushalte verwenden keines der drei Waschmittel.

- Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm
- Wie viele Haushalte verwenden nur Waschmittel A?
- In welchem Verhältnis sind die drei Waschmittel anzubieten?

Geg:

Ges:

Lösung:

2. *Brig 1998*

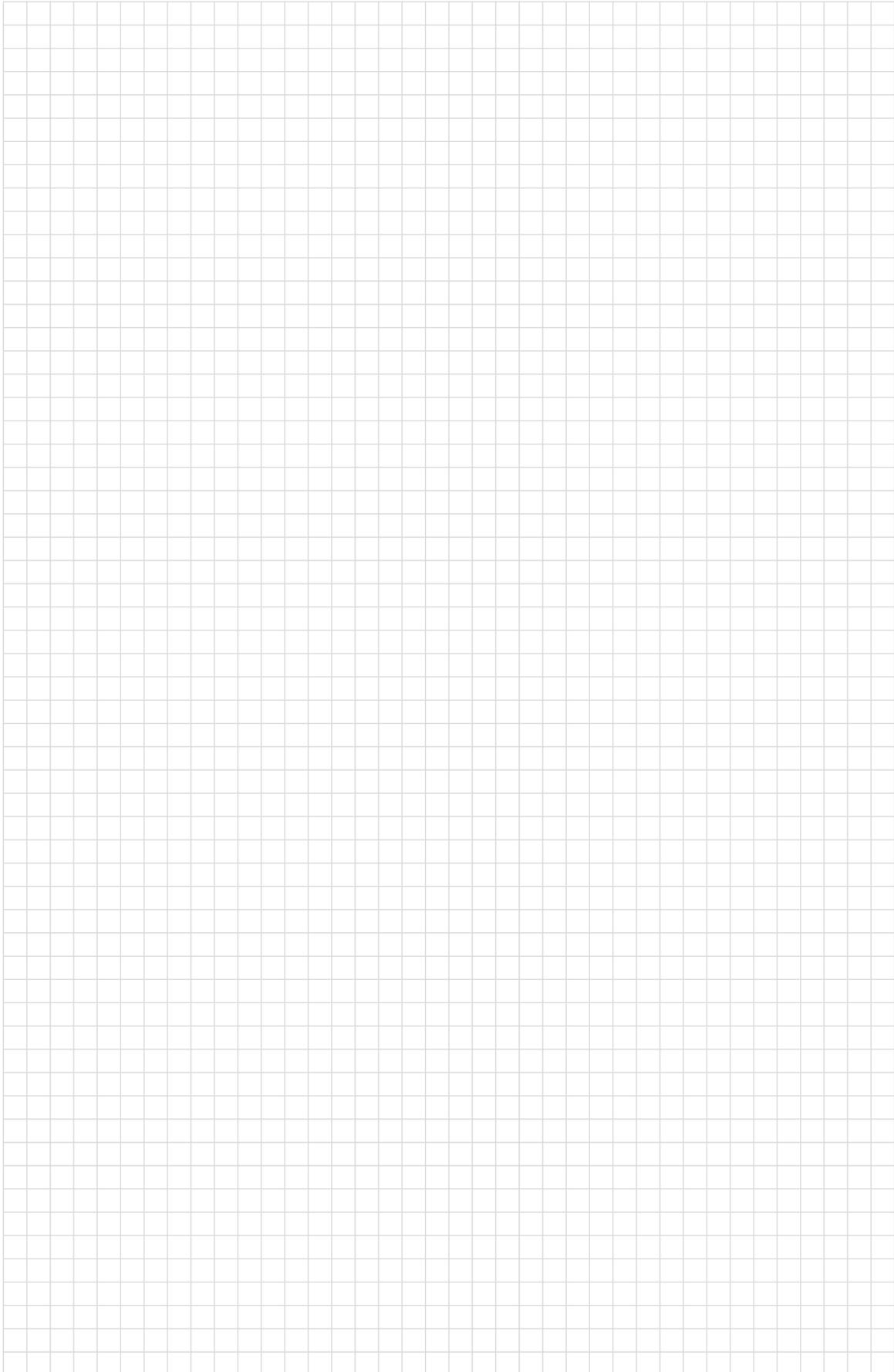
Von den SchülerInnen einer Klasse spielen 6 kein Instrument. 10 SchülerInnen spielen Violine und 7 spielen Klavier. Ferner gibt es 12 FlötenspielerInnen in der Klasse, von denen alle mit Ausnahme von dreien noch mindestens ein weiteres Instrument spielen, nämlich 6 Violine und 5 Klavier. Von den ViolinistInnen spielen 3 kein weiteres Instrument. Wie viele SchülerInnen...

- ...zählt die Klasse?
- ...spielen nur Klavier?
- ...spielen alle drei Instrumente?
- ...spielen Violine und Klavier?

Geg:

Ges:

Lösung:



1.6 Zahlenmengen

Die natürlichen Zahlen \mathbf{N}

Die Menge der natürlichen Zahlen ist die Menge mit den Elementen 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Sie wird wie folgt notiert:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Im Bereich der natürlichen Zahlen kann man unbeschränkt addieren und multiplizieren. Die Subtraktion und die Division führen in der Regel aus dem Bereich der natürlichen Zahlen hinaus.

$$12 - 17 = ?$$

das Ergebnis ist **keine** natürliche Zahl

$$\frac{12}{7} = ?$$

das Ergebnis ist **keine** natürliche Zahl

Die ganzen Zahlen \mathbf{Z}

Die Menge der ganzen Zahlen ist die Menge mit den Elementen ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

Sie wird wie folgt notiert:

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Im Bereich der ganzen Zahlen kann man unbeschränkt addieren, subtrahieren und multiplizieren. Die Division führt in der Regel aus dem Bereich der ganzen Zahlen hinaus.

$$\frac{12}{7} = ?$$

das Ergebnis ist **keine** natürliche Zahl

Die rationalen Zahlen \mathbf{Q} (Bruchzahlen)

Die Division zweier Zahlen ist in \mathbf{Z} nicht immer ausführbar; sie erfordert daher eine Erweiterung des Zahlenraumes. Sie erfolgt durch die Einführung der Bruchzahlen oder kurz Brüche. Die Menge der rationalen Zahlen wird wie folgt notiert:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbf{Z} \quad \wedge \quad b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Im Bereich der rationalen Zahlen kann man unbeschränkt addieren, subtrahieren und multiplizieren und dividieren. Lediglich das Wurzelziehen (und andere «höhere» Rechenoperationen) führt in der Regel aus dem Bereich der rationalen Zahlen hinaus.

$$\sqrt{2} = ?$$

das Ergebnis ist **keine** rationale Zahl

Jede Division führt entweder zu einer **endlichen** (d. h. die Division «geht auf») oder **periodischen** Dezimalzahl. Die Darstellung als Dezimalzahl lässt erkennen, dass diese Schreibweise nur eine Annäherung darstellt.

$$\frac{1}{7} = 0,142857$$

das Ergebnis ist eine **periodische** Dezimalzahl

Jede **endliche** oder **periodische Dezimalzahl** lässt sich als **Bruchzahl** schreiben.

Irrationale Zahlen I

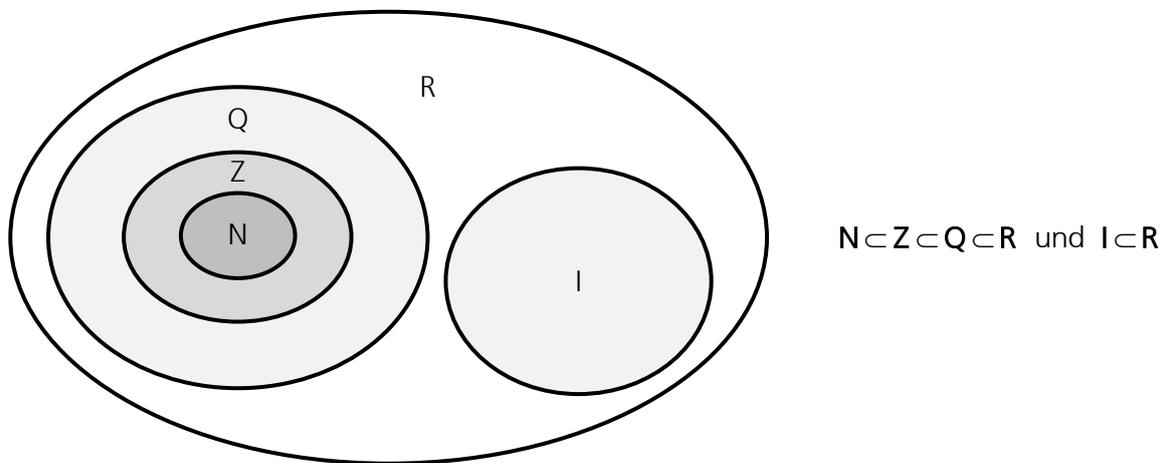
Die Menge der irrationalen Zahlen ist die Menge aller unendlichen, jedoch nicht periodischen Dezimalzahlen.

π , $\sqrt{2}$ oder 0,1101001000100001...

Diese Zahlen lassen sich also **nicht als Bruchzahl** schreiben.

Reelle Zahlen R

Die Menge der reellen Zahlen enthält die rationalen und die irrationalen Zahlen: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.
Wie aus dem Venn-Diagramm ersichtlich ist, sind alle Zahlenmengen letztlich Teilmengen von **R**. Es gilt somit:



1.7 Grundmenge (Bezugsmenge)

Vielfach ist es sinnvoll, eine Grundmenge G anzugeben. Das sind alle jene Dinge, die überhaupt in Betracht gezogen werden. Bei der Lösung von Gleichungen verwendet man **immer** eine Grundmenge G . Wenn man nicht eine spezielle Grundmenge angibt, dann wählt man in der Regel \mathbf{R} als Grundmenge.

$G = \mathbf{N}$ bedeutet: Grundmenge ist die Menge der natürlichen Zahlen

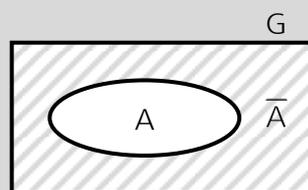
$G = \mathbf{Z}$ bedeutet: Grundmenge ist die Menge der ganzen Zahlen

$G = \mathbf{Q}$ bedeutet: Grundmenge ist die Menge der rationalen Zahlen

1.8 Komplementmenge (Negation)

Die Komplementmenge oder das Komplement einer Menge A ergänzt die Menge A zur Grundmenge.

man schreibt: $A \cup \underbrace{\overline{A}}_{\substack{\text{Negationszeichen} \\ \text{man liest:} \\ \text{nicht A}}} = G \Leftrightarrow \overline{A} = G \setminus A$



Beispiele

$$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \overline{A} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

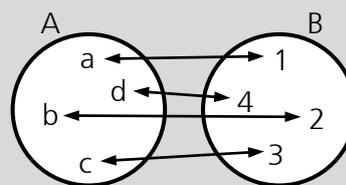
$$G = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 16\}, A = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 10\} \Rightarrow \overline{A} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

$$G = \{a, b, c, \dots, z\}, A = \{a, b, c, \dots, p\} \Rightarrow \overline{A} = \{q, r, s, t, \dots, z\}$$

1.9 Mächtigkeit einer Menge

Zwei Mengen A und B sind gleichmächtig, wenn jedem Element von A eindeutig ein Element von B zugeordnet werden kann und umgekehrt.

man schreibt: $A \sim B$



Die beiden Mengen $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$ sind zwar **nicht gleich** ($A \neq B$), sie sind **jedoch gleichmächtig**.

Bei endlichen Mengen ist die Mächtigkeit einer Menge **gleich der Anzahl ihrer Elemente**.

Besteht die Menge A aus 4 Elementen, so schreibt man kurz $|A| = 4$.

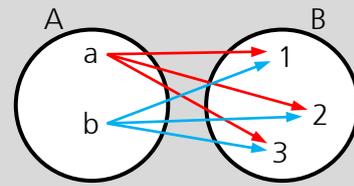
Achtung:

Die senkrechten Striche stehen für die Mächtigkeit und nicht für die Betragsfunktion!

1.10 Produktmenge (Pfeildiagramm) (*)

Unter der Produktmenge aus A und B versteht man die Menge **aller** Paare (x, y) , wobei $x \in A$ und $y \in B$ ist. Zahlenpaare kann man auch in einem Koordinatensystem eintragen.

man schreibt: $A \times B$
Kreuz



Die Mächtigkeit von $A \times B$ ist gleich der Mächtigkeit von A multipliziert mit der Mächtigkeit von B: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Beispiel

$$A = \{a, b\}, B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow C = A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$|C| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 3 = 6$$

Hinweis:

Innerhalb der **runden Klammern** müssen Sie auf die **Reihenfolge achten**: $(a, 1) \neq (1, a)$.
 Innerhalb der geschweiften Klammer kommt es **nicht auf die Reihenfolge** an!

1.11 Potenzmenge (*)

Unter der Potenzmenge versteht man die Menge **aller Teilmengen** einer gegebenen Grundmenge. Man notiert die Potenzmenge von A meist als $P(A)$.

Jede Menge mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen: $|P(A)| = 2^n$

Beispiele

$$A = \{a\} \Rightarrow P(A) = \{\{\}, \{a\}\}$$

$$A = \{a, b\} \Rightarrow P(A) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Hinweis: Typische Anwendung \rightarrow Schaltungssynthese in der Digitaltechnik

Frage: Wie viele verschiedene Kombinationen sind mit zwei Schaltern S_1 und S_2 möglich?

Lösung: $A = \{S_1, S_2\} \Rightarrow P(A) = \{\{\}, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_1, S_2\}\}$

Eingänge		Ausgang
S_1	S_2	Z
aus	aus	?
aus	ein	?
ein	aus	?
ein	ein	?

Durch den Einsatz einer «Wahrheitstabelle» kann verhindert werden, dass gleiche Kombinationen mehrfach vorkommen, beziehungsweise einzelne Kombinationen vergessen werden!

