11 Funktionen 1. Grades (Lineare Funktion)[1]

11.1 Darstellung von Funktionen

In den Naturwissenschaften, in der Technik und in der Wirtschaft spielen Funktionen eine grosse Rolle. Die wichtigsten Darstellungsarten sind nachfolgend anhand der Funktion y = 2x + 3 aufgeführt:

1. Darstellung durch eine Gleichung

$y = 2x + 3$
$f(x) = 2x + 3$

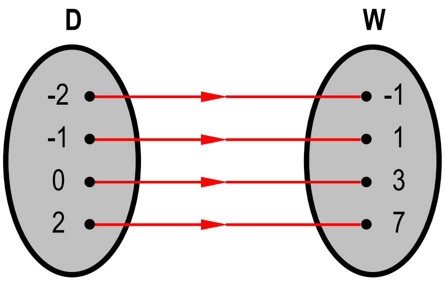
2. Darstellung durch eine Paarmenge

Die Paarmenge kann in beschreibender Form oder durch Angabe der Elemente angegeben werden. Die zweite Form ist nur für eine begrenzte Anzahl von Elementen geeignet.

$f = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = 2x + 3\}$
$f = \{(-2, -1), (-1, 1), (0, 3), (2, 7), \ldots\}$

3. Darstellung durch ein Pfeildiagramm

Bei der Zuordnung durch Pfeile werden die Elemente der Mengen zu einer Menge von „geordneten Paaren" verbunden. Diese Art der Darstellung ist nur für eine geringe Anzahl von Elementen geeignet.



4. Darstellung in Tabellenform

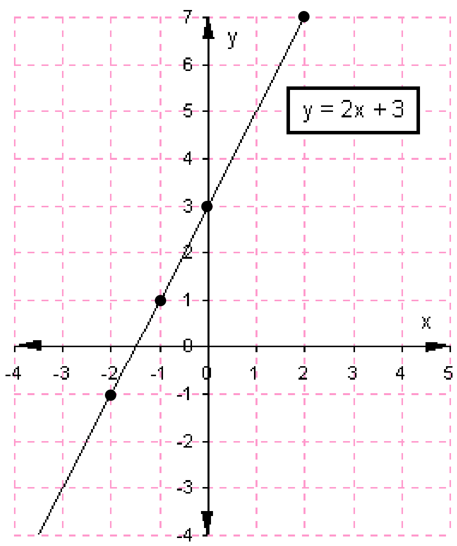
Jedem x-Wert ist ein y-Wert zugeordnet.
Auch diese Art der Darstellung ist nur für eine geringe Anzahl von Elementen geeignet.

x	-2	-1	0	2	Definitionsmenge
y	-1	1	3	7	Wertemenge

5. Darstellung im Koordinatensystem

Die schwarze Gerade ist der Graph der Funktion. Jeder x-Koordinate eines Punktes ist eine y-Koordinate zugeordnet. Diese Darstellungsart eignet sich für unbegrenzt viele Punkte und wird hauptsächlich für Funktionsdarstellungen verwendet. Die schwarze Gerade ist also der Graph der Punktmenge

$f = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = 2x + 3\}$



[1] 1. Grades bezieht sich auf den Exponenten 1, z. B. y = 3 x (der Exponent von x ist 1), linear deshalb, weil der Graph der Funktion eine Gerade ergibt.

11.2 Empirische Funktionen

Die Darstellung einer Funktion mit Hilfe einer Funktionsgleichung wird häufig als *analytische Darstellung* der Funktion bezeichnet. Stammen die Funktionswerte hingegen aus Erfahrungen und Beobachtungen, so spricht man von *empirischen* Funktionen. In der modernen Wissenschaft und Technik sind empirische Funktionen und ihre Interpretation sehr wichtig. Viele Zusammenhänge werden mit Hilfe eines Diagramms dargestellt. Man kann solche Diagramme mit einem Blick übersehen und erhält Aufschluss über die Art der Veränderungen.

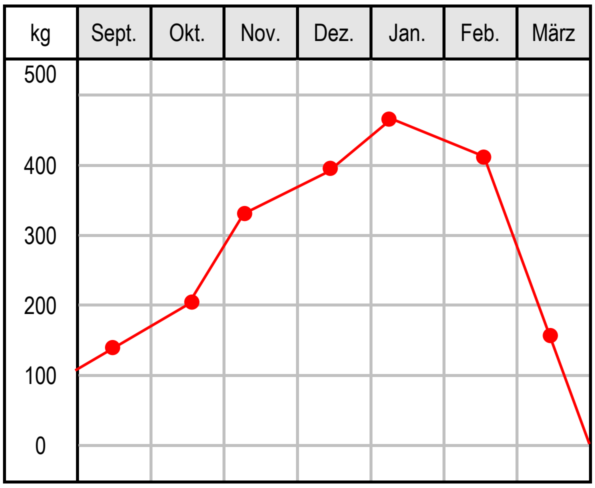
Beispiel 1

Einer bestimmten Körperlänge eines erwachsenen „Normalmenschen" ist ein bestimmtes Gewicht zugeordnet.

Länge cm	Männer kg	Frauen kg
155	55,1	53,8
160	58,2	56,9
165	61,8	59,7
170	65,7	62,2
175	69,2	66,9
180	73,8	69,6

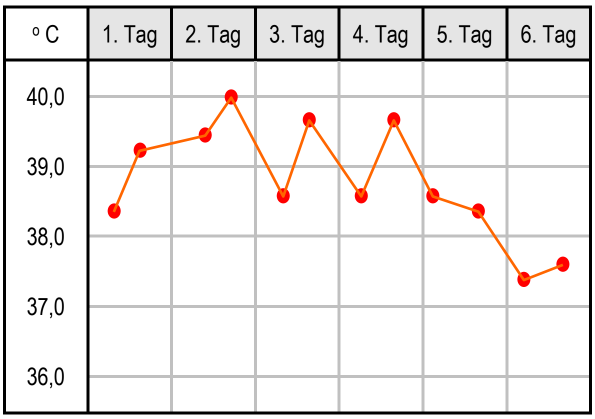
Beispiel 2

Das nebenstehende Diagramm veranschaulicht den Kohlenverbrauch in einem Haushalt. Monat und Verbrauch in kg sind einander zugeordnet. Indem man die einzelnen Messwerte (Punkte) miteinander verbindet, kann man auch wahrscheinliche Zwischenwerte ablesen.



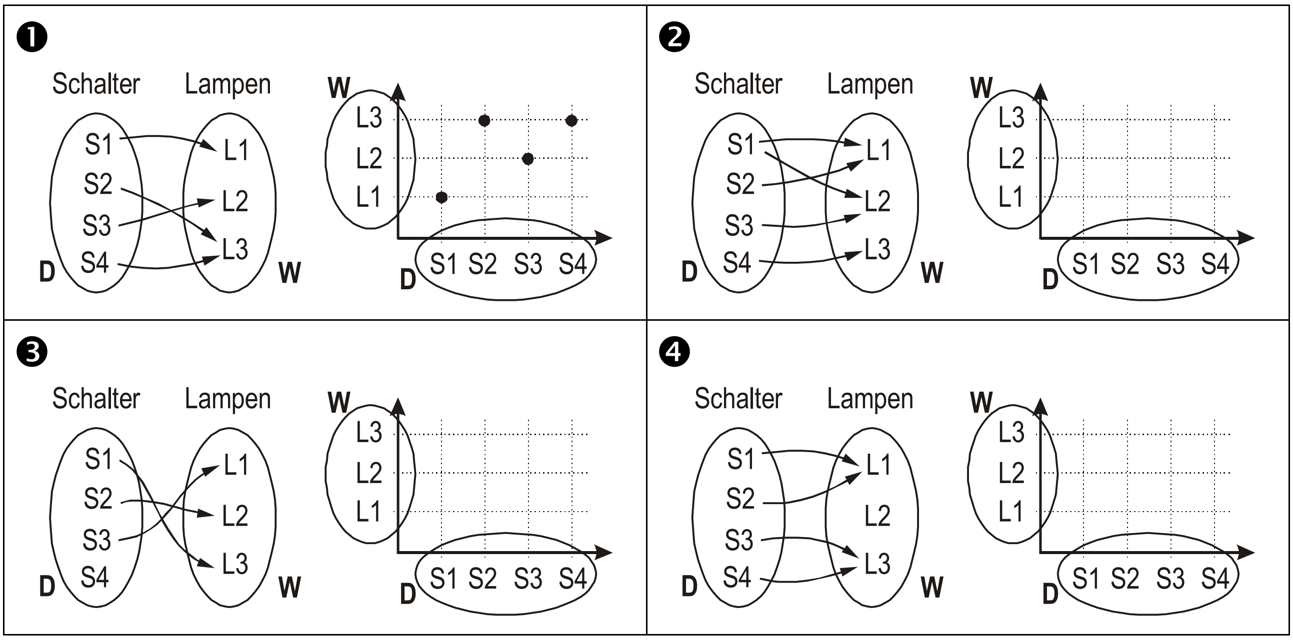
Beispiel 3

Bei der Fieberkurve eines Kranken sind Temperatur und Zeit einander zugeordnet. Die Fieberkurve entsteht, wenn man die Paare (Punkte) miteinander verbindet. Die einander zugeordneten Werte werden auf zwei Achsen abgetragen. Die Massstäbe können beliebig sein. Man nennt eine solche Darstellung auch ein Diagramm.



11.3 Zuordnungen (Relationen)

Im Saal sind drei Lampen (L1, L2 und L3) und vier Schalter (S1, S2, S3 und S4). Die Pfeile zeigen an, welcher Schalter welcher Lampe zugeordnet ist. Anstelle von Pfeilen kann man auch ein Diagramm verwenden. Bei der Situation ❶ ist das Diagramm bereits ausgefüllt. Füllen Sie die restlichen drei Diagramme aus.



In welchen Fällen ist jedem Schalter <u>mindestens eine</u> Lampe zugeordnet? ....

In welchen Fällen ist jedem Schalter <u>höchstens eine</u> Lampe zugeordnet? ....

In welchen Fällen ist jedem Schalter <u>genau eine</u> Lampe zugeordnet? ....

Die Menge der Schalter bezeichnen wir allgemein mit **D** und nennen sie *<u>Definitionsbereich.</u>*
Die Menge der Lampen bezeichnen wir allgemein mit **W** und nennen sie *<u>Wertebereich.</u>*

All dies sind **Zuordnungen.** Von **Funktionen** spricht man nur bei <u>speziellen</u> Zuordnungen.

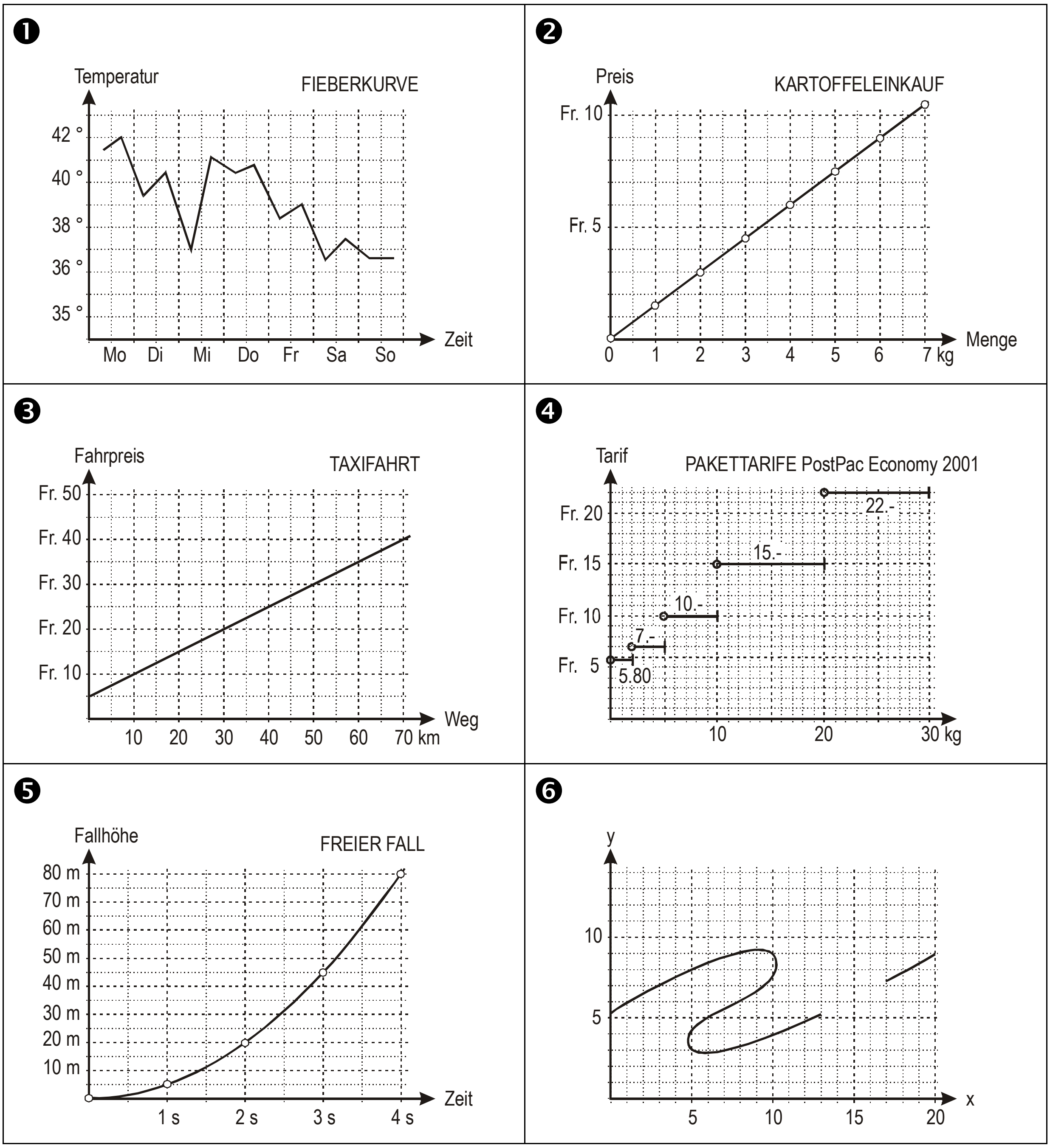
11.4 Der Funktionsbegriff

Von einer **Funktion** spricht man falls **jedem** Element des Definitionsbereichs **D** **genau ein**[1] Element des Wertebereichs **W** zugeordnet ist.

1. Welche der Zuordnungen von den Schaltern zu den Lampen ❶ bis ❹ ist eine Funktion?

[1] „genau ein" heisst: Nicht keines, nicht zwei, nicht drei ... sondern eben nur eines.

2. Bei welcher Zuordnung ❶ bis ❻ handelt es sich um eine Funktion?



Sie sehen: Das Beispiel ❻ ist **keine** Funktion. Den x-Werten zwischen 5 und 10 sind **gleich drei** y-Werte zugeordnet. Den x-Werten zwischen 13 und 17 sind **keine** y-Werte zugeordnet.

Noch eine Bemerkung zu den Pakettarifen. Nebenan die Pakettarife der Schweizerischen Post vom Januar 2001. „Bis 2 kg" verstehe ich so: Ein Paket von genau 2 kg kostet Fr. 5.80. Ein Paket von genau 5 kg kostet Fr. 7.- usw.

Das Zeichen o—| bedeutet: Der linke Endpunkt gehört nicht dazu, der rechte Endpunkt schon.

	PostPac Economy	**PostPac Priority**
bis 2 kg	5.80	7.80
bis 5 kg	7.–	12.–
bis 10 kg	10.–	17.–
bis 20 kg	15.–	15.–
bis 30 kg	22.–	24.–

11.5 Funktion und Umkehrfunktion

Schauen Sie sich nochmals den Kartoffeleinkauf an. Für jede Menge gibt es genau einen Preis. Für 4 Kilogramm Kartoffeln bezahlt man 6 Franken. Umgekehrt gibt es für jeden Preis genau eine Menge. Für 6 Franken gibt es genau 4 Kilogramm Kartoffeln.

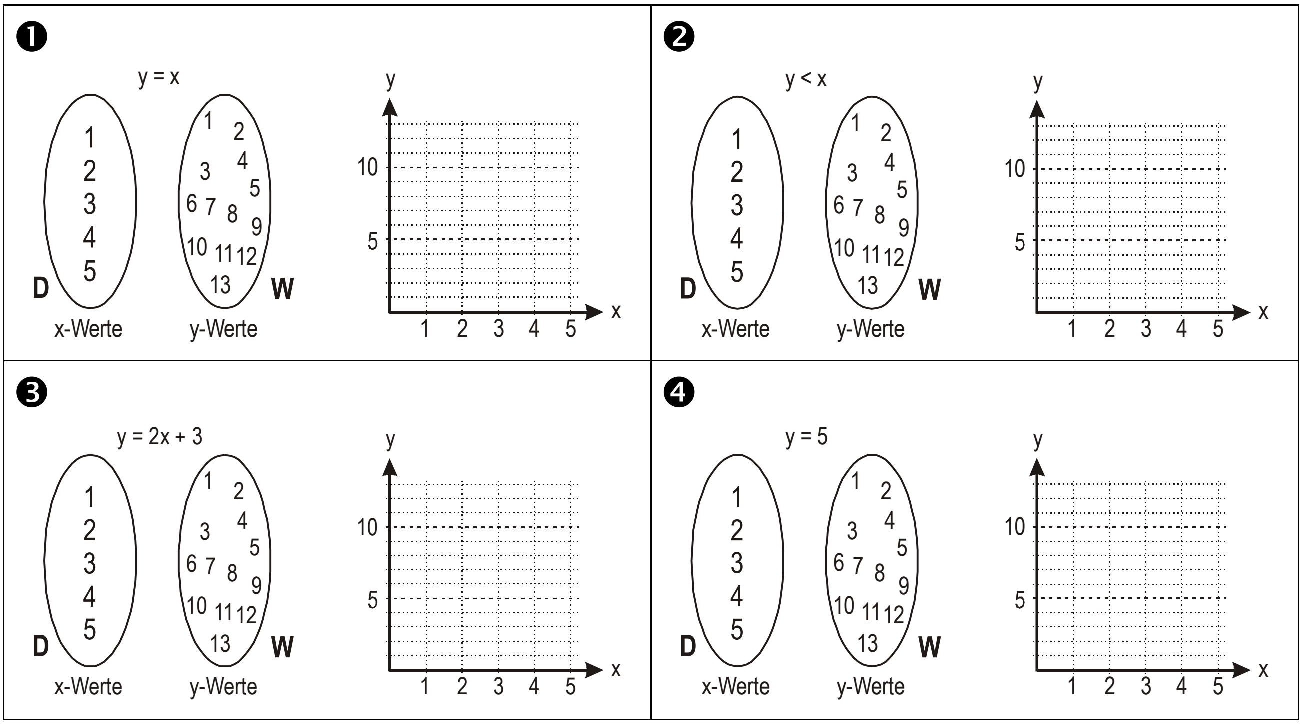
Bei der Fieberkurve ist das nicht so. Zu jedem Zeitpunkt hat der Patient eine bestimmte Temperatur. Umkehren kann man das nicht. Eine Temperatur von 40° hatte der Arme öfters in dieser Woche.

3. Überlegen Sie bitte, für welche der Funktionen ❶ bis ❺ (❻ ist ja keine Funktion) aus Aufgabe 2 ist auch die Umkehrung eine Funktion.
4. Überlegen Sie, welche der folgenden Zuordnungen sind Funktionen und welche nicht. Für welche Zuordnung ist auch die Umkehrung eine Funktion?
   a) Die Zuordnung der Häuser einer Strasse und ihre Hausnummer.
   b) Die Zuordnung der Kinder eines Dorfes zu ihren Schulklassen.
   c) Die Zuordnung der Hunde einer Stadt und der Hundehalter.

11.6 Die Funktionsgleichung

In der Mathematik beschreiben wir Funktionen in der Regel mit Gleichungen. Hier einige Beispiele:

5. Zeichnen Sie die Zuordnungspfeile und das Diagramm. Welche der Situationen ❶ bis ❹ sind Funktionen?

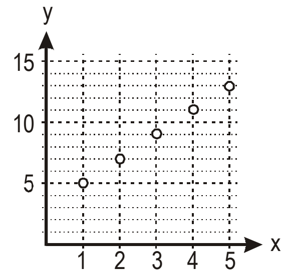


Üblicherweise stellt man Funktion nicht mit Pfeildiagrammen, sondern in einem Koordinatensystem dar. Vor allem wenn es sich um mathematische Funktionen bzw. Funktionen mit einer Funktionsgleichung handelt.
Der Definitionsbereich liegt auf der x-Achse, der Wertebereich auf der y-Achse.

Nochmals die Funktion mit der Funktionsgleichung y = 2x + 3.

Als Definitionsbereich kann ich sagen: **D** = {1, 2, 3, 4, 5}.

Dann erhält man folgende Funktionswerte:



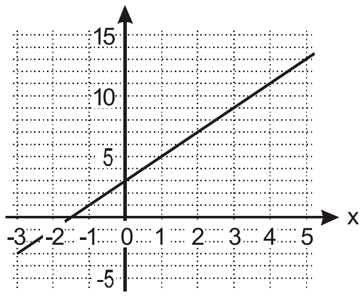
Der Funktionswert von 1 ist 5. Man schreibt auch: f(1) = 5
Der Funktionswert von 2 ist 7. Man schreibt auch: f(2) = 7
Der Funktionswert von 3 ist 9. Man schreibt auch: f(3) = 9
Der Funktionswert von 4 ist 11. Man schreibt auch: f(4) = 11
Der Funktionswert von 5 ist 13. Man schreibt auch: f(5) = 13

Man schreibt auch: $x \rightarrow 2x + 3$ (man spricht: „dem x wird zugeordnet 2x + 3“ **oder** „x Pfeil 2x + 3“)

$1 \rightarrow 5$
$2 \rightarrow 7$
usw.

Man kann für die Funktionsgleichung y = 2x + 3 als Definitionsbereich aber auch <u>alle reellen Zahlen</u> zulassen, von minus Unendlich bis plus Unendlich, also **D** = **R**. Dann gibt es für <u>jede</u> reelle Zahl einen Funktionswert.

Beispiele: f(0) = 3, f(–4) = –5, f(1.5) = 6, f(2.17) = 7.34 usw.

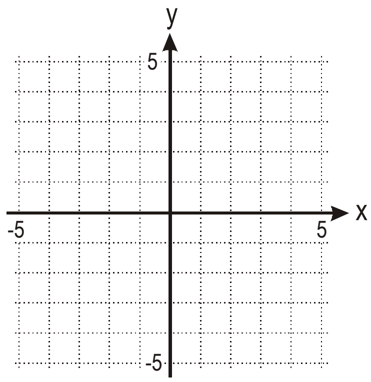


Diese Funktion lässt sich auch umkehren. Beispielsweise könnte man fragen: Für welches x ist der Funktionswert (das y) gleich 12?

Dann setzen wir für y den Wert 12 ein und lösen nach x auf.

$12 = 2x + 3 \rightarrow 2x = 9 \rightarrow \underline{\underline{x = 4.5}}$

6. Zeichnen Sie die Funktion y = f(x) = 0.5x – 1 in das Koordinatensystem.
   Definitionsbereich: **D** = {x / x $\in$ **R** und $-5 \leq x \leq 5$}.



   a) Berechnen Sie:

y = f(4) = 1	Punkt (4/1)
y = f(–4) =	Punkt (
y = f(10) =	Punkt (
y = f(4.5) =	Punkt (
y = f(0) =	Punkt (
y = f(–10) =	Punkt (

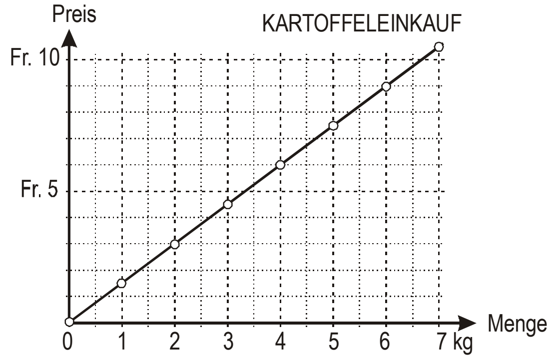
   b) Die Umkehrung:

y = 1	falls	x = 4	Punkt (4/1)
y = 1.5	falls	x = ...	Punkt (
y = –2	falls	x = ...	Punkt (
y = 0	falls	x = ...	Punkt (
y = 10	falls	x = ...	Punkt (
y = –8	falls	x = ...	Punkt (

11.7 Die direkte Proportionalität (elementare mathematische Funktionen)

Sie kaufen Kartoffeln. Wenn Sie zweimal so viele Kartoffeln kaufen, bezahlen Sie auch zweimal so viel. Wenn Sie dreimal so viele Kartoffeln kaufen, bezahlen Sie dreimal so viel. Für die Hälfte an Kartoffeln bezahlen Sie auch nur die Hälfte.

In einem solchen Fall spricht man von **direkter Proportionalität.**



Menge	0 kg	1 kg	2 kg	3 kg	4 kg	5 kg	6 kg	7 kg	8 kg
Preis	0 Fr.	1.50 Fr.	3.-- Fr.	4.50 Fr.	6.-- Fr.	7.50 Fr.	9.-- Fr.	10.50 Fr.	12.-- Fr.

Gesucht ist die Funktionsgleichung für den Kartoffeleinkauf.

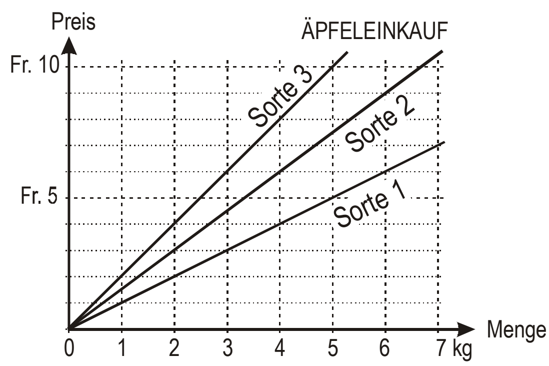
Bezeichnet man die Menge mit x (in kg) und den Preis mit y (in Fr.), so lautet die Funktionsgleichung:

y (Fr.) = 1.5 (Fr./kg) · x (kg).

Den Faktor 1.5 Fr./ kg nennen wir den Kilopreis.

Wenn Sie den Kehrwert von 1.5 Fr./ kg bilden (Taste $\boxed{1/x}$ auf dem Taschenrechner) erhalten Sie 0.67 kg/Fr. (Wenn Sie 1.5 Franken pro Kilogramm bezahlen erhalten Sie 0.67 Kilogramm pro Franken.)

7. In der Abbildung sind drei Sorten Äpfel dargestellt. Welche Sorte ist die teuerste, welche die billigste? Was kosten 5.5 kg von jeder der drei Sorten? Wie viele Kilogramm würde man jeweils für Fr. 12.– bekommen?

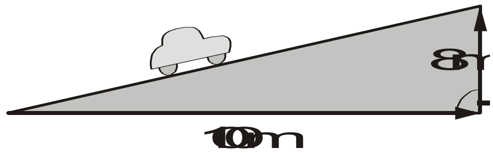


Über die **„Steigung“** einer Autostrasse

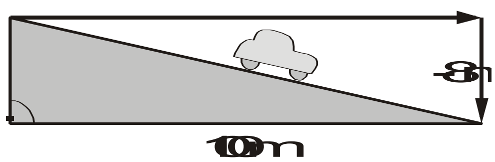
Eine Strasse hat eine Steigung von 8 % (= 0.08) bedeutet: Auf 100 m Basislänge **steigt** die Strasse 8 m an. Oder auf 100 cm Basislänge steigt die Strasse 8 cm an.

Man kann das auch als *Proportion* schreiben:

8 m : 100 m = 8 cm : 100 cm = 0.08



Wenn das Auto bergab fährt, müsste man eigentlich von einer **negativen Steigung** sprechen: Auf 100 m Basislänge **verliert** man 8 m an Höhe, die Steigung wäre dann –8 % (oder –0.08).

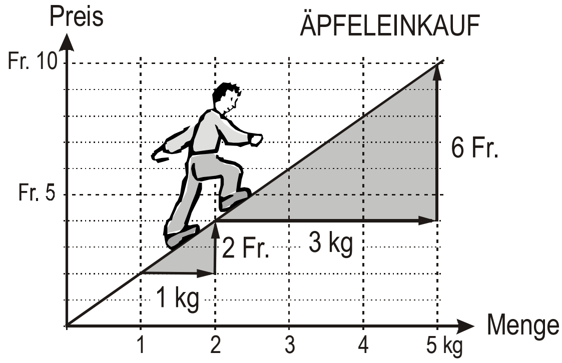


Sie haben in Aufgabe 7) gesehen dass die Äpfel umso teurer sind, je steiler die Gerade verläuft. Auch hier kann man eine „Steigung" berechnen.

Steigung = $\frac{2\,\text{Fr.}}{1\,\text{kg}} = \frac{6\,\text{Fr.}}{3\,\text{kg}} = 2$ Fr./kg = *Kilopreis*

Die Funktionsgleichung lautet:

Preis (in Fr.) = 2 Fr./kg · Menge (in kg)



8. Berechnen Sie die „Steigungen" für den Spaziergänger, den Velofahrer und den Motorradfahrer.

„Steigung" Spaziergänger: *1 m/s*

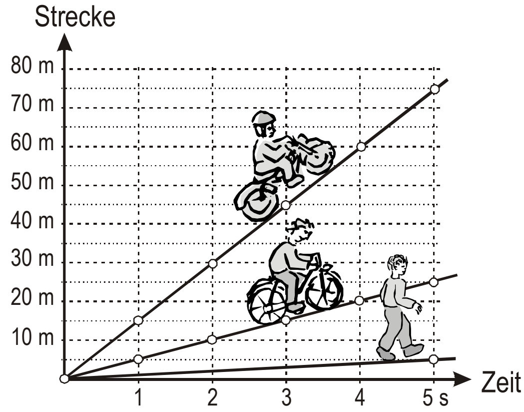
Funktionsgleichung: *Strecke (in m) = 1 m/s · Zeit (in s)*

„Steigung" Velofahrer: ....

Funktionsgleichung: ....

„Steigung" Motorradfahrer: ....

Funktionsgleichung: ....



Sie sehen: In diesem Beispiel hat die Steigung der Geraden eine spezielle Bedeutung: Es ist die *Geschwindigkeit*.

9. Die Abbildung zeigt den Zusammenhang zwischen Masse und Volumen für Kork, Wasser, Aluminium, Eisen und Gold.

"Steigung" Kork: 0.3 g/cm³

Funktionsgleichung:
Masse (g) = 0.3 g/cm³ · Volumen (cm³)

"Steigung" Wasser: ....

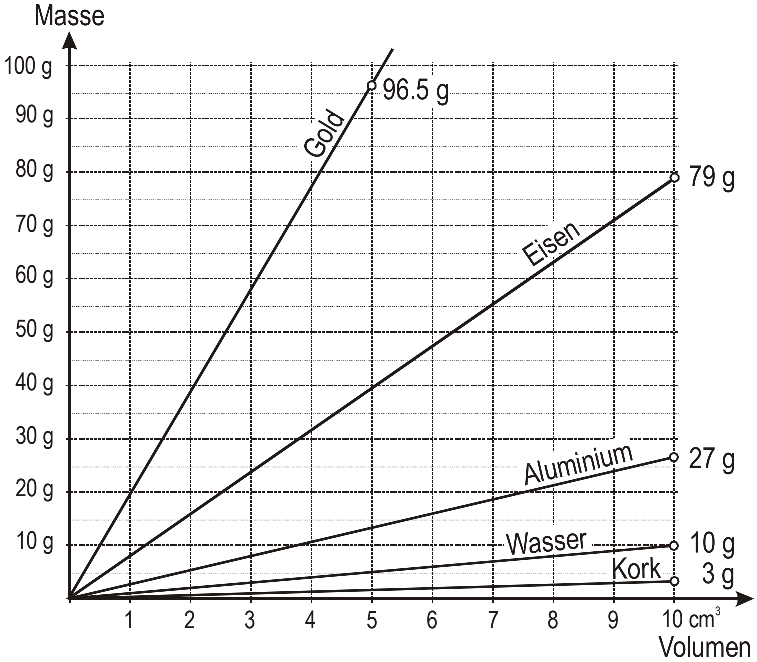
Funktionsgleichung:

....

"Steigung" Aluminium: ....

"Steigung" Eisen: ....

"Steigung" Gold: ....



Auch in diesem Beispiel hat die Steigung der Geraden eine spezielle Bedeutung: Es ist die *Dichte*.

10. Ergänzen Sie die fehlenden Werte:

	Kork	Wasser	Aluminium	Eisen	Gold
1 cm^3	.... g	.... g	.... g	.... g	.... g
1 dm^3	.... kg	.... kg	.... kg	.... kg	.... kg
1 m^3	.... kg	.... kg	.... kg	.... kg	.... kg

11. Ergänzen Sie die fehlenden Werte:

	Kork	Wasser	Aluminium	Eisen	Gold
1 g	.... cm^3	.... cm^3	.... cm^3	.... cm^3	.... cm^3
1 kg	.... dm^3	.... dm^3	.... dm^3	.... dm^3	.... dm^3
1000 kg	.... m^3	.... m^3	.... m^3	.... m^3	.... m^3

12. Welche Masse hat ein Aluminiumwürfel von 5 cm Kantenlänge?

13. Welches Volumen hat ein Aluminiumwürfel mit einer Masse von 200 g?

14. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen für die abgebildeten Geraden. Punkte mit ganzzahligen Koordinaten sind durch kleine Kreise gekennzeichnet.

Gerade 1: $y = \frac{1}{3}x$

Gerade 2:

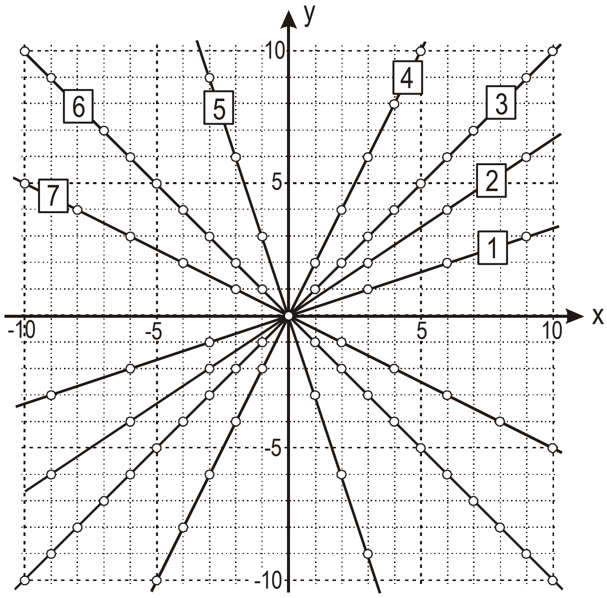
Gerade 3:

Gerade 4:

Gerade 5:

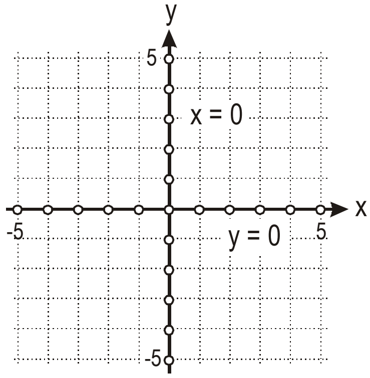
Gerade 6:

Gerade 7:



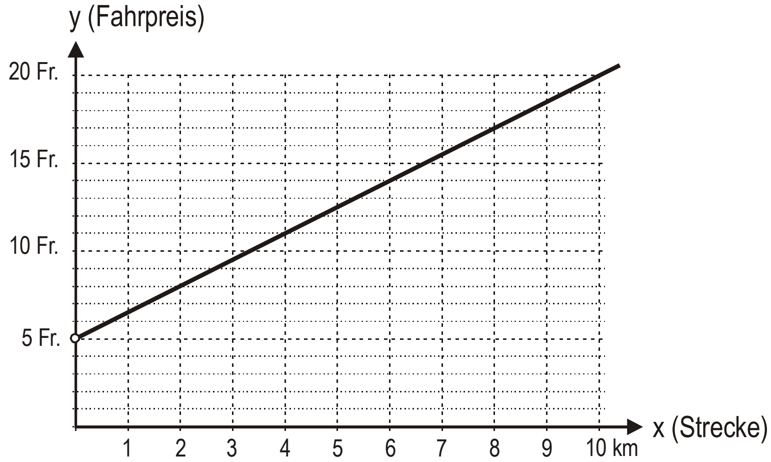
Die Gleichung der x-Achse: Punkte auf der x-Achse sind z. B. (0/0), (1/0), (–1/0), (2/0), (–2/0) usw. Jeder Punkt auf der x-Achse hat als y den Wert Null. Die Gleichung der **x-Achse** lautet also **y = 0** (und das x ist beliebig).
Es handelt sich um eine Funktion.

Die Gleichung der y-Achse: Punkte auf der y-Achse sind z. B. (0/0), (0/1), (0/–1), (0/2), (0/–2) usw. Jeder Punkt auf der y-Achse hat als x den Wert Null. Die Gleichung der **y-Achse** lautet also **x = 0** (und das y ist beliebig).
Warum handelt es sich hier nicht um eine Funktion?



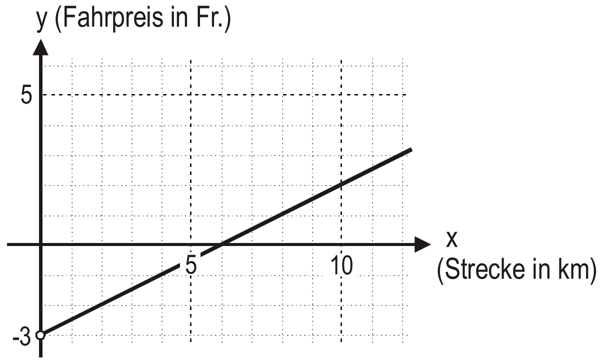
Die Taxigleichung

15. Eine Taxiunternehmung berechnet für jede Fahrt eine Grundtaxe von Fr. 5.-- und je Kilometer gefahrene Strecke Fr. 1.50.
    a) Wie gross ist die Steigung dieser Geraden?
    b) Suchen Sie den Zusammenhang zwischen der gefahrenen Strecke x und dem Fahrpreis y.
    c) Lösen Sie die in b) gefundene Gleichung auf nach x.
    d) Was kostet eine Fahrt über 4 km (14 km)?
    e) Wie weit kommt man mit einem Betrag von Fr. 15.50 (Fr. 35.–)?



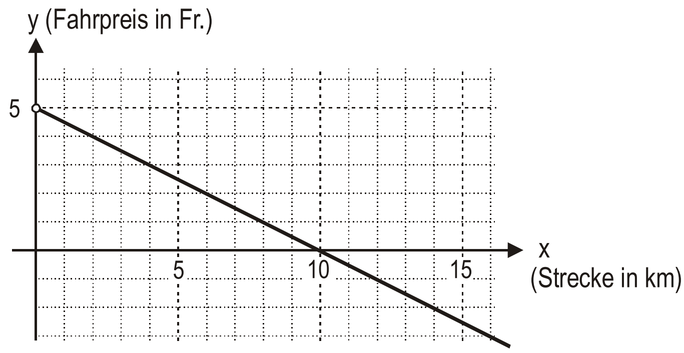
16. Was ist das für ein kurioses Taxi. Wie lautet die Taxigleichung? Wie weit kann man gratis damit fahren?

    Die Gleichung lautet: y = ...



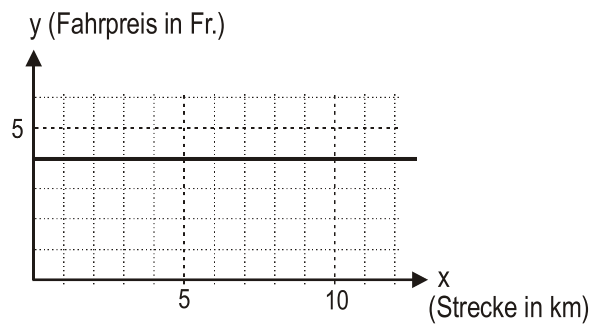
17. Was ist das für ein kurioses Taxi. Wie lautet die Taxigleichung? Wie viele Kilometer müssten Sie fahren, um gar nichts bezahlen zu müssen – im Gegenteil!

    Die Gleichung lautet: y = ...



18. Was ist das für ein kurioses Taxi. Wie lautet die Taxigleichung?

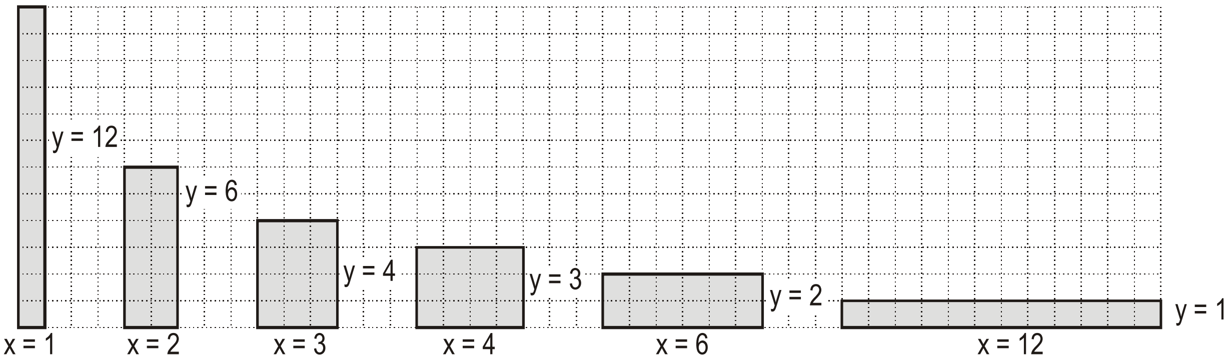
    Die Gleichung lautet: y = ...



11.8 Die indirekte Proportionalität

Ein Rechteck mit 12 cm² Flächeninhalt kann verschiedene Abmessungen haben:
1 cm x 12 cm = 12 cm², 2 cm x 6 cm = 12 cm², 3 cm x 4 cm = 12 cm², 4 cm x 3 cm = 12 cm² usw.

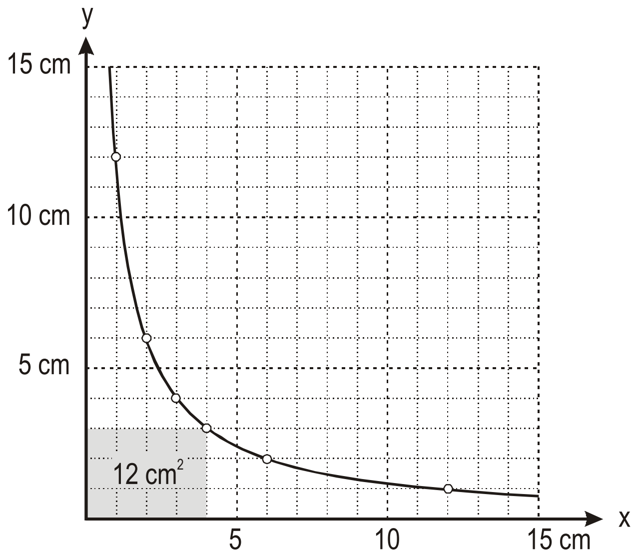
Bezeichnet man mit x die Länge und mit y die Breite des Rechtecks (in cm), so muss gelten: <u>**$x \cdot y = 12\ cm^2$.**</u>



Löst man nach y auf, so erhält man die Funktionsgleichung: $y\ (\text{in cm}) = \dfrac{12\ cm^2}{x\ (\text{in cm})}$

Umgekehrt muss auch gelten: $x\ (\text{in cm}) = \dfrac{12\ cm^2}{y\ (\text{in cm})}$

Das ganze in ein Koordinatensystem gezeichnet:



Direkte Proportionalität (denken Sie an den Kartoffeleinkauf)**:** Doppeltes x bedeutet doppeltes y, dreifaches x bedeutet dreifaches y usw.

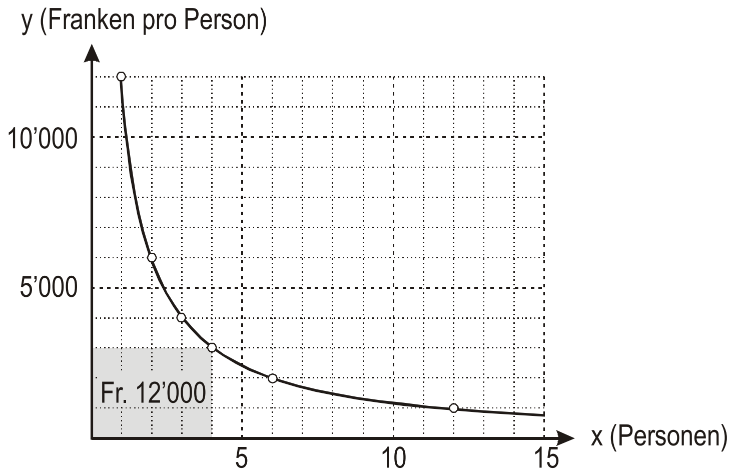
Indirekte Proportionalität: Doppeltes x bedeutet halbes y, dreifaches x bedeutet dreimal weniger y usw.

· 2 · 3

Länge	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	6 cm	12 cm
Breite	12 cm	6 cm	4 cm	3 cm	2 cm	1 cm

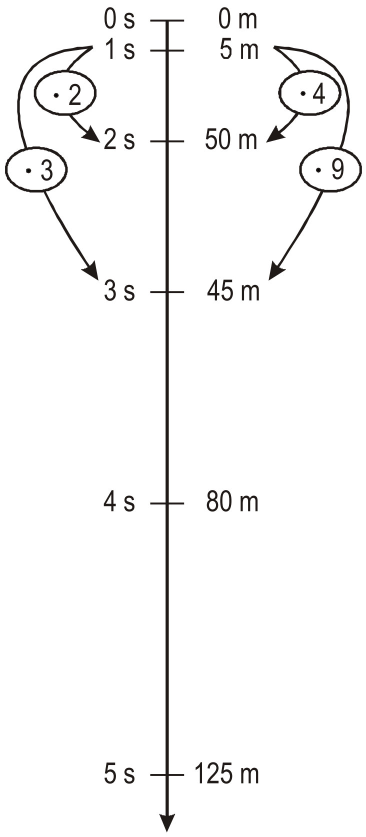
: 2 : 3

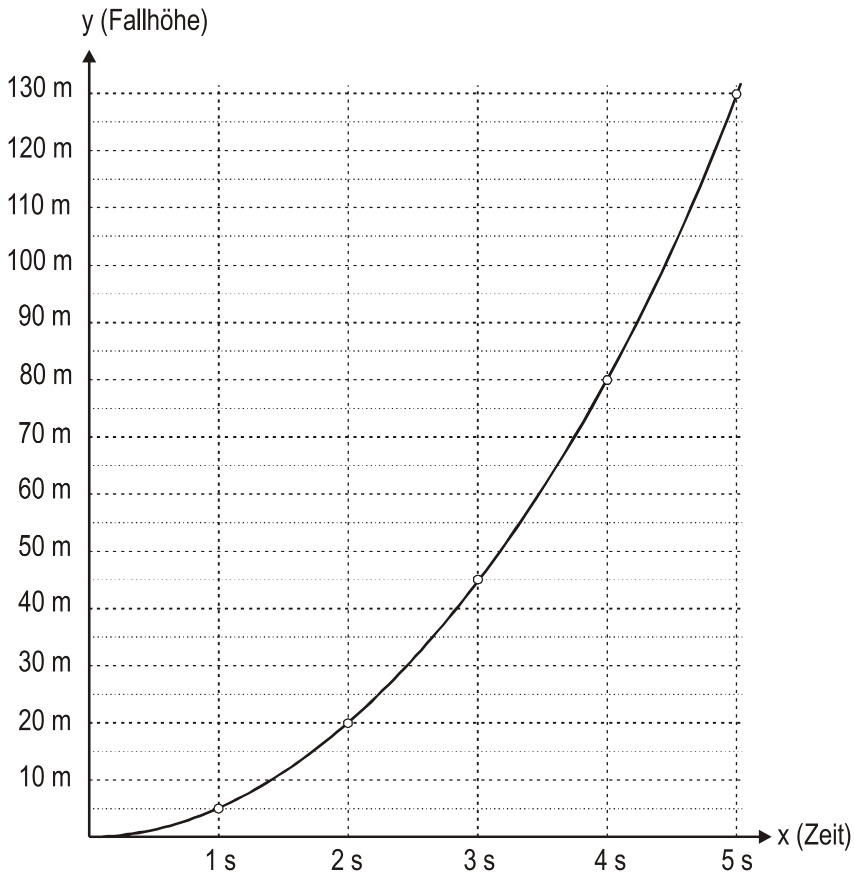
19. Fr. 12'000.– sind zu verteilen an 1, 2, 3, ... Personen. Wie viel erhält jede Person?
    a) Stellen Sie y als Funktion von x dar:
    b) Wenn die Fr. 12'000. – an 8 Personen zu verteilen sind, wie viel erhält jede Person?
    c) x · y = ...



11.9 Proportionalität «mit dem Quadrat»

Die Geschwindigkeit eines frei fallenden Steines nimmt von Sekunde zu Sekunde zu. Dadurch nimmt die Fallhöhe nicht *proportional* zur Zeit, sondern *„überproportional"* zur Zeit zu. Die Tabelle zeigt wie tief ein Stein in einer Sekunde, in zwei Sekunden, in drei Sekunden usw. fällt. In der doppelten Zeit fällt man viermal so tief, in der dreifachen Zeit neunmal so tief, in der vierfachen Zeit 16-mal so tief usw.



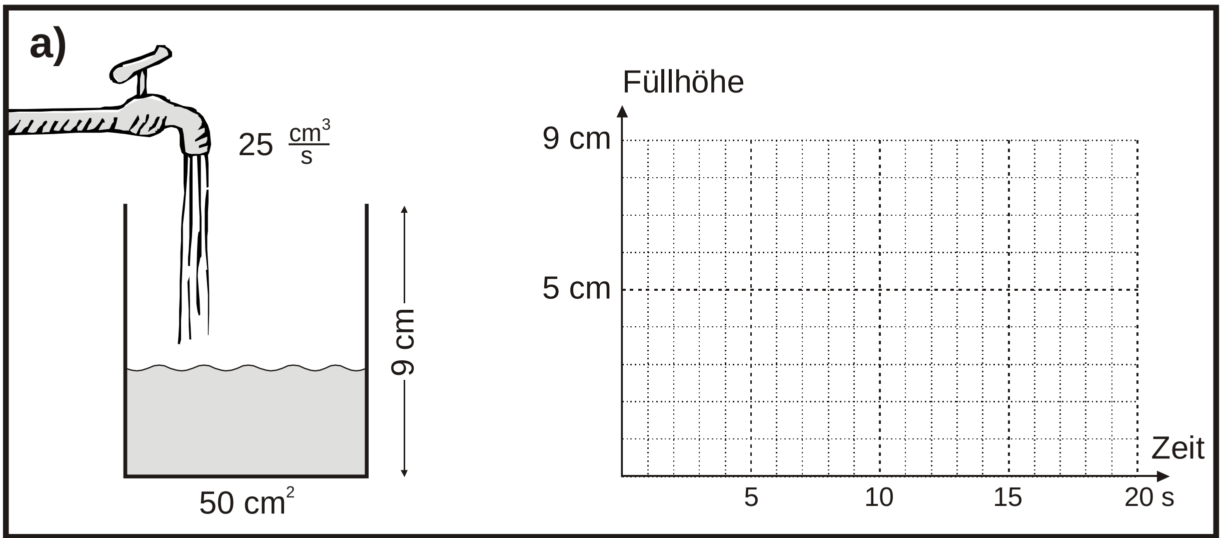


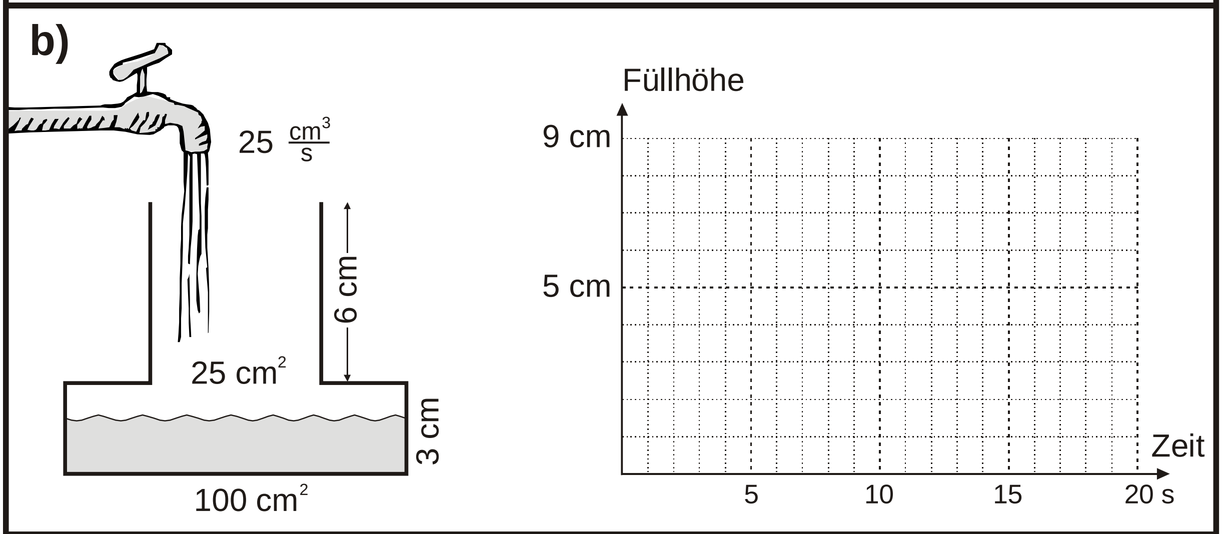
Die Gleichung lautet: $y = 5 \cdot x^2$

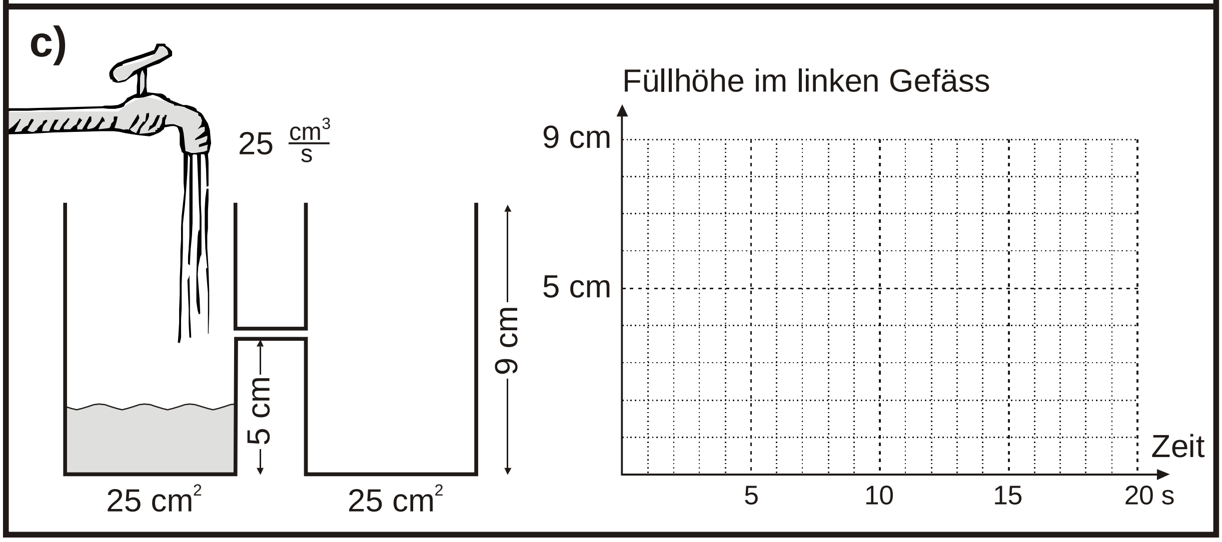
Dabei wird x in Sekunden angegeben, die Zahl 5 hat die Benennung m/s^2 und y ist die Fallhöhe in Metern. Sie werden im Physikunterricht sicher noch genauer darauf zu sprechen kommen.

11.10 Verschiedenes

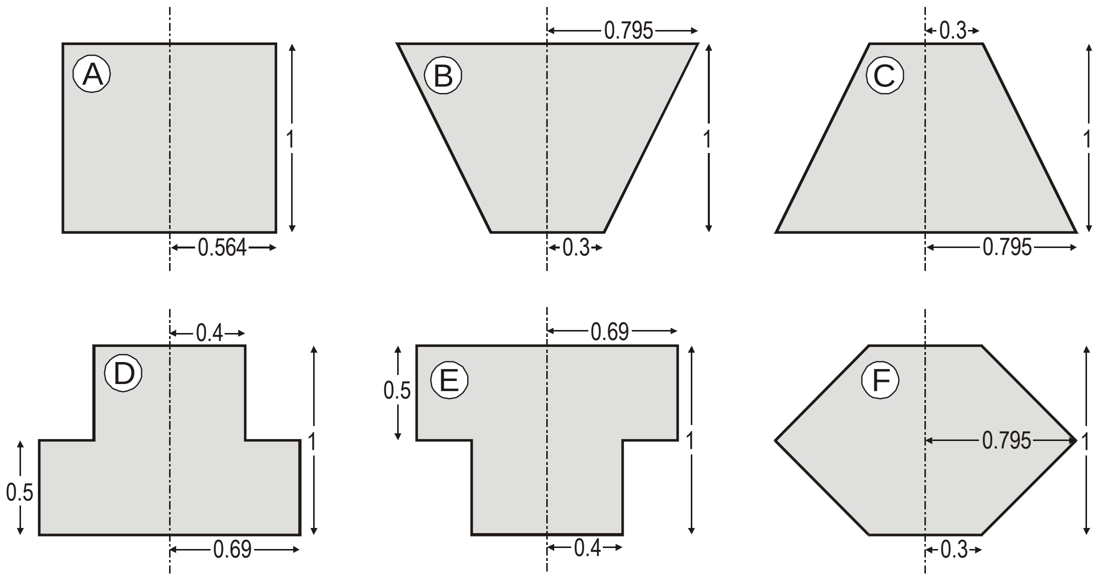
20. In den drei Situationen a), b) und c) werden drei verschiedene Gefässe gefüllt, jedes Mal aus dem gleichen Wasserhahn und immer mit 25 cm³ Wasser pro Sekunde. Im Diagramm sollen Sie darstellen auf welche Weise die Höhe des Wasserstandes mit der Zeit zunimmt. Gesucht ist also die Höhe des Wasserstandes als Funktion der Zeit.

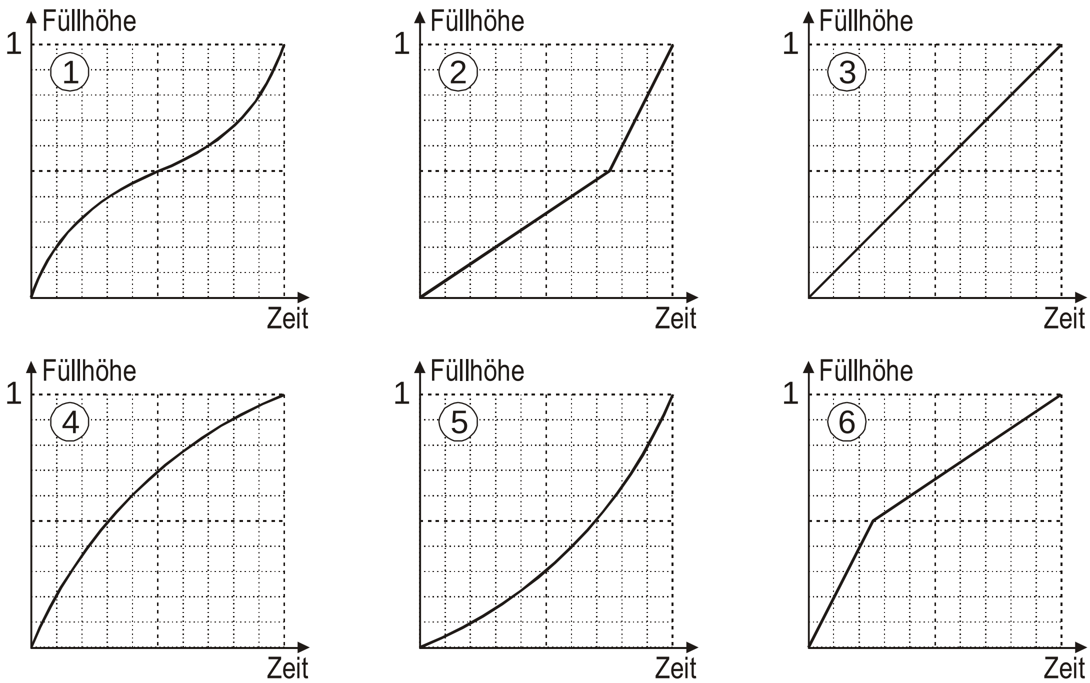






21. Sie haben hier sechs verschiedene Gefässe A bis F vorgegeben. Sie haben alle gleiches Volumen und gleiche Höhe. Hält man sie jeweils unter den selben Wasserhahn, müssen sie alle in der gleichen Zeit gefüllt werden. Nur der zeitliche Verlauf der Füllung ist unterschiedlich.
Ordnen Sie den Gefässen A bis F die passenden Verlaufskurven 1 bis 6 zu.





zu Gefäss A gehört Diagramm ....

zu Gefäss B gehört Diagramm ....

zu Gefäss C gehört Diagramm ....

zu Gefäss D gehört Diagramm ....

zu Gefäss E gehört Diagramm ....

zu Gefäss F gehört Diagramm ....

Der Lichtschutzfaktor (LSF)

In meinem Giftschrank haben sich im Laufe der Jahre Sonnenschutzmittel angesammelt. Ich finde, der Grösse nach geordnet, solche mit Lichtschutzfaktor 12, 15, 25 und 30. Was bedeuten diese Zahlen?

LSF-12 bedeutet: Ich kann 12-mal länger in der Sonne liegen bis zum Sonnenbrand als ohne Sonnenschutz.
LSF-30 bedeutet: Ich kann 30-mal länger in der Sonne liegen bis zum Sonnenbrand als ohne Sonnenschutz.

Konkret: Wenn ich mir ohne Sonnenschutz nach einer Stunde den Sonnenbrand hole, dann muss ich mit LSF-12 genau 12 Stunden darauf warten. Mit LSF-30 gar 30 Stunden. Aber wo scheint die Sonne so lange?

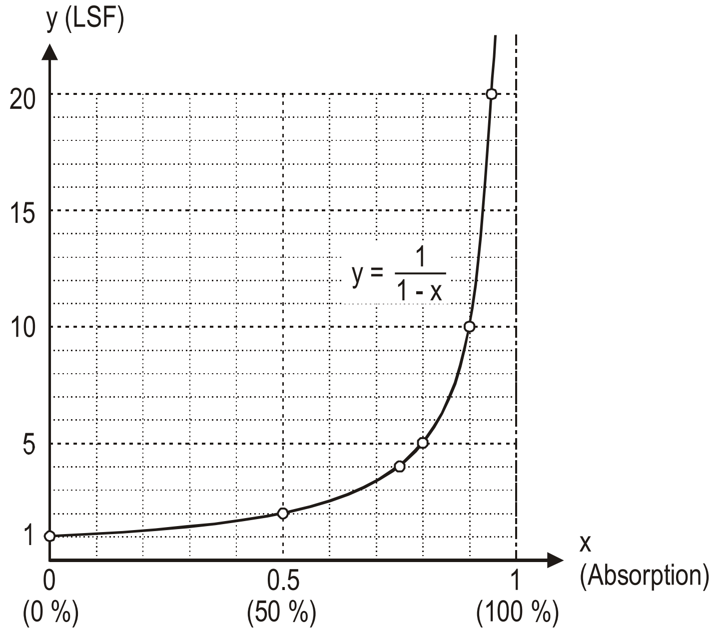
Die Sonnencreme absorbiert die gefährliche UV-Strahlung des Sonnenlichts. Absorbiert die Sonnencreme 50 % (0.50) des UV-Lichtes, so bin ich nur halb so stark mit UV-Licht belastet und ich kann doppelt so lange in der Sonne liegen, der LSF beträgt 2. Absorbiert die Creme 75 % des UV-Lichtes, so beträgt die Belastung durch UV-Licht 25 % und ich kann vier mal so lang in der Sonne schmoren, der LSF beträgt 4. Absorbiert die Creme 80 % des UV-Lichtes, so beträgt die Belastung durch UV-Licht 20 % und ich kann fünf mal so lang in der Sonne schmoren, der LSF beträgt 5.

Bei 100-%iger Absorption des UV-Lichtes sinkt die Belastung auf Null und ich kann unendlich lange in der Sonne liegen. Aber wer will das schon?

Handelt es sich um ein völlig wirkungsloses Sonnenschutzmittel, so ist die Belastung 100 % und der LSF gleich 1.

Übersichtlicher lässt sich das in einer Tabelle darstellen:

Absorption x	Belastung $1 - x$	LSF $y = \frac{1}{1-x}$
0.00	1	1
0.50	0.50	2
0.75	0.25	4
0.80	0.20	5
0.90	0.10	10
0.95	0.05	20
0.99	0.01	100



22. Wie gross ist der Lichtschutzfaktor, wenn die Sonnencreme 20 Prozent des UV-Lichtes absorbiert?
23. Wie gross ist der Lichtschutzfaktor, wenn die Sonnencreme 60 Prozent des UV-Lichtes absorbiert?
24. Wie gross ist der Lichtschutzfaktor, wenn die Sonnencreme 96 Prozent des UV-Lichtes absorbiert?

Nun die Umkehrung:

25. Wie viel UV-Licht wird absorbiert bei einem Lichtschutzfaktor von 12, 15, 25, 30?

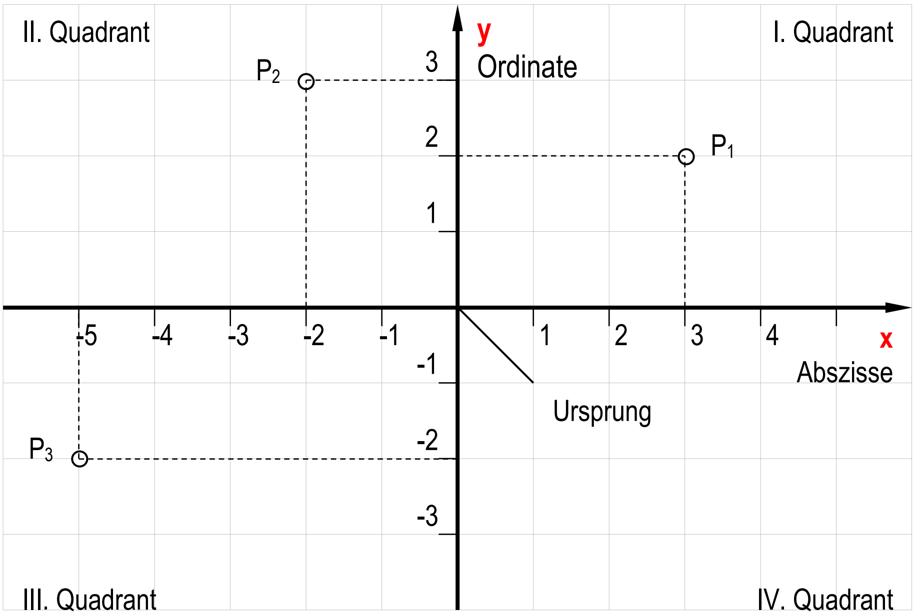
Beachten Sie: Ein Sonnenschutz mit LSF-30 absorbiert nicht doppelt so viel UV-Licht wie ein Schutz mit LSF-15. Er absorbiert lediglich 3.3 Prozent mehr.

11.11 Das Kartesische Koordinatensystem

Einführung und Begriffe

Eine Zahl kann man als Punkt auf der Zahlengeraden darstellen. Bei einem **Zahlenpaar** benützt man dafür die Zahlenebene. Zwei Zahlengeraden schneiden sich, stehen senkrecht aufeinander und bilden ein Gitternetz. Dafür müssen neue Begriffe definiert werden.

Rechtwinkliges oder kartesisches Koordinatensystem:



allgemein: P (x, y)

Beispiele:

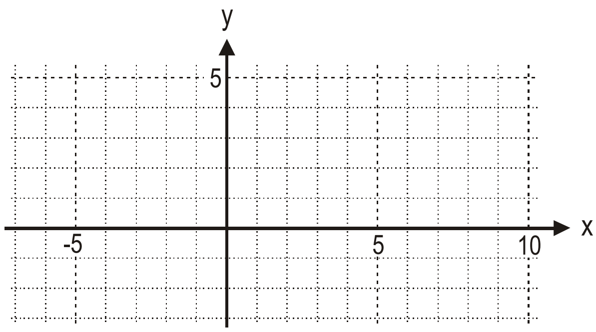
P_1 (3, 2)

P_2 (-2, 3)

P_3 (-5, -2)

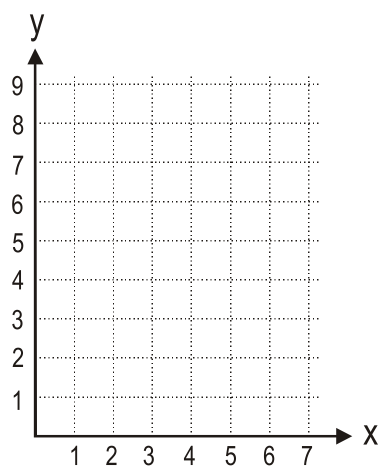
Der Name geht zurück auf den französischen Philosophen und Mathematiker René Descartes (der sich in der lateinisierten Form seines Namens *Cartesius* nannte).
Punkte werden durch Angabe des x- und des y-Wertes angegeben.

26. Die hellsten Sterne des Grossen Wagens haben folgende Koordinaten: A(–6/1), B(–2/2), C(0/1), D(3/0), E(4/–2), F(8/–1), G(8/2). Tragen Sie diese Sterne in nebenstehendes Koordinatensystem ein.



27. Zeichnen Sie folgende Punktmengen in das Koordinatensystem ein:

A	= {(x/y) / x = 2	und	$1 \le y \le 8$}	
B	= {(x/y) / $2 \le x \le 4$	und	y = 1}	
C	= {(x/y) / $2 \le x \le 5$	und	(y = 2 oder y = 8)}	
D	= {(x/y) / $4 \le x \le 5$	und	y = 3}	
E	= {(x/y) / $5 \le x \le 6$	und	(y = 4 oder y = 5)}	
F	= {(x/y) / $2 \le x \le 6$	und	y = 6}	
G	= {(x/y) / x = 6	und	$4 \le y \le 5$}	
H	= {(x/y) / x = 5	und	($2 \le y \le 4$ oder $5 \le y \le 8$)}	
I	= {(x/y) / x = 4	und	$1 \le y \le 2$}	
J	= {(x/y) / x = 4	und	y = 5}	
K	= {(x/y) / $2 \le x \le 4$	und	$1 \le y \le 2$}	schraffieren
L	= {(x/y) / $2 \le x \le 5$	und	$6 \le y \le 8$}	schraffieren

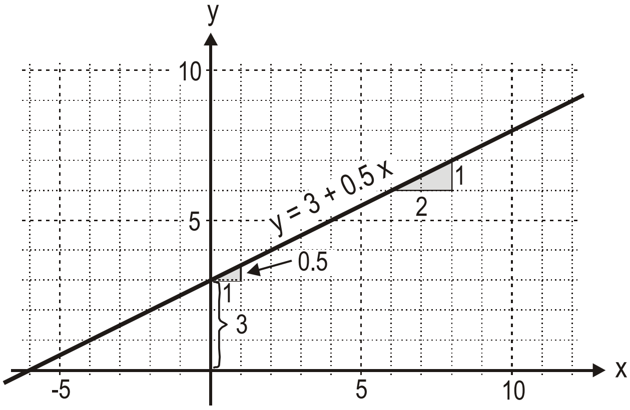


11.12 Die allgemeine Geradengleichung

Denken Sie nochmals an die Taxigleichung.
Gegeben ist eine Gerade durch folgende Gleichung:
y = 0.5x + 3

0.5 ist die **Steigung** der Geraden

3 ist der **Abschnitt auf der y-Achse**

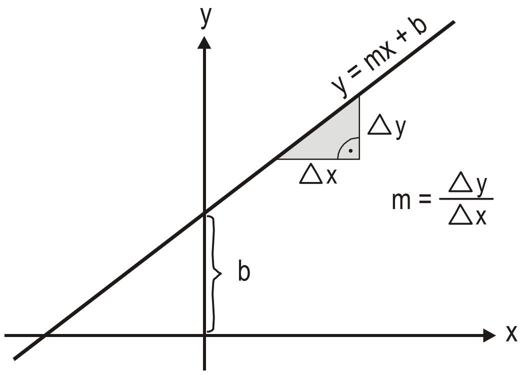


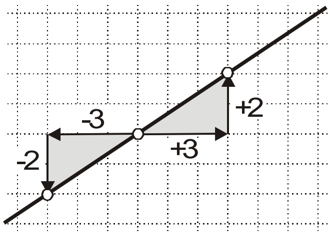
Setzt man allgemein den Buchstaben m für die Steigung und den Buchstaben b für den Abschnitt auf der y-Achse, so erhält man die **allgemeine Geradengleichung:**

y = mx + b

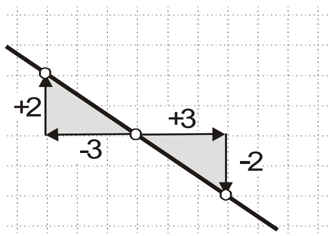
Die Steigung m erhält man, indem man sich ein **Steigungsdreieck** sucht und die Differenz der y-Werte (man schreibt Δy und spricht „Delta-y“) durch die Differenz der x-Werte (man schreibt Δx und spricht „Delta-x“) dividiert.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



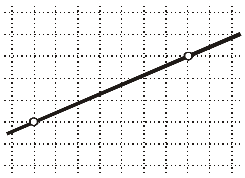


$$m = \frac{+2}{+3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

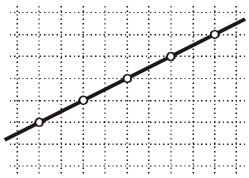


$$m = \frac{-2}{+3} = \frac{+2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

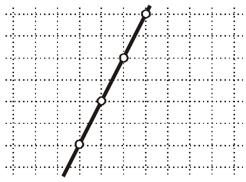
28. Geben Sie jeweils die Steigung an:



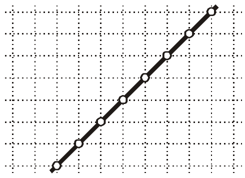
a) m =



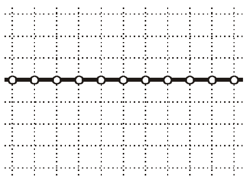
b) m =



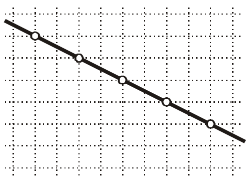
c) m =



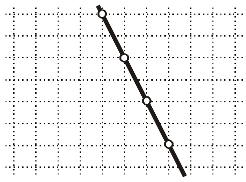
d) m =



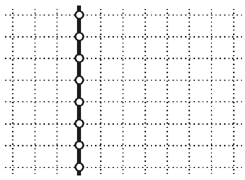
e) m =



f) m =



g) m =



h) m =

29. Zeichnen Sie Gerade mit den angegebenen Steigungen:

a) $m = \frac{3}{2}$

b) $m = -\frac{3}{2}$

c) $m = \frac{2}{3}$

d) $m = -\frac{2}{3}$

e) $m = 5$

f) $m = -5$

g) $m = \frac{1}{5}$

h) $m = -\frac{1}{5}$

i) $m = 1$

j) $m = -1$

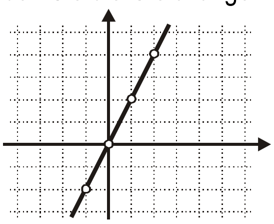
k) $m = 0$

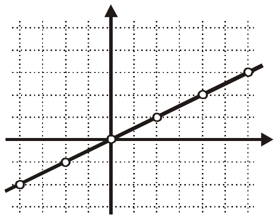
l) $m = \infty$

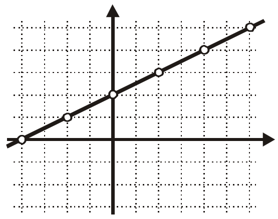
30. Gegeben sind jeweils eine Anzahl von Punkten, die auf einer Geraden liegen. Zeichnen Sie diese Punkte in ein Koordinatensystem. Suchen Sie durch ein wenig „raten und rätseln“ eine Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen dem x-Wert und dem y-Wert beschreibt.

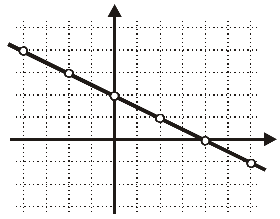
a) (–2/–2), (–1/–1), (0/0), (1/1), (2/2), (3/3), (4/4) ...
b) (–2/2), (–1/1), (0/0), (1/–1), (2/–2), (3/–3), (4/–4) ...
c) (–2/–1), (–1/0), (0/1), (1/2), (2/3), (3/4), (4/5) ...
d) (–2/–4), (–1/–2), (0/0), (1/2), (2/4), (3/6), (4/8) ...
e) (–2/–3), (–1/–1), (0/1), (1/3), (2/5), (3/7), (4/9) ...
f) (–2/3), (–1/3), (0/3), (1/3), (2/3), (3/3), (4/3) ...
g) (0/–2), (0/–1), (0/0), (0/1), (0/2), (0/3), (0/4) ...
h) (–2/–3), (0/–2), (2/–1), (4/0), (6/1), (8/2), (10/3) ...

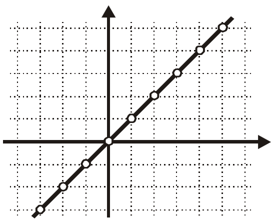
31. Geben Sie die Gleichungen der Geraden an:

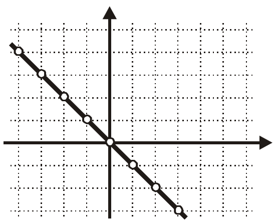

a)

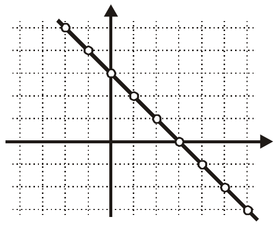

b)

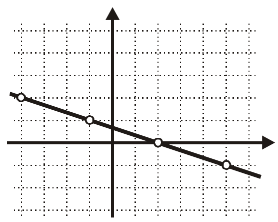

c)

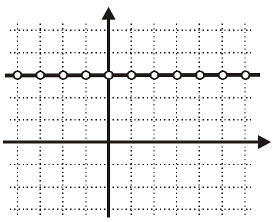

d)

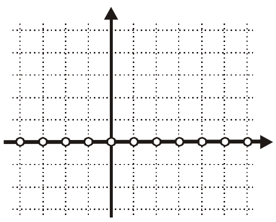

e)

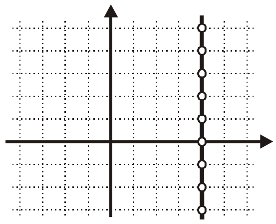

f)

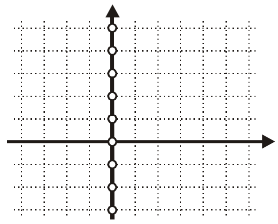

g)


h)


i)


j)


k)


l)

32. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen für die abgebildeten Geraden. Punkte mit ganzzahligen Koordinaten sind durch kleine Kreise gekennzeichnet.

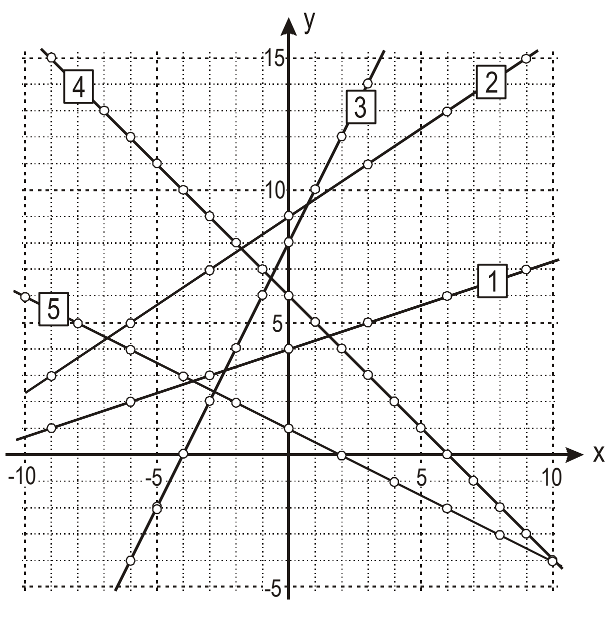
Gerade 1:

Gerade 2:

Gerade 3:

Gerade 4:

Gerade 5:



11.13 Bestimmung der Steigung und den Abschnitt auf der y-Achse

Wenn eine Gerade in der Form y = mx + b gegeben ist, kann man die Steigung und den Abschnitt auf der y-Achse leicht herauslesen.

Beispiel: y = –0.2x + 12.5 hat die Steigung m = –0.2 und der Abschnitt auf der y-Achse ist b = 12.5.

Eine Gerade ändert sich nicht, wenn man die Gleichung nach erlaubten Umformungsregeln umformt:

Die Gerade	$y = -\frac{2}{7}x + 3$
ist dieselbe Gerade wie	$7y = -2x + 21$
und das ist wieder dieselbe Gerade wie	$2x + 7y = 21$

Beispiel: Um die Steigung etwa der Geraden 2x – 3y = 12 zu berechnen, bringt man die Gleichung zunächst auf die Form y = mx + b.

$$2x - 3y = 12 \quad \Big| \; :3$$

$$\frac{2}{3}x - y = 4$$

$$y = \frac{2}{3}x - 4$$

Aus der letzten Gleichung kann man leicht herauslesen: $\underline{\underline{m = \frac{2}{3}}}$ und $\underline{\underline{b = -4}}$.

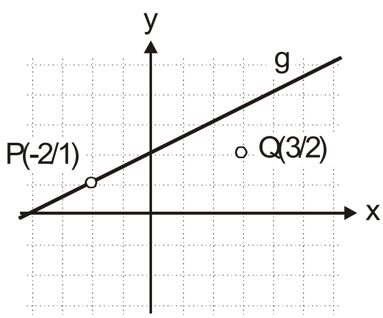
33. Bestimmen Sie m und b (die Steigung und den Abschnitt auf der y-Achse). Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem.
    a) 3x – y + 3 = 0 b) 5x + 3y = 12 c) 4x – 5y – 10 = 0 d) 5y – 15 = 0 e) x = 4

11.14 Liegt ein Punkt auf einer Geraden (oder nicht)?

Die Gleichung der Geraden g lautet: $y = 0.5 \cdot x + 2$

Der Punkt P(–2/1) erfüllt diese Gleichung,
es gilt ja: $1 = 0.5 \cdot (-2) + 2$,
der Punkt P liegt auf dieser Geraden.

Der Punkt Q(3/2) erfüllt diese Gleichung **nicht**,
es gilt ja: $2 \neq 0.5 \cdot 3 + 2$,
der Punkt Q liegt **nicht** auf dieser Geraden.



Ein Punkt liegt auf einer Geraden wenn er die Geradengleichung erfüllt.

34. Welche der Punkte A(21/–4), B(0/8), C(14/0), D(7/4), E(–7/12) und F(1/$\frac{52}{7}$) liegen auf der Geraden 4x + 7y = 56?

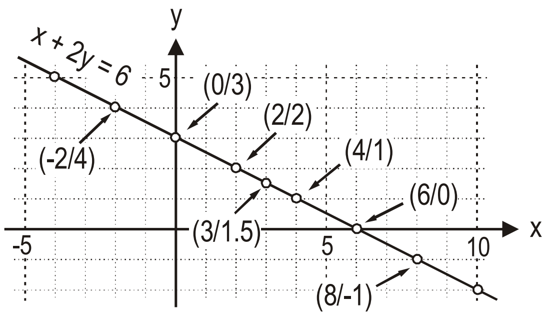
35. Welche der Punkte A(–8/–9), B(–3/6), C(–5/0), D(0/15), E(5/30) und F(59/193) liegen auf der Geraden 3x – y + 15 = 0 ?

11.15 Berechnung beliebiger (beliebig vieler) Punkte auf einer Geraden

Gegeben ist eine Geradengleichung, z. B. $x + 2y = 6$

Sie können für x einen beliebigen Wert vorgeben, z. B. $x = 4$. Sie setzen diesen Wert für x in die Gleichung ein und berechnen das zugehörige y: $4 + 2y = 6$, daraus folgt $y = 1$. Sie erhalten den Punkt (4/1) der Geraden.

Sie können auch für y einen beliebigen Wert vorgeben, z. B. $y = 3$. Sie setzen diesen Wert für y in die Gleichung ein und berechnen das zugehörige x: $x + 6 = 6$, daraus folgt $x = 0$. Sie erhalten den Punkt (0/3) der Geraden. Er liegt auf der y-Achse.



36. Berechnen Sie mindestens fünf Punkte, die auf der Geraden $2x – y = 5$ liegen.

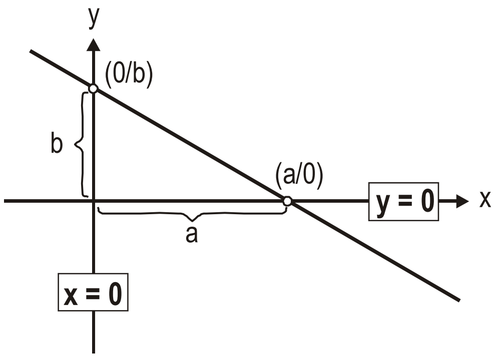
11.16 Berechnung der Achsenabschnitte a und b

Die Abschnitte, welche eine Gerade von den beiden Koordinatenachsen abschneidet, nennt man Achsenabschnitte. Den Abschnitt auf der y-Achse kennen Sie ja bereits.

Merken Sie sich bitte:

Die x-Achse hat die Gleichung $y = 0$.
Die y-Achse hat die Gleichung $x = 0$.

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist (a/0).
Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist (0/b).

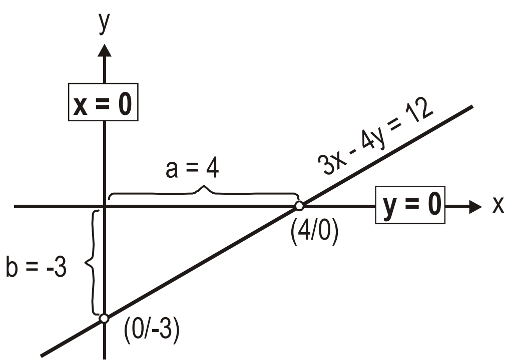


Sie berechnen die beiden Achsenabschnitte am bequemsten, wenn Sie einmal $x = 0$ setzen und dann $y = 0$ setzen.

Beispiel: Berechnen Sie die Achsenabschnitte der Geraden $3x – 4y = 12$.

Setzt man $x = 0$, so erhält man $0 – 4b = 12$ und daraus $b = –3$.

Setzt man $y = 0$, so erhält man $3a – 0 = 12$ und daraus $a = 4$.

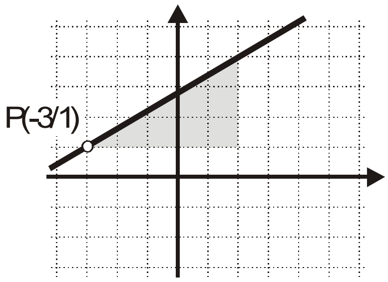


37. Berechnen Sie die Achsenabschnitte a und b und die Steigung m für folgende Gerade.
 a) $4x + 3y = 24$ b) $3x – y + 3 = 0$ c) $4x – 5y – 8 = 0$ d) $5y – 15 = 0$ e) $x – 7 = 0$

38. Zeigen Sie, dass zwischen a, b und m folgender Zusammenhang besteht: $\boxed{m = -\frac{b}{a}}$

11.17 Berechnung der Geradengleichung aus Punkt und Steigung

Beispiel: Eine Gerade ist gegeben durch einen Punkt P(–3/1) und die Steigung m = $\frac{3}{5}$.
Gesucht ist die Geradengleichung.



Lösung: Die gesuchte Gleichung muss folgende Form haben:

$$y=\tfrac{3}{5}x+b$$

Der Punkt (–3/1) liegt auf dieser Geraden, er muss die Gleichung erfüllen. Es muss also gelten:

$$1=\tfrac{3}{5}\cdot(-3)+b$$

Daraus errechnet sich b zu $b=\frac{14}{5}$.

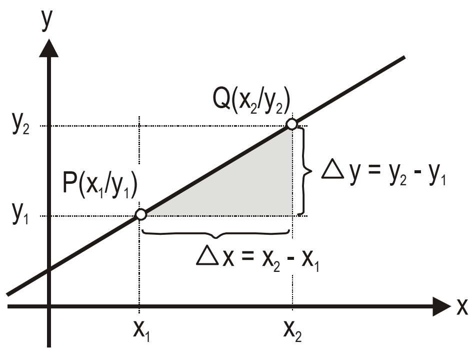
Die gesuchte Gleichung lautet also: $y=\frac{3}{5}x+\frac{14}{5}$, oder auch 3x – 5y + 14 = 0.

39. Berechnen Sie die Geradengleichung bei gegebenem Punkt und gegebener Steigung.
 a) P(5/8), m = 3 b) P(30/35), $m=-\frac{1}{2}$ c) P(–30/–3), $m=-\frac{2}{3}$

11.18 Berechnung der Geradengleichung aus zwei Punkten

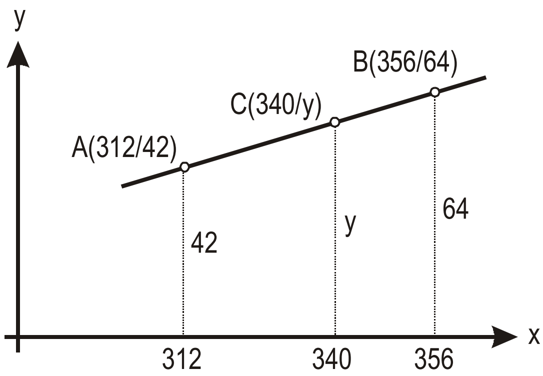
Gegeben sind zwei Punkte P(x_1/y_1) und Q(x_2/y_2). Man berechnet zunächst die Steigung der Geraden mit der Formel $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Damit kennt man Punkt und Steigung und kann mit Hilfe der Gleichung y = mx + b (wie im Kapitel 7.5) die Geradengleichung berechnen.



40. Berechnen Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte P und Q:
 a) P(4/3), Q(11/7) b) P(3/6), Q(7/3) c) P(–2/13), Q(8/8) d) P(4/–3), Q(11/–3)

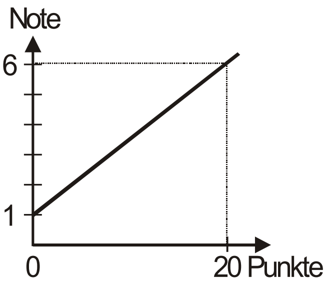
41. Die drei Punkte A(312/42), B(356/64) und C(340/y) liegen auf einer Geraden. Berechnen Sie y.



42. Die drei Punkte A, B und C liegen auf einer Geraden. Berechnen Sie die fehlende Koordinate.
    a) A(12/23), B(18/27), C(x/37) b) A(–20/12), B(–5/y), C(16/–36)

43. Liegen die drei Punkte A, B und C auf einer Geraden?
    a) A(–3/–4), B(7/10), C(4/6) b) A(–10/11), B(4/–10), C(12/–22)

44. Ein Mathematiklehrer korrigiert eine Prüfung und verteilt Punkte für die einzelnen Aufgaben. Die maximale Punktezahl beträgt 22. Er beschliesst, für 20 Punkte die Note 6 zu geben, 0 Punkte ergeben die Note 1. Die Zwischenwerte möchte er linear berechnen, d. h. alle Punkte dazwischen sollen auf einer Geraden liegen.
    Suchen Sie eine Formel, welche erlaubt, aus der jeweiligen Punktezahl die Note zu berechnen. Welche Note erhält jemand mit 5, 10, 15 oder 20 Punkten?

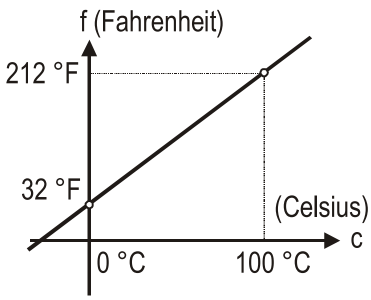


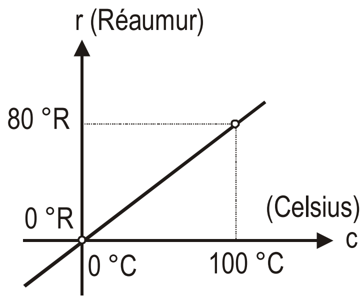
45. *Gabriel Fahrenheit* (1686 – 1736) baute 1714 ein Quecksilberthermometer und führte die nach ihm benannte (und in Amerika und England heute noch gebräuchliche) Fahrenheit-Skala (°F) ein.
    1730 entwickelte der Franzose *Seigneur de Réaumur* (1683 – 1757) ein Weingeistthermometer und führte die Réaumur-Skala (°R) ein.

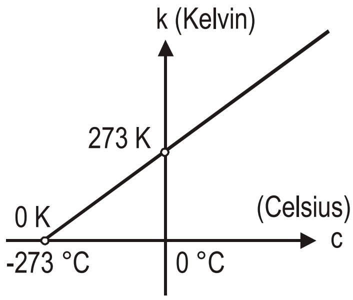
    Der schwedische Astronom *Anders Celsius* (1701 – 1744) baute 1742 ebenfalls ein Quecksilberthermometer mit der bei uns gebräuchlichen Celsius-Skala (°C).

    Die Physik verwendet wieder eine andere Temperaturskala, die Kelvingrade oder die absolute Temperatur. Die Grade werden nach dem Briten *Lord Kelvin* (1824 – 1907) benannt. Man sagt jedoch nicht „Grad Kelvin“, sondern einfach nur „Kelvin“ (K).

    Wie nun die einzelnen Skalen miteinander zusammenhängen, können Sie den Diagrammen entnehmen. Anstelle von den sonst üblichen x und y als Bezeichnung der Achsen habe ich c für Celsiusgrade, f für Fahrenheitgrade, r für Reaumurgrade und k für Kelvingrade verwendet. Bestimmen Sie die Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen den einzelnen Temperaturskalen herstellen.







f = r = k =

c = c = c =

Beantworten Sie mit Hilfe dieser Gleichungen folgende Fragen:

	Celsius	Fahrenheit	Réaumur	Kelvin
Gefrierpunkt des Wassers				
Siedepunkt des Wassers				
Körpertemperatur	37 °C			
Gefrierpunkt von Quecksilber	–39 °C			
Nullpunkt der Fahrenheitskala		0 °F		
Absoluter Nullpunkt der Temperatur				0 K

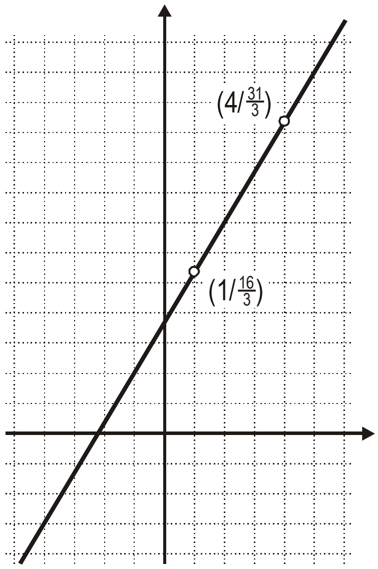
11.19 Wie zeichnet man eine Gerade?

Eine Gerade zu zeichnen gibt es viele Möglichkeiten.

Beispiel: Zu zeichnen ist die Gerade $5x - 3y = -11$.

<u>1. Möglichkeit:</u> Zwei Punkte berechnen.

Ich suche mir zwei Punkte. Dazu kann man für x (oder y) einen beliebigen Wert wählen und die zweite Koordinate berechnen.



Ich wähle $x = 1$. Dann ist $5 \cdot 1 - 3y = -11$, daraus ergibt sich $y = \frac{16}{3}$.

Der Punkt (1/$\frac{16}{3}$) ist also ein Punkt der Geraden.

Als nächstes wähle ich $x = 4$. Dann ist $5 \cdot 4 - 3y = -11$, daraus ergibt sich $y = \frac{31}{3}$.

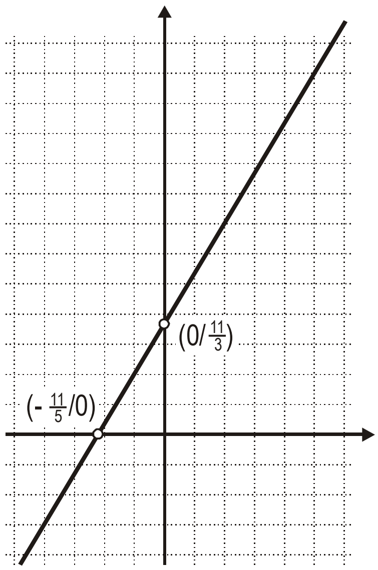
Der Punkt (4/$\frac{31}{3}$) ist ebenfalls ein Punkt der Geraden.

Mit zwei Punkten kann man die Gerade konstruieren.

Die Bruchzahlen sind nicht sehr praktisch. Durch geschickte Wahl der einen Koordinate und ein wenig „pröbeln" kann man (meist) erreichen, dass die Punkte ganzzahlige Koordinaten haben.

<u>2. Möglichkeit:</u> Achsenabschnitte berechnen.

Ist eigentlich nur ein Spezialfall der ersten Möglichkeit. Statt zwei beliebige Punkte zu berechnen berechnet man die Schnittpunkte mit den beiden Achsen.



In unserem Beispiel $5x - 3y = -11$ erhält man folgende Achsenschnittpunkte: (0/$\frac{11}{3}$) und ($-\frac{11}{5}$/0).

Es ist also $a = -\frac{11}{5}$ und $b = \frac{11}{3}$.

Damit lässt sich die Gerade zeichnen.

Unbequem sind allerdings wieder die Bruchzahlen.

3. Möglichkeit: Abschnitt auf der y-Achse und Steigung berechnen.

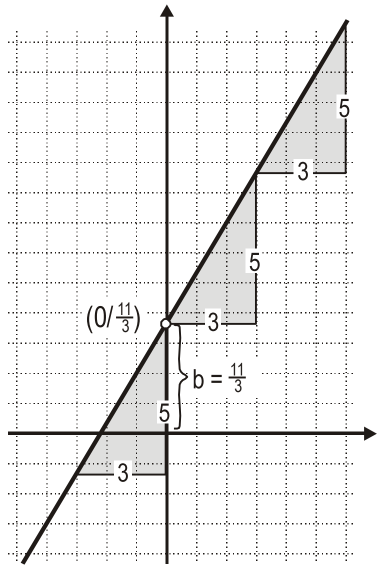
Man bringt die Gleichung auf die Form y = mx + b.

Mit Hilfe von m und b kann man die Gerade zeichnen.

In unserem Beispiel erhält man durch Umformung $y = \frac{5}{3}x + \frac{11}{3}$.

Mit der Steigung $m = \frac{5}{3}$ kann man schon sehr viel anfangen.

Ungünstig ist der Bruch $b = \frac{11}{3}$.



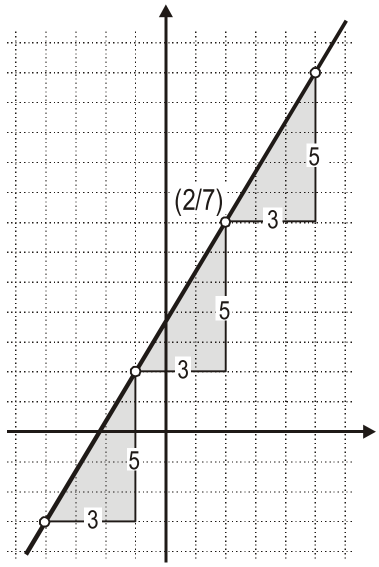
4. Möglichkeit: Einen ganzzahligen Punkt suchen und die Steigung berechnen.

Man bringt wieder die Gleichung auf die Form y = mx + b und erhält wieder $y = \frac{5}{3}x + \frac{11}{3}$.

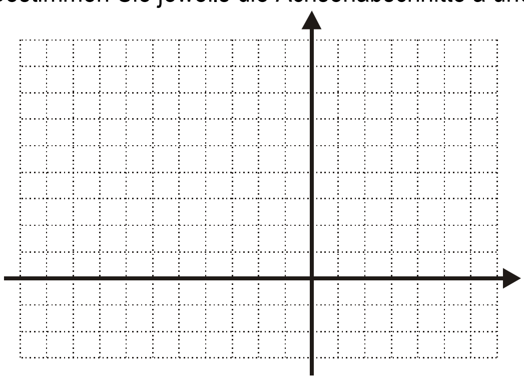
Dieser Gleichung entnimmt man die Steigung, $m = \frac{5}{3}$.

Dann suche ich durch (intelligentes) Pröbeln einen ganzzahligen Punkt:
(2/7) ist so ein ganzzahliger Punkt.

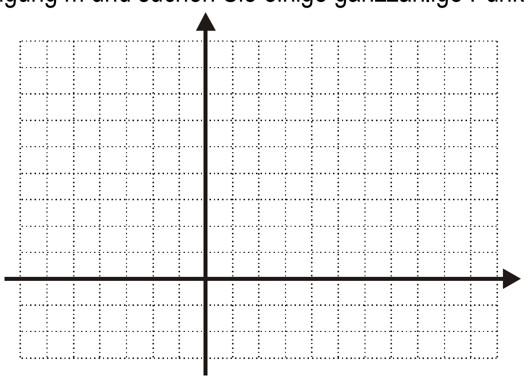
Alle weiteren ganzzahligen Punkte ergeben sich durch die Steigung $m = \frac{5}{3}$.



46. Bestimmen Sie jeweils die Achsenabschnitte a und b, die Steigung m und suchen Sie einige ganzzahlige Punkte:



a) 2x – 3y + 13 = 0



b) 3x + 4y – 23 = 0

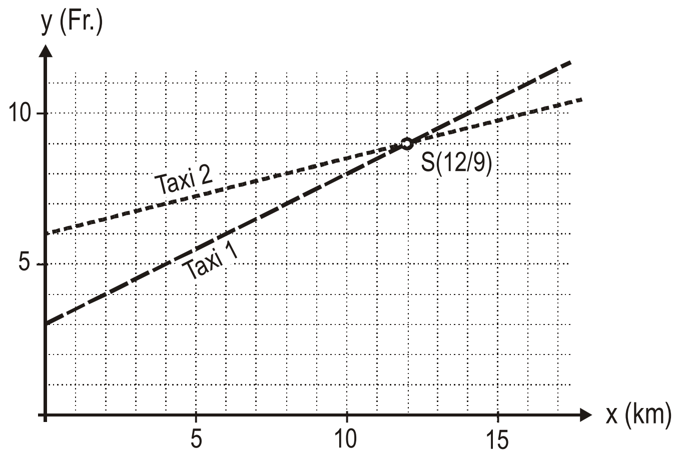
11.20 Schnittpunkt zweier Geraden

In einer Stadt gibt es zwei Taxiunternehmen mit unterschiedlicher Preispolitik:

Taxi 1 Grundpreis Fr. 3.--, Kilometergeld 0.50 Fr./km.
Ist x die Anzahl Kilometer und y der Fahrpreis, so lautet die Gleichung: $y_1 = 3 + 0.50\ x$

Taxi 2 Grundpreis Fr. 6.--, Kilometergeld 0.25 Fr./km.
Ist x die Anzahl Kilometer und y der Fahrpreis, so lautet die Gleichung: $y_2 = 6 + 0.25\ x$

Aus dem Diagramm ist ersichtlich, dass für eine Fahrt bis zu 12 km das Taxi 1 billiger ist, bei Fahrten von genau 12 km sind beide gleich teuer, über 12 km fährt man besser mit Taxi 2.



Die entsprechenden Rechnungen lauten:

Taxi 1 billiger als Taxi 2	beide gleich teuer (oder billig)	Taxi 1 teurer als Taxi 2
$y_1 < y_2$ $3 + 0.50\ x < 6 + 0.25\ x$ $0.25\ x < 3$ $\underline{\underline{x < 12}}$	$y_1 = y_2$ $3 + 0.50\ x = 6 + 0.25\ x$ $0.25\ x = 3$ $\underline{\underline{x = 12}}$	$y_1 > y_2$ $3 + 0.50\ x > 6 + 0.25\ x$ $0.25\ x > 3$ $\underline{\underline{x > 12}}$

Es geht also darum, den Schnittpunkt zweier Geraden zu berechnen. Sie müssen einen Punkt finden, der auf beiden Geraden liegt bzw. Sie müssen ein x und ein y finden, welche beide Gleichungen zugleich erfüllen.

In dem Beispiel mit den beiden Taxiunternehmen wurde die **Gleichsetzungsmethode** benutzt:
Die beiden Gleichungen lauten $y = 3 + 0.50\ x$ und $y = 6 + 0.25\ x$.
Nun setzt man die rechten Seiten gleich: $\mathbf{3 + 0.50\ x = 6 + 0.25\ x}$ und erhält daraus $x = 12$.
Einsetzen in eine der beiden Gleichungen ergibt $y = 9$.
Der Schnittpunkt lautet S(12/9).

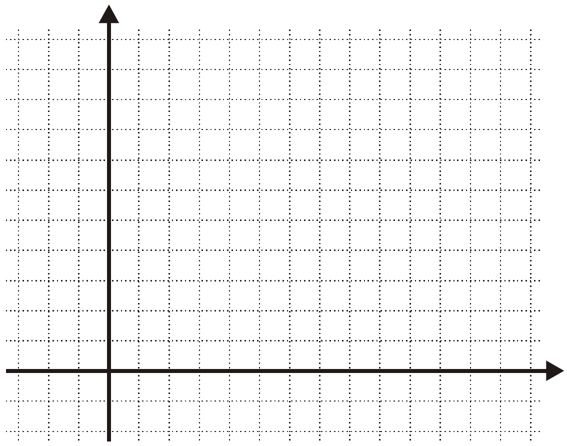
In der Mathematik verwendet man drei Methoden zur Berechnung des Schnittpunktes.
Wir wollen nun eine Aufgabe auf drei verschiedene Arten lösen.

Beispiel: Gesucht ist der Schnittpunkt der beiden Geraden

g_1: $2x - 5y = -29$

g_2: $3x + 4y = 37$

Zeichnen Sie zunächst diese beiden Geraden und bestimmen Sie den Schnittpunkt mit Hilfe der Zeichnung.



1. Gleichsetzungsmethode:

Man stellt in beiden Gleichungen eine Variable frei und setzt die anderen beiden Seiten gleich.

Aus erster Gleichung x freistellen: $x = \frac{5y - 29}{2}$ (1)

Aus zweiter Gleichung ebenfalls x freistellen: $x = \frac{-4y + 37}{3}$ (2)

Dann die beiden rechten Seiten gleichsetzen: $\frac{5y - 29}{2} = \frac{-4y + 37}{3}$ (3)

Löst man diese Gleichung (3) nach y auf, so erhält man y = 7.

Setzt man in Gleichung (1) oder (2) y = 7, so erhält man x = 3.

Der Schnittpunkt lautet S(3/7).

47. Rechnen Sie dieselbe Aufgabe nochmals mit der Gleichsetzungsmethode indem Sie jedoch diesmal beide Male y freistellen und dann die beiden Terme mit x als Unbekannte gleichsetzen.

2. Einsetzungsmethode (Ersetzungsmethode, Substitutionsmethode):

Man stellt aus einer der beiden Gleichungen eine Variable frei und setzt in die andere ein.

Aus erster Gleichung x freistellen: $x = \frac{5y - 29}{2}$ (1)

Einsetzen in die zweite Gleichung. $3 \cdot \frac{5y - 29}{2} + 4y = 37$ (2)

Löst man diese Gleichung nach y auf, so erhält man wieder y = 7.

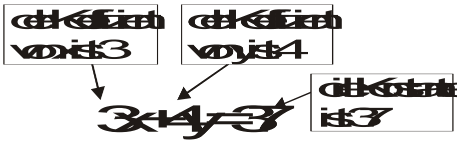
Setzt man in Gleichung (1) y = 7, so erhält man x = 3.

Der Schnittpunkt lautet S(3/7).

48. Rechnen Sie dieselbe Aufgabe nochmals mit der Einsetzungsmethode indem Sie jedoch diesmal aus der ersten Gleichung y freistellen und in die zweite Gleichung einsetzen.

3. Additionsmethode (Methode gleicher Koeffizienten)

Zunächst muss erklärt werden, was man in der Mathematik unter einem *Koeffizienten* versteht. Ein *Koeffizient* ist ein Faktor, mit dem eine Variable zu multiplizieren ist. Die reine Zahl heisst *Konstante*.



Man multipliziert beide Gleichungen mit geeigneten Faktoren und erzeugt **entgegengesetzt gleiche Koeffizienten** für x oder für y. Anschliessend werden die beiden Gleichungen addiert.

$$
\begin{array}{rcl|l}
2x - 5y &=& -29 & \cdot 4 \\
3x + 4y &=& 37 & \cdot 5 \\
\hline
8x - 20y &=& -116 & \\
15x + 20y &=& 185 & + \\
\hline
23x &=& 69 & :23 \\
x &=& 3 &
\end{array}
$$

Durch Einsetzen von x = 3 in eine der beiden Gleichungen, erhält man y = 7 und damit den Schnittpunkt S(3/7).

Nochmals dieselbe Methode, diesmal angewendet auf die Koeffizienten von x:

$$
\begin{array}{rcl|l}
2x - 5y &=& -29 & \cdot (-3) \\
3x + 4y &=& 37 & \cdot 2 \\
\hline
-6x + 15y &=& 87 & \\
6x + 8y &=& 74 & + \\
\hline
23y &=& 161 & :23 \\
y &=& 7 &
\end{array}
$$

Durch Einsetzen von y = 7 in eine der beiden Gleichungen, erhält man x = 3 und damit wieder den Schnittpunkt S(3/7).

49. Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden g_1 und g_2 mit Hilfe der Additionsmethode.
   g_1: $35x + 12y = 51$
   g_2: $55x + 18y = 69$

50. Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden nach allen drei Methoden. Fertigen Sie zur Kontrolle eine Zeichnung an.

a) $2x - 3y = -19$ $3x + 5y = 19$	b) $2x - y = 0$ $3x + y = 15$	c) $x - 2y - 2 = 0$ $4x - 3y - 3 = 0$

51. Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden nach irgendeiner Methode. Fertigen Sie zur Kontrolle eine Zeichnung an.

a) $x + y = 19$ $x - y = 5$	b) $3x + 2y = 12$ $x + y = 5$	c) $3x + 4y = 24$ $y = 2x - 5$
d) $7x + 11y = 13$ $15x + 11y = 53$	e) $3x - 7y = 19$ $2x = 15$	f) $3x - 6y = 5$ $2x - 4y = 7$

52. Bei diesen Aufgaben müssen Sie die beiden Gleichungen erst vereinfachen.
   a) $(4x + 1)(5 - 3y) + 6x(2y + 3) = 198$
      $(2x - 3)(6y + 5) - 4y(3x - 1) = 49$
   b) $(3x - 1)^2 + (y + 5)^2 + 6xy = (3x + y)^2$
      $(2x - 3y)^2 - (4x - 3)(2 - 3y) - (2x + y)(2x - y) = 16 + 10y^2$
   c) $20 - (8x - 3y) = 4y - (2x + y - 2)$
      $11x - (x + y + 2) = 30 - 5(9x - 4y + 7)$

53. Zeichnen Sie jeweils die drei Geraden und überprüfen Sie durch Rechnung ob sie einen gemeinsamen Schnittpunkt haben:

a) $x + y = 11$
   $3x - 4y = 7$
   $x - 2y = 0$

b) $2x - 5y = 5$
   $x - 3y = -3$
   $x + y = 41$

54. Suchen Sie zwei Zahlen mit der Summe 34 und der Differenz 16.

55. Die Summe zweier Zahlen ist 25. Das Dreifache der ersten Zahl ist um 3 grösser als die zweite Zahl. Wie heissen die beiden Zahlen?

56. Suchen Sie zwei Zahlen deren Differenz 30 und deren Quotient 7 ist.

57. Welche Zahl ist um 8 grösser als eine zweite und um 10 kleiner als deren Dreifaches?

58. Zwei Zahlen verhalten sich wie 3 : 5. Vergrössert man die erste Zahl um 3 und die zweite Zahl um 2, so verhalten sich die neuen Zahlen wie 2 : 3. Wie heissen die beiden Zahlen?

59. Gesucht sind zwei Zahlen mit folgenden Eigenschaften: Die erste Zahl ist um 24 kleiner als das Doppelte der zweiten Zahl. Das Verhältnis der ersten Zahl zur zweiten Zahl ist 4 : 3.

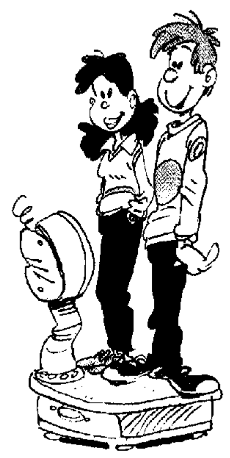
60. In jeder meiner Taschen habe ich einen bestimmten Geldbetrag. Nehme ich links 60 Rappen weg und gebe sie rechts dazu, so habe ich in beiden Taschen gleich viel. Gebe ich hingegen einen Franken von rechts nach links, so habe ich links doppelt so viel wie rechts. Wie viel Geld habe ich in jeder Tasche?

61. Ein Hausmann bezahlt für 300 g Fleischkäse und 200 g Wurst Fr. 13.20. Am anderen Tag bezahlt er für 400 g Fleischkäse und 300 g Wurst Fr. 18.40. Was kostet 1 kg Fleischkäse, was kostet 1 kg Wurst?

62. In einem Stall sind Hasen und Hühner, zusammen 44 Köpfe und 112 Beine. Wie viele Hasen und wie viele Hühner sind in dem Stall?

63. A deux sur la balance.
Pierre et sa sœr Magali accompagnés d'Aria, leur chienne, fouillent (stöbern) dans le grenier (Dachboden) de leur grand-père. Ils découvrent une vieille bascule dont l'aiguille (der Zeiger) ne descend plus au-dessous de 60 kg.

La Bascule
indique 87 kg



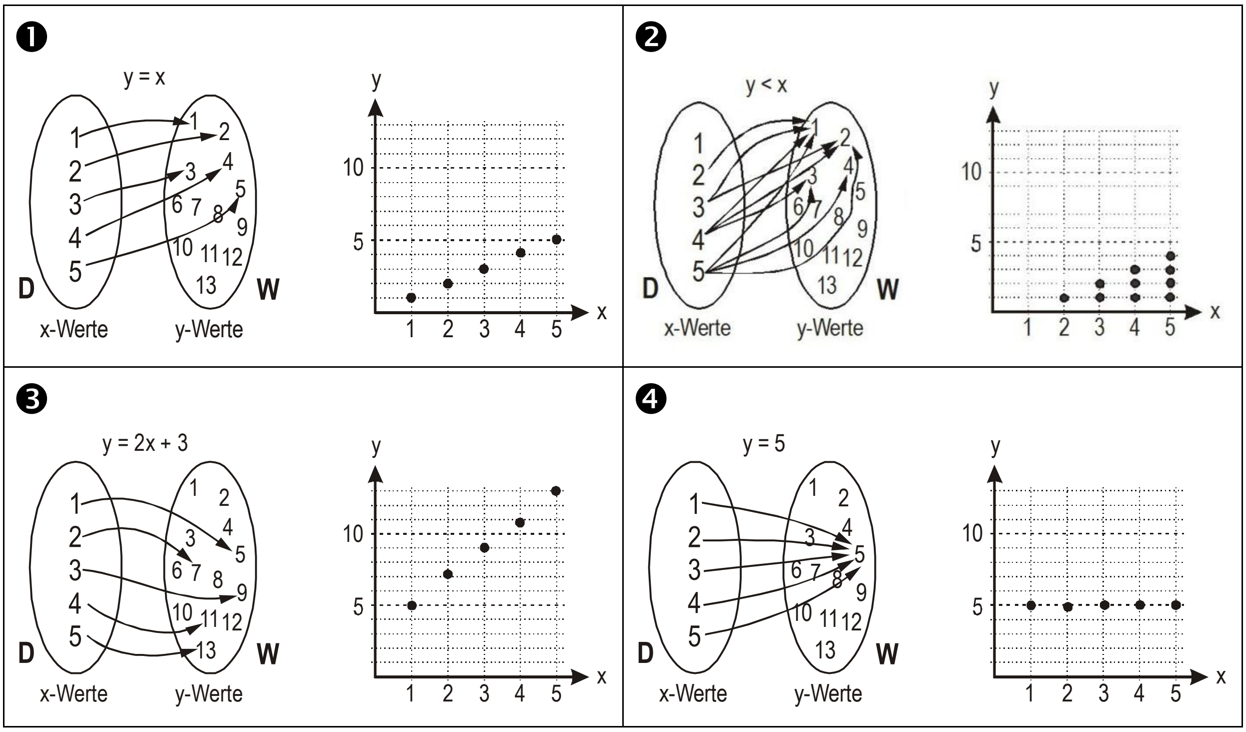
La Bascule
indique 123 kg

La Bascule
indique 66 kg

Quel est le poids (ou plutôt la masse) de chacun?

11.21 Lösungen

1) Die Zuordnungen ❶ und ❹ sind Funktionen.
2) Die Zuordnung ❻ ist keine Funktion.
3) Für den Kartoffeleinkauf, für die Taxifahrt und für den freien Fall ist auch die Umkehrung eine Funktion.
4) a) Die Zuordnung der Häuser einer Strasse und ihre Hausnummer ist eine Funktion, auch die Umkehrung ist eine Funktion.
   b) Die Zuordnung der Kinder eines Dorfes zu ihren Schulklassen ist eine Funktion, die Umkehrung ist keine Funktion.
   c) Die Zuordnung der Hunde einer Stadt und der Hundehalter ist keine Funktion, auch die Umkehrung ist keine Funktion.
5) Zeichnen Sie die Zuordnungspfeile und das Diagramm. Welche der Situationen ❶ bis ❹ sind Funktionen?



❶, ❸ und ❹ sind Funktionen.

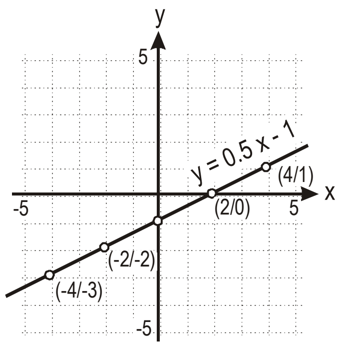
❷ ist keine Funktion aus zwei Gründen: Der Zahl 1 ist keine Funktionswert zugeordnet, den Zahlen 3, 4 und 5 sind gleich mehrere Funktionswerte zugeordnet.

6) a)

y = f(4) = 1	Punkt (4/1)
y = f(–4) = –3	Punkt (–4/–3)
y = f(10) = 4	Punkt (10/4)
y = f(4.5) = 1.25	Punkt (4.5/1.25)
y = f(0) = –1	Punkt (0/–1)
y = f(–10) = –6	Punkt (–10/–6)

b)

y = 1	falls	x = 4	Punkt (4/1)
y = 1.5	falls	x = 5	Punkt (5/1.5)
y = –2	falls	x = –2	Punkt (–2/–2)
y = 0	falls	x = 2	Punkt (2/0)
y = 10	falls	x = 22	Punkt (22/10)
y = –8	falls	x = –14	Punkt (–14/–8)



7) Die Kilopreise sind 1 Fr./kg, 1.5 Fr./kg und 2 Fr./kg. 5.5 kg kosten Fr. 5.5, Fr. 8.25 und Fr. 11.--. Für Fr. 12.-- erhält man 12 kg, 8 kg und 6 kg.

8)

„Steigung" (= Geschwindigkeit) Spaziergänger:	1 m/s	Funktionsgleichung: Strecke (in m) = 1 m/s · Zeit (in s)
„Steigung" (= Geschwindigkeit) Velofahrer:	5 m/s	Funktionsgleichung: Strecke (in m) = 5 m/s · Zeit (in s)
„Steigung" (= Geschwindigkeit) Motorradfahrer:	15 m/s	Funktionsgleichung: Strecke (in m) = 15 m/s · Zeit (in s)

9)

„Steigung" (= Dichte) Kork:	0.3 g/cm³	Funktionsgleichung: Masse (in g) = 0.3 g/cm³ · Volumen (in cm³)
„Steigung" (= Dichte) Wasser:	1.0 g/cm³	Funktionsgleichung: Masse (in g) = 1.0 g/cm³ · Volumen (in cm³)
„Steigung" (= Dichte) Aluminium:	2.7 g/cm³	Funktionsgleichung: Masse (in g) = 2.7 g/cm³ · Volumen (in cm³)
„Steigung" (= Dichte) Eisen:	7.9 g/cm³	Funktionsgleichung: Masse (in g) = 7.9 g/cm³ · Volumen (in cm³)
„Steigung" (= Dichte) Gold:	19.3 g/cm³	Funktionsgleichung: Masse (in g) = 19.3 g/cm³ · Volumen (in cm³)

10) Ergänzen Sie die fehlenden Werte:

	Kork	Wasser	Aluminium	Eisen	Gold
1 cm^3	0.3 g	1 g	2.7 g	7.9 g	19.3 g
1 dm^3	0.3 kg	1 kg	2.7 kg	7.9 kg	19.3 kg
1 m^3	300 kg	1000 kg	2700 kg	7900 kg	19300 kg

11) Ergänzen Sie die fehlenden Werte:

	Kork	Wasser	Aluminium	Eisen	Gold
1 g	3.33 cm^3	1 cm^3	0.37 cm^3	0.13 cm^3	0.05 cm^3
1 kg	3.33 dm^3	1 dm^3	0.37 dm^3	0.13 dm^3	0.05 dm^3
1000 kg	3.33 m^3	1 m^3	0.37 m^3	0.13 m^3	0.05 m^3

12) 337.5 g

13) 74 cm^3

14) Gerade 1: $y = \frac{1}{3}x$ Gerade 2: $y = \frac{2}{3}x$
Gerade 3: $y = x$ Gerade 4: $y = 2x$
Gerade 5: $y = -3x$ Gerade 6: $y = -x$
Gerade 7: $y = -\frac{1}{2}x$

15) a) 1.50 Fr./km
b) $y = 1.5x + 5$
c) $x = \frac{y - 5}{1.5}$
d) Fr. 11.-- (Fr. 26.--)
e) 7 km (20 km)

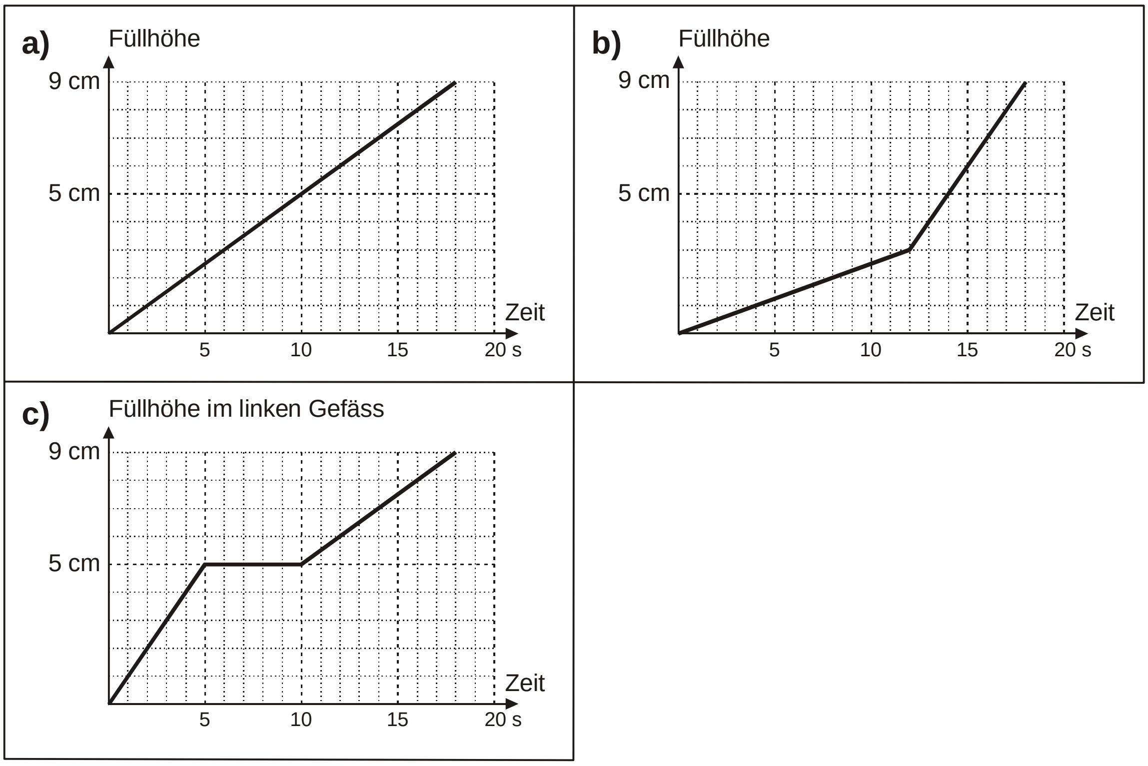
16) $y = -3$ (Fr.) + 0.5 (Fr./km) · x (km) bzw. $y = 0.5x - 3$.
Bis 6 km kann man gratis fahren.

17) $y = 5$ (Fr.) – 0.5 (Fr./km) · x (km) bzw. $y = 5 - 0.5x$
Über 10 km kostet nichts mehr (oder man erhält gar etwas dafür).

18) y = 4 Fr. (egal wie weit man fährt).

19) a) $y = \frac{\text{Fr. } 12'000}{x}$
b) Fr. 1'500.-- pro Person
c) $x \cdot y =$ Fr. 12'000

20)



21) zu Gefäss A gehört Diagramm 3
zu Gefäss B gehört Diagramm 4
zu Gefäss C gehört Diagramm 5
zu Gefäss D gehört Diagramm 2
zu Gefäss E gehört Diagramm 6
zu Gefäss F gehört Diagramm 1

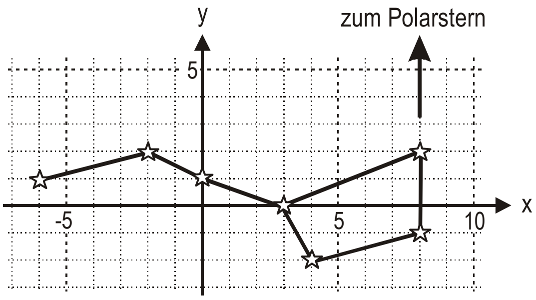
22) LSF-1.25

23) LSF-2.5

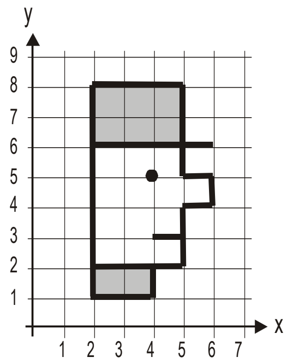
24) LSF-25

25) 91.7 %, 93.3 %, 96.0 %, 96.7 %

26)



27)



28) a) 3/7 b) 1/2 c) 2 d) 1
e) 0 f) –1/2 g) –2 h) ∞

29) Vergleichen Sie mit Aufgabe 28.

30) a) y = x e) y = 2x + 1
b) y = –x f) y = 3
c) y = x + 1 g) x = 0
d) y = 2x h) y = ½ x – 2

31) a) y = 2x b) $y = \frac{1}{2}x$ c) $y = \frac{1}{2}x + 2$ d) $y = -\frac{1}{2}x + 2$
e) y = x f) y = –x g) y = 3 – x h) $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x$
i) y = 3 j) y = 0 k) x = 4 l) x = 0

32) Gerade 1: $y = \frac{1}{3}x + 4$
Gerade 2: $y = \frac{2}{3}x + 9$
Gerade 3: y = 2x + 8
Gerade 4: y = –x + 6
Gerade 5: $y = -\frac{1}{2}x + 1$

33) a) m = 3, b = 3 b) m = –5/3, b = 4
c) m = 4/5, b = –2 d) m = 0, b = 3
e) m = ∞, b = ∞

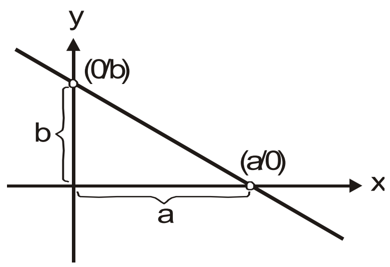
34) Alle diese Punkte liegen auf der Geraden 4x + 7y = 56

35) A, B, C, D und E liegen auf der Geraden.

36) (0/–5), (1/–3), (2/–1), (3/1), (4/3), …

37) a) a = 6, b = 8, $m = -\frac{4}{3}$ b) a = –1, b = 3, m = 3
c) a = 2, $b = -\frac{8}{5}$, $m = \frac{4}{5}$ d) a = ∞, b = 3, m = 0
e) a = 7, b = ∞, m = ∞

38)



Sie erkennen das unmittelbar aus der Zeichnung und Sie können das auch an Hand von Aufgabe 33 nachprüfen.

39) a) y = 3x – 7 b) $y = -\frac{1}{2}x + 50$
c) $y = -\frac{2}{3}x - 23$ oder 2x + 3y = –69

40) a) 4x – 7y = –5 b) 3x + 4y = 33
c) x + 2y = 24 d) y = –3

41) Geradengleichung: x – 2y = 228, C(340/ **56**)

42) a) C(33/37) b) B(–5/**–8**)

43) a) nein b) ja; Gleichung der Geraden 3x + 2y = –8

44) Note = $\frac{\text{Punktezahl}}{4} + 1$,
5 Punkte → Note 2.25,
10 Punkte → Note 3.50,
15 Punkte → Note 4.75
20 Punkte → Note 6

45) $f = \frac{9}{5}c + 32$ r = 0.8 c k = c + 273
$c = \frac{5f-160}{9}$ c = 1.25 r c = k – 273

0 °C	32 °F	0 °R	273 K
100 °C	212 °F	80 °R	373 K
37 °C	98.6 °F	29.6 °R	310 K
–39 °C	–38.2 °F	–31.2 °R	234 K
–17.8 °C	**0 °F**	–14.2 °R	255.2 K
–273 °C	–459.4	–218.4	**0 K**

46) a) a = –6.5, $b = 4\frac{1}{3}$, $m = \frac{2}{3}$, (–2/3), (1/5), (4/7) …
b) $a = 7\frac{2}{3}$, $b = 5\frac{3}{4}$, $m = -\frac{3}{4}$, (–3/8), (1/5), (5/2) …

47) keine Lösung angegeben

48) keine Lösung angegeben

49) Schnittpunkt S(–3/13)

50) a) S(–2/5) b) S(3/6) c) S(0/–1)

51) a) S(12/7) b) S(2/3) c) S(4/3)
d) S(5/–2) e) S(7.5/0.5) f) keine Lösung

52) a) S(5/–1) b) S(1/–2) c) S(3/8)

53) a) kein gemeinsamer Schnittpunkt
b) gemeinsamer Schnittpunkt S(30/11)

54) 25 und 9

55) 7 und 18

56) 35 und 5

57) 17 und 9

58) 15 und 25

59) 48 und 36

60) links Fr. 5.40, rechts Fr. 4.20

61) 1 kg Fleischkäse kostet Fr. 28.--, 1 kg Wurst kostet Fr. 24.--.

62) 12 Hasen und 32 Hühner

63) Pierre pese 72 kg, Magali pese 51 kg et l'Aria pese 15 kg.

11.22 Lineare Funktionen mit dem TI

Lineare Funktionen zeichnen, Nullstellen und Funktionswerte berechnen

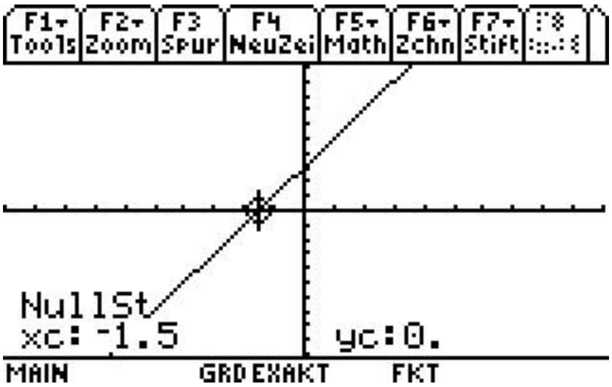
Einmalige Vorbereitungen: 3 drücken und unter Graph FUNKTION ! aktivieren.

Beispiel $y = 2x + 3$ (Graph zeichnen, Nullstelle und Funktionswert bestimmen)

Eingabe: # mit ∞□ aktivieren
y1 = ♥∧↔♠÷ eintippen
% mit ∞□ zeichnen

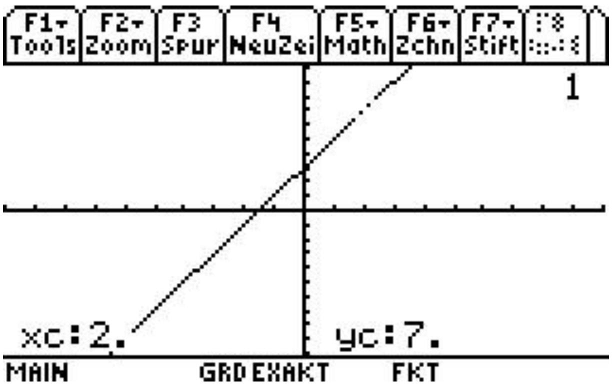
evtl. mit □ Ausschnitt vergrössern:
z. B. *ZoomBox*, *Vergröß*, *Verklein*
Tipp: Cursor schneller bewegen: 2 und Pfeiltasten ABXΔ

Nullstelle: □ und *NullSt*, danach untere Grenze und obere Grenze mit dem Cursor festlegen und *NullSt* ablesen:



Ergebnis: xc: –1.5 yc: 0

Funktionswert: □ und *FktWert*, danach kann ein x-Wert (z. B. 2) eingetippt werden und es wird dann der y-Wert berechnet und angezeigt:

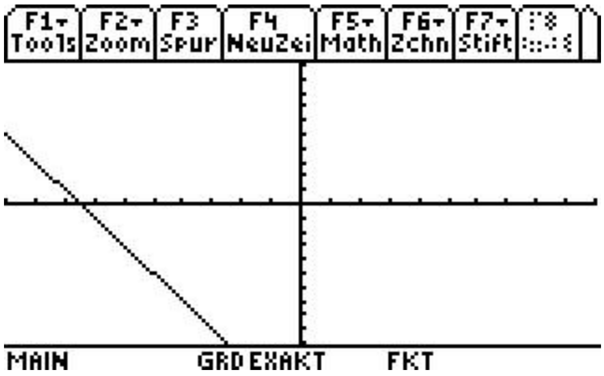


Ergebnis: xc: 2 yc: 7

Definitions- und Wertebereich einstellen

Beispiel $y = -2x - 15$ (Graph zeichnen, siehe vordere Seite)

Anzeige: mit Standardeinstellungen

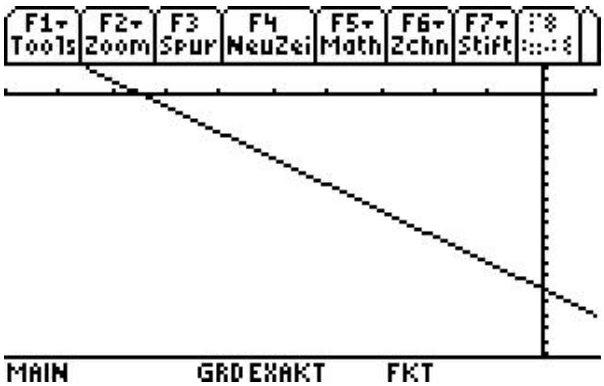


Problem: y-Achsabschnitt b ist nicht ersichtlich!

Abhilfe: ∃ mit ∞□ aktivieren und Einstellungen für den Definitionsbereich (x-Achse) und Wertebereich (y-Achse) anpassen.

xmin=–10	kleinster x-Wert
xmax=10 (1)	grösster x-Wert
xscl=1	Skalierung der x-Achse
ymin=–10 (–20)	kleinster y-Wert
ymax=10 (2)	grösster y-Wert
yscl=1	Skalierung der y-Achse
xres=2	Auflösung (je kleiner der Wert, umso besser ist die Auflösung, das Zeichnen dauert länger!)

mit geänderten Werten (rote Werte in Klammern) wird der Graph wie folgt dargestellt:



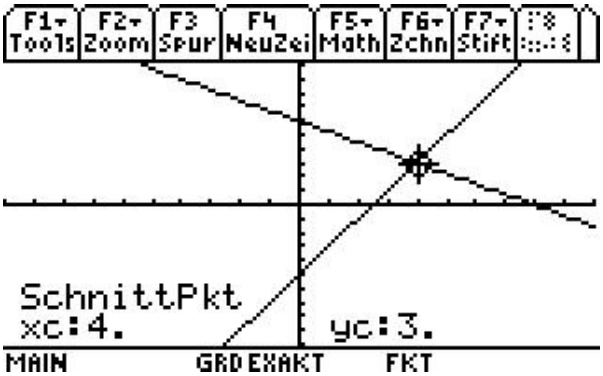
Achtung: Negative Vorzeichen müssen mit der Taste • eingegeben werden!

Schnittpunkte von Geraden berechnen

Beispiel Schnittpunkt von $y_1 = -\frac{3}{4}x + 6$ und $y_2 = 2x - 5$ berechnen

Eingabe: # mit ∞□ aktivieren
y1 = •♠εψ∧↔{÷ und
y2 = ♥∧|ζ÷ eintippen
% mit ∞□ zeichnen

Schnittpunkt: □ und *SchnittPkt*, danach 1. Kurve?, 2. Kurve? auswählen, untere und obere Grenze mit dem Cursor festlegen und den Schnittpunkt ablesen:

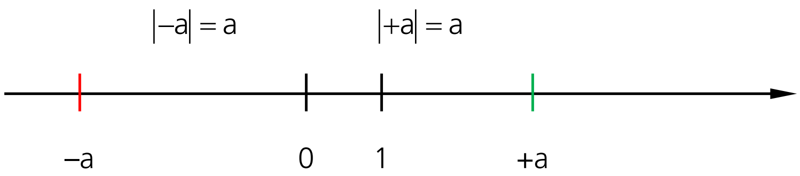


Ergebnis: xc: 4 yc: 3

11.23 Betragsfunktion

Betrag einer Zahl

Die anschauliche Darstellung einer Zahl erfolgt durch einen Punkt auf dem Zahlenstrahl. Die Zahlen –2 und +2 sind dabei gleich weit vom Nullpunkt entfernt, nämlich 2 Einheiten. Allgemein lässt sich der **Abstand vom Nullpunkt** auf dem Zahlenstrahl als **Betrag** der Zahl notieren, denn $|-2| = |+2| = 2$.



Definition Betrag einer Zahl

Der Betrag $|a|$ einer Zahl a ist der Abstand des Punktes auf dem Zahlenstrahl vom Nullpunkt:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{z. B. } |7| = 7 \\ \text{z. B. } |0| = 0 \\ \text{z. B. } |-5| = -(-5) = 5 \end{array}$$

Es gilt: $|a| \geq 0$

Das immer wieder auftretende Problem beim Verständnis dieser Definition besteht darin, dass man irgendwie assoziiert, dass –a immer negativ ist. Das ist falsch, denn –a ist nur bei positivem a negativ, bei negativem a aber positiv: –(–9) = 9.

Also nochmals: **–a ist positiv für a < 0**.

Wenn man das einsieht ist die Definition keine Hürde mehr.

Zusammenfassung

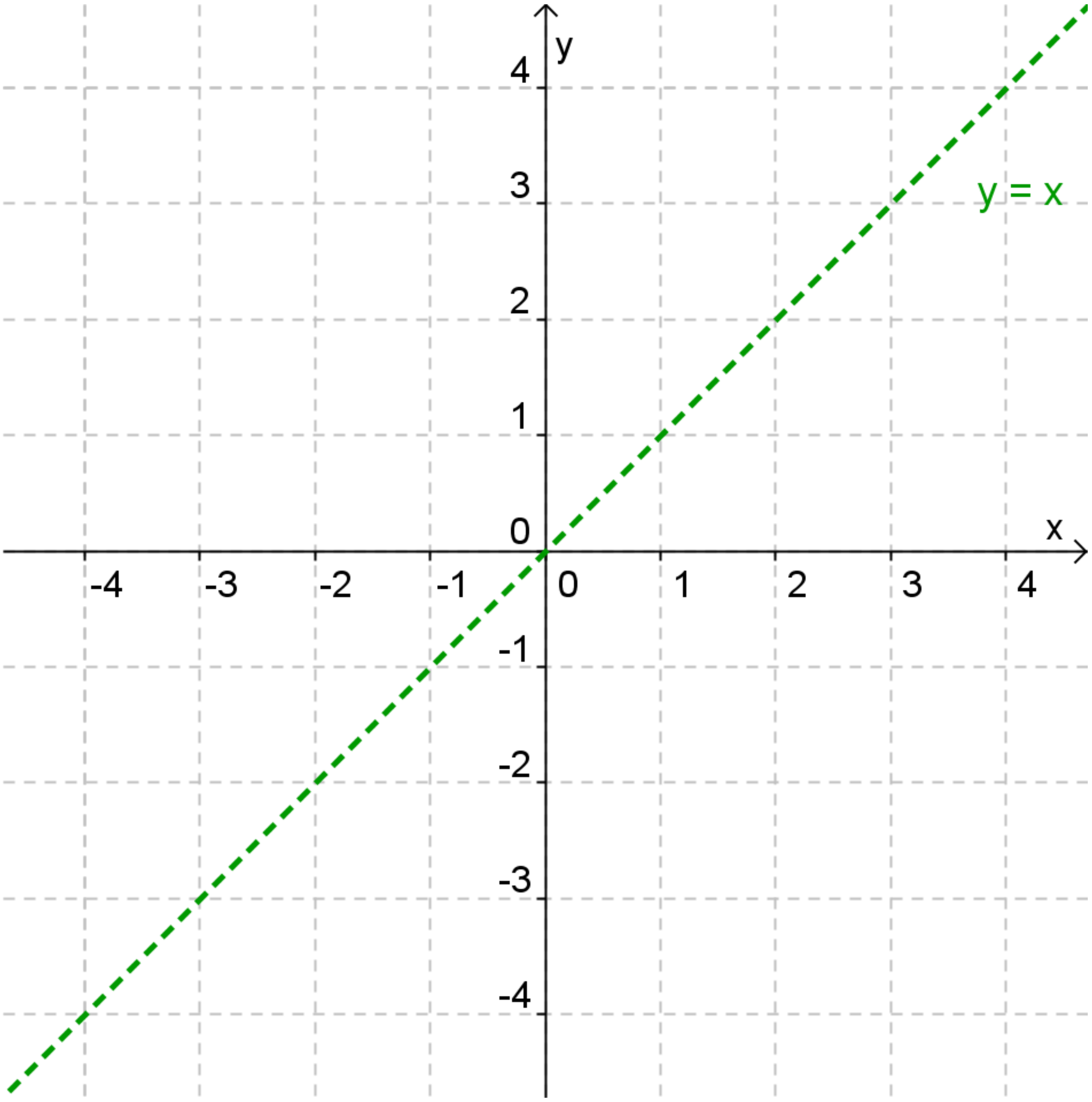
- Die beiden senkrechten Striche heissen **Betragsstriche**.
- Der Zahlenstrahl ist dann eindeutig festgelegt, wenn die Positionen **Null** und **Eins** bezeichnet sind.
- Auf dem Zahlenstrahl können sämtliche Zahlenmengen **N**, **Z**, **Q** und **R** dargestellt werden.
- Werden die Mengen **N**, **Z** und **Q** auf dem Zahlenstrahl aufgetragen, so hat der Zahlenstrahl unendlich viele Löcher.
  Erst die Menge der reellen Zahlen **R** stopft diese Löcher **lückenlos**.

Der Betrag in einer Funktionsgleichung

Wie sieht der Graph der Betragsfunktion $y = f(x) = |x|$ aus?
Dazu wird zuerst eine Wertetabelle angelegt:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y = x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y = |x|	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Nun kann der Graph der Betragsfunktion $y = f(x) = |x|$ eingezeichnet werden:

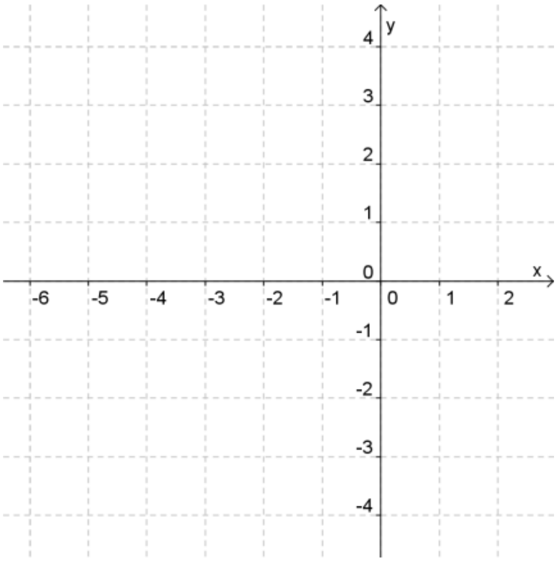


Den Graph der Betragsfunktion y = |x| erhält man aus der Geraden y = x, indem man den unterhalb der x-Achse liegenden Teil der Geraden an der x-Achse spiegelt, wie man aus dem Bild auf der Vorderseite entnehmen kann. Diese Aussage lässt sich für eine beliebige in Betragsstrichen stehende Funktion verallgemeinern:

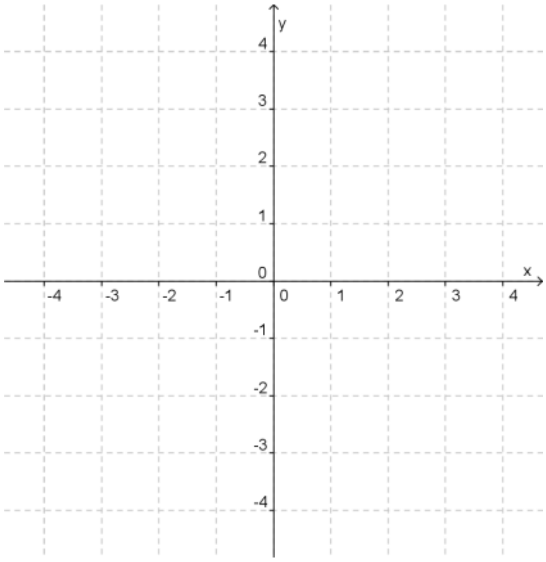
Zeichnerische Konstruktion der Funktion y = |f(x)|

Den Graph der Funktion y = |f(x)| erhält man aus dem Graph von y = f(x), indem man alle **unterhalb** der x-Achse liegenden Kurvenstücke an der x-Achse **spiegelt** und die bereits **oberhalb** der x-Achse liegenden Teile **unverändert beibehält**.

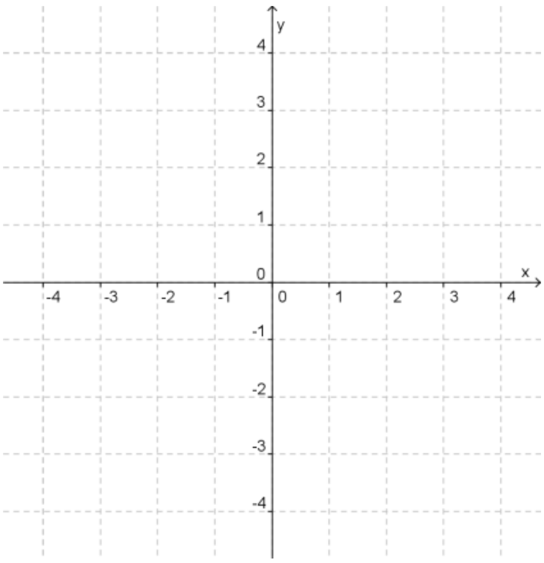
Beispiele



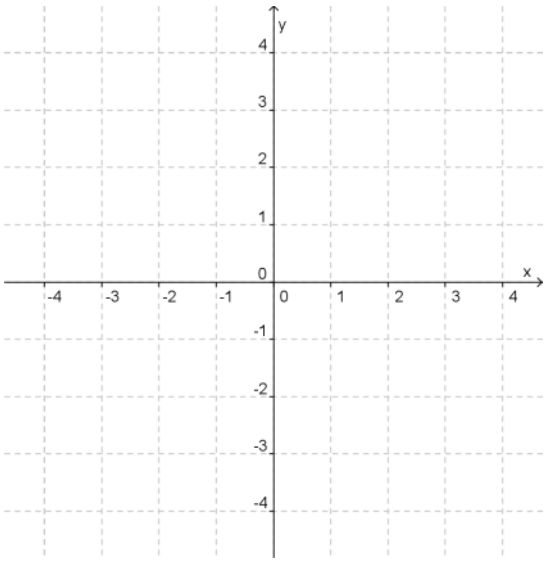
$y = |x + 2|$



$y = |x| + 2$



$y = |2x|$

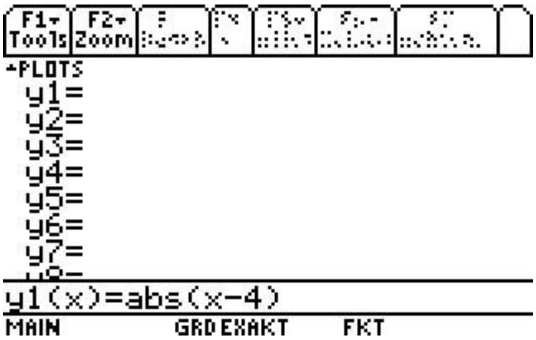


$y = -|x|$

Betragsfunktionen mit dem TI-89 zeichnen

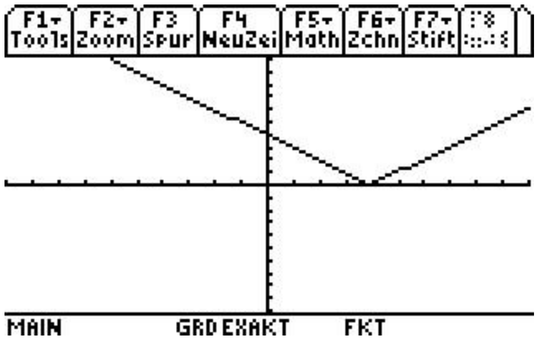
Beispiel 1 $y_1 = |x-4|$

Eingabe: # mit ∞□ aktivieren
y1 = abs(∧|ψ)÷ (siehe unten)



% mit ∞□ zeichnen

Ergebnis:

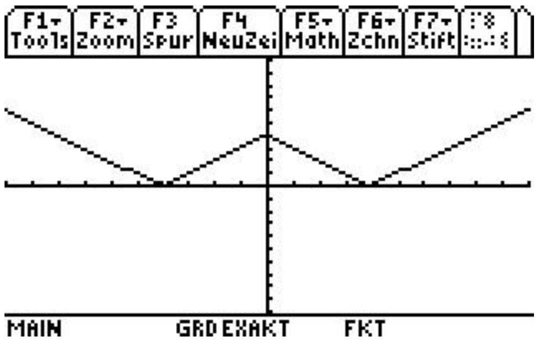


Hinweis: Die Funktion abs() ist über | erreichbar.

Beispiel 2 $y_1 = ||x|-4|$

Eingabe: # mit ∞□ aktivieren
y1 = abs(abs(∧)|ψ)÷
% mit ∞□ zeichnen

Ergebnis:



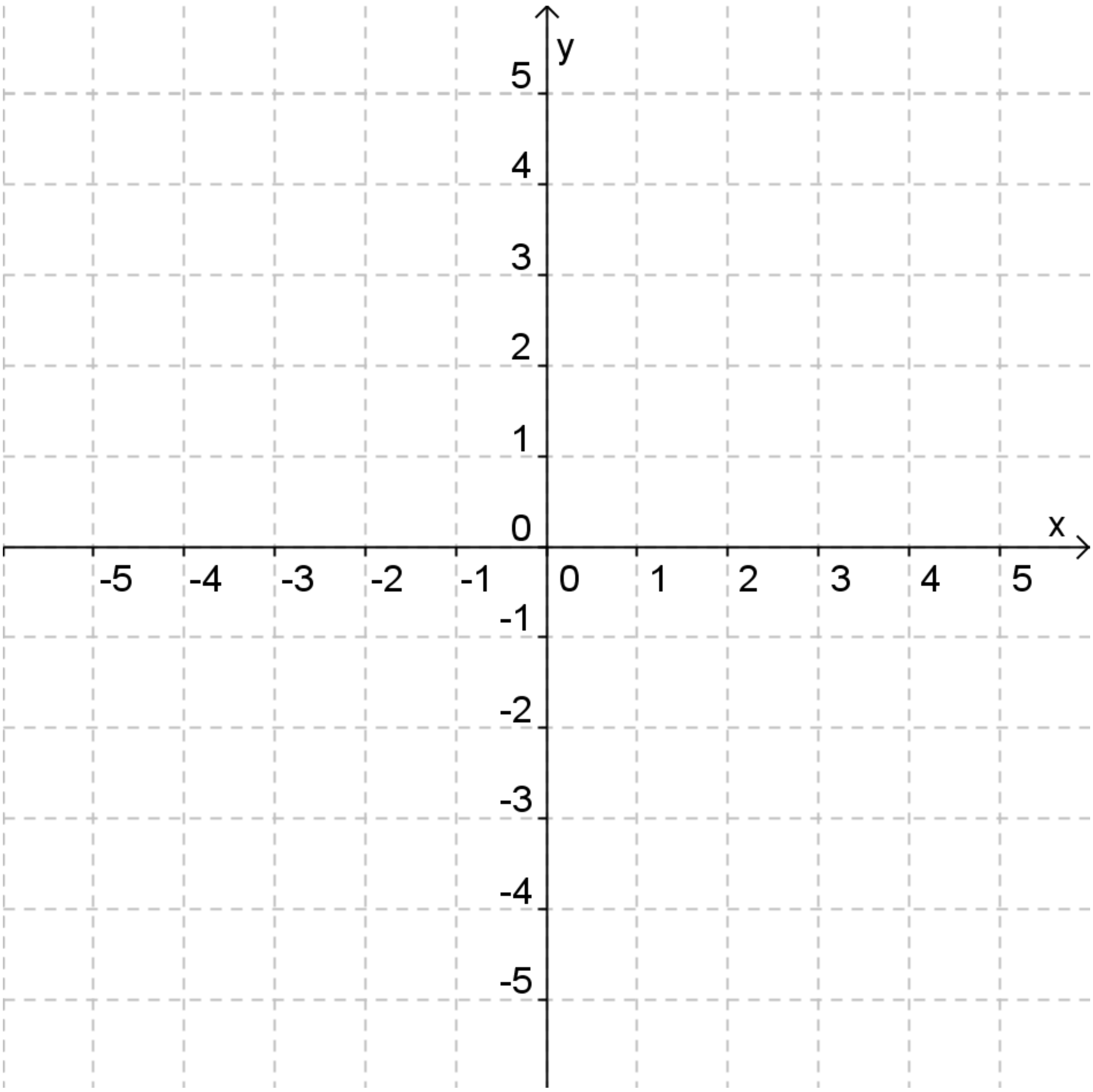
Hinweis: Die Funktion abs() ist über | erreichbar.

11.24 Übungen, Frommenwiler

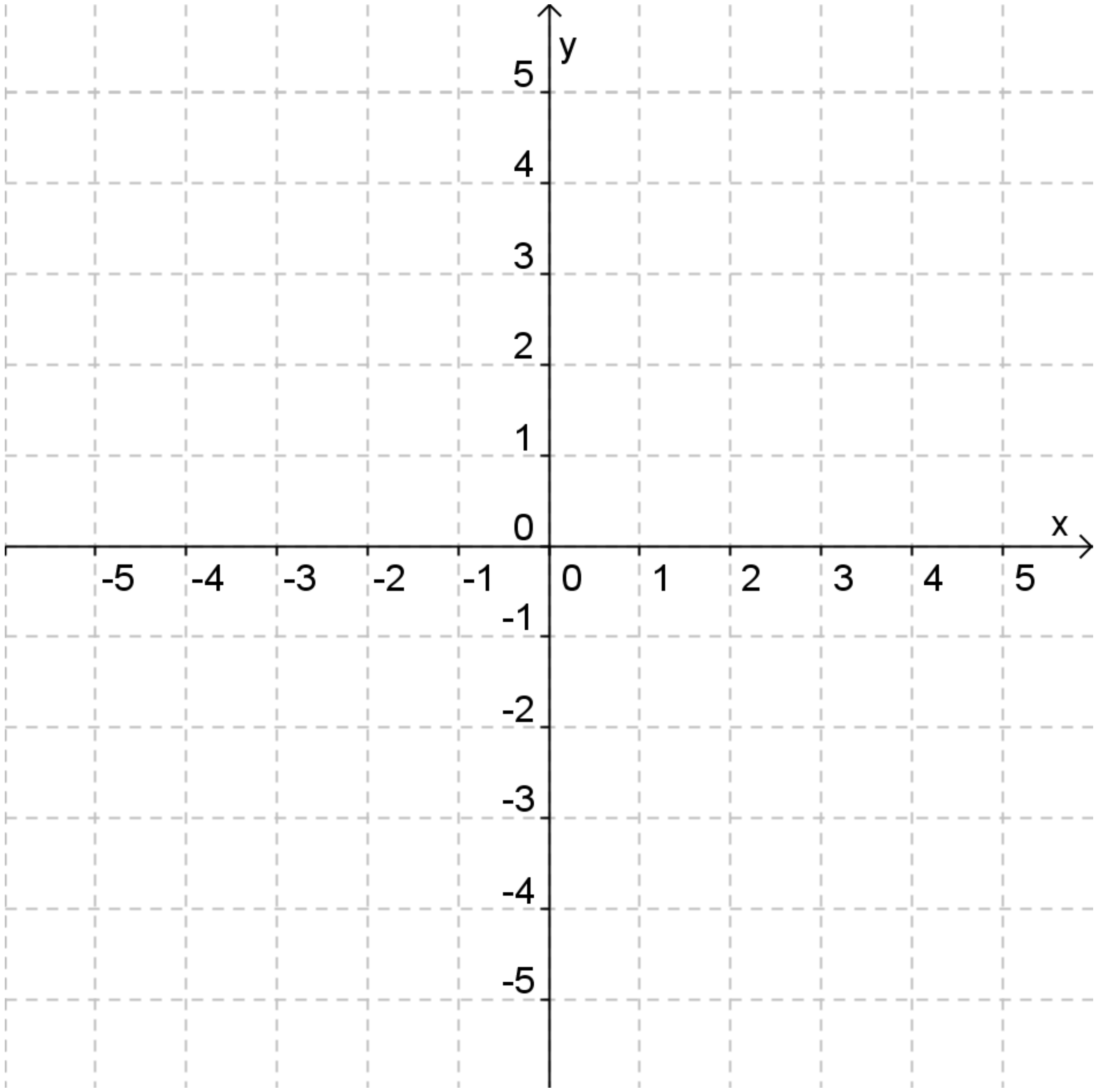
Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
640 c	180	Kontrolle mit TI üben
641 c	180	Kontrolle mit TI üben
642 (b und c)	180	Kontrolle mit TI üben
643 a	180	Kontrolle mit TI üben

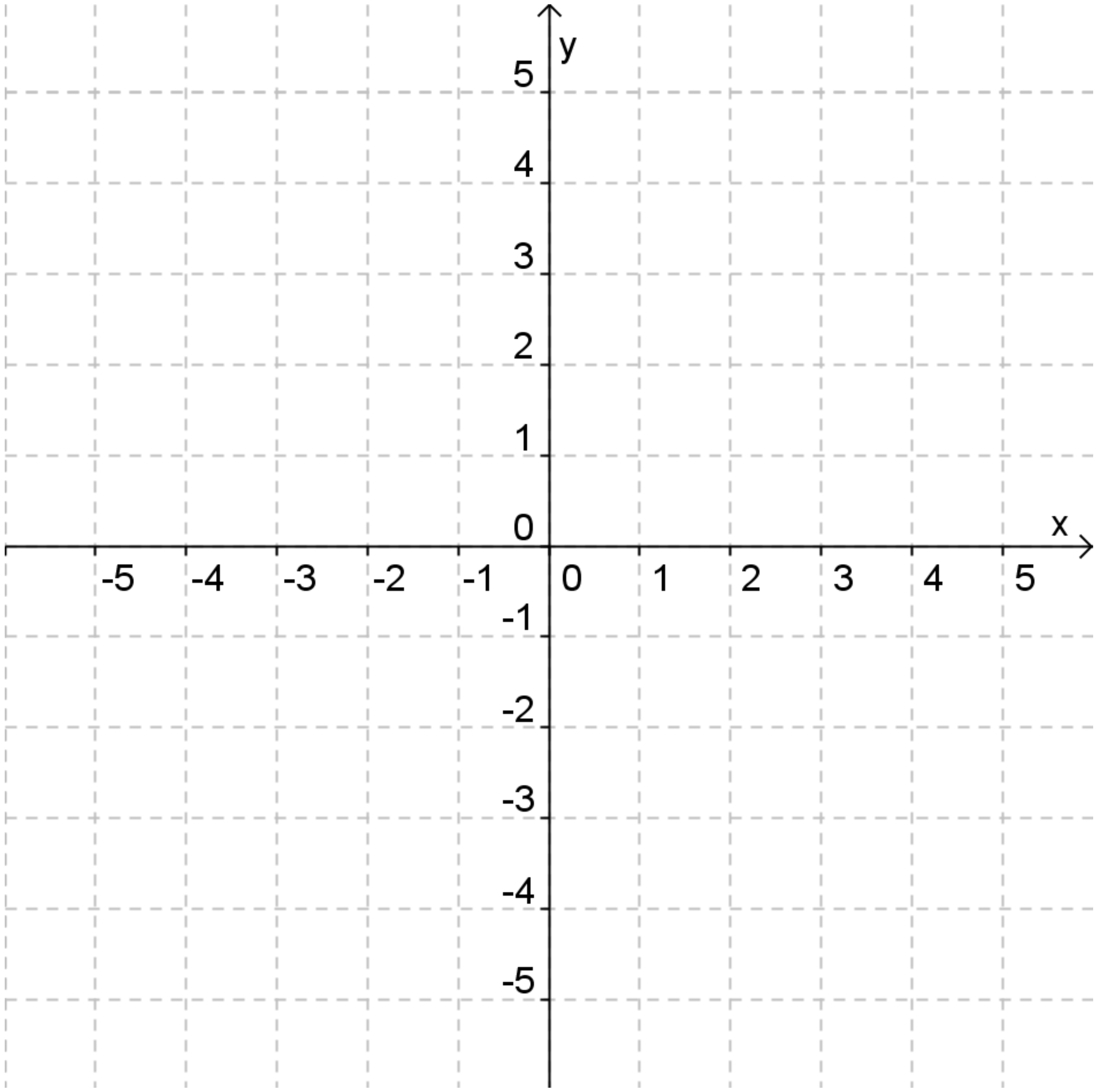
Aufgabe 640c



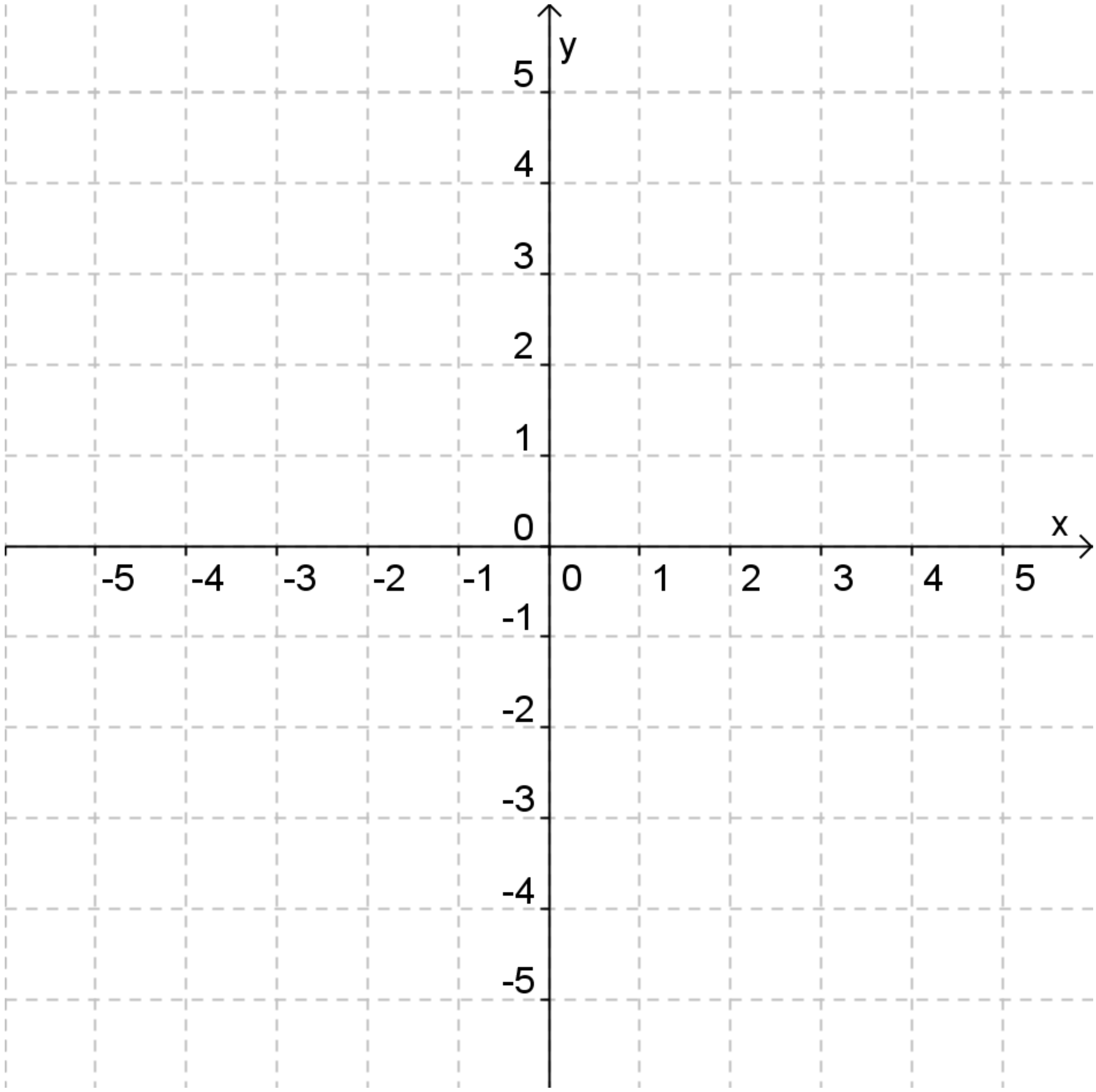
Aufgabe 641c



Aufgabe 642b



Aufgabe 642c



Aufgabe 643a