12 Lineare Gleichungssysteme

12.1 Einführung

Ein lineares Gleichungssystem besteht aus mehreren linearen Gleichungen, die verschiedene Variablen enthalten können. Wir werden uns im Wesentlichen auf Gleichungssysteme mit zwei Variablen beschränken.

Die **Lösung** eines linearen Gleichungssystems aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen ist jedes **Zahlenpaar**, das beide Gleichungen erfüllt.

Für das Lösen eines linearen Gleichungssystems gibt es drei gebräuchliche Methoden:
1. Einsetzmethode
2. Additionsmethode
3. Gleichsetzungsmethode

Die drei Lösungsmethoden werden anhand der **Kinoaufgabe** vorgestellt.

Daraus entsteht die 1. Gleichung:

(1) $2K + 2E = 20$

Daraus entsteht die 2. Gleichung:

(2) $3K + 1E = 17$

Gesucht werden die Eintrittspreise für ein Kind (K) bzw. für einen Erwachsenen (E).

Kommentar
- Wenn eine Aufgabe zwei Unbekannte aufweist (K und E im Beispiel oben), müssen zwei Gleichungen (Gleichungssystem) aufgestellt werden, damit die Unbekannten eindeutig bestimmt werden können. **Anzahl Unbekannte = Anzahl Gleichungen**
- Die Unbekannten müssen nicht immer x und y heissen.
  Im obigen Beispiel sind die Variablen K für Kind bzw. E für Erwachsene die besseren Variablennamen (eindeutige Zuordnung).
- Es gelten dieselben Rechenregeln wie bei den Gleichungen mit einer Unbekannten.

12.2 Einsetzmethode (Substitutionsmethode)

Vorgehensweise: Eine Gleichung wird nach einer Variablen aufgelöst. Der Term, den man dadurch für diese Variable erhält, wird in die andere Gleichung **eingesetzt**.
Man erhält eine lineare Gleichung mit nur einer Variablen.

Ursprüngliches Gleichungssystem:	(1) $2K + 2E = 20$ (2) $3K + 1E = 17$
Der kleinste Rechenaufwand ergibt sich für die Variable E bei der Gleichung (2). Deshalb wird die Gleichung (2) nach E aufgelöst:	(2a) $E = 17 - 3K$
Danach wird (2a) in (1) eingesetzt. Man erhält **eine Gleichung** mit nur **einer** Variablen:	(1a) $2K + 2(17 - 3K) = 20$
Die Gleichung (1a) wird nach K aufgelöst:	(1b) $2K + 34 - 6K = 20$ $-4K = -14$ (1c) $K = \frac{-14}{-4} = \underline{3.5}$
Für die Berechnung von E wird das Resultat (1c) in (2a) eingesetzt:	(2a) $E = 17 - 3 \cdot 3.5$ $E = \underline{6.5}$
Probe, durch Einsetzen der beiden Lösungen in die ursprünglichen Gleichungen:	(1) $2 \cdot 3.5 + 2 \cdot 6.5 = 20 \rightarrow$ wahre Aussage (2) $3 \cdot 3.5 + 1 \cdot 6.5 = 17 \rightarrow$ wahre Aussage
Lösungsmenge, ist ein Zahlenpaar (K;E), welches die beiden Gleichungen erfüllt:	$L = \underline{\underline{\{(3.5; 6.5)\}}}$

Kommentar
- Die konsequente **Durchnummerierung** der Gleichungen erhöht den Überblick und hilft den Lösungsweg nachzuvollziehen.
- Durch Einsetzen in die **ursprünglichen** Gleichungen kann ein Gleichungssystem kontrolliert werden.
- Die Lösung einer Gleichung mit den Lösungsvariablen x, y (oder K, E) ist ein Zahlenpaar (x-Wert, y-Wert), welches die beiden Gleichungen erfüllen.
  Die Lösungsmenge ist immer anzugeben!

12.3 Additionsmethode

Vorgehensweise: Die Gleichungen werden so umgeformt, dass bei der **Addition** der Gleichungen eine Variable entfällt. Man erhält eine lineare Gleichung mit nur einer Variablen.

Ursprüngliches Gleichungssystem:	(1) $2K + 2E = 20$ (2) $3K + 1E = 17$
Damit bei einer Addition eine Variable wegfällt, muss eine der Variablen in beiden Gleichungen entgegengesetzt gleiche Koeffizienten besitzen. Dies kann erreicht werden, indem eine oder beide Gleichungen mit geeigneten Zahlen multipliziert werden. Der kleinste Rechenaufwand ergibt sich, wenn die Variable E weggeschafft wird:	(2) $3K + 1E = 17 \quad \vert \cdot (-2)$ (2a) $-6K - 2E = -34$
Variable E beseitigen durch Addieren der beiden Gleichungen. Die linken und die rechten Seiten werden jeweils addiert:	(1) $+2K + 2E = 20$ (2a) $-6K - 2E = -34$ (3) $-4K = -14$
Die Gleichung (3) wird nach K aufgelöst:	(3a) $K = \frac{-14}{-4} = \underline{3.5}$
Für die Berechnung von E wird das Resultat (3a) in (2) eingesetzt:	(2) $3 \cdot 3.5 + E = 17$ $10.5 + E = 17$ $E = 17 - 10.5 = \underline{6.5}$
Probe, durch Einsetzen der beiden Lösungen in die ursprünglichen Gleichungen:	(1) $2 \cdot 3.5 + 2 \cdot 6.5 = 20 \rightarrow$ wahre Aussage (2) $3 \cdot 3.5 + 1 \cdot 6.5 = 17 \rightarrow$ wahre Aussage
Lösungsmenge, ist ein Zahlenpaar (K;E), welches die beiden Gleichungen erfüllt:	$L = \underline{\underline{\{(3.5; 6.5)\}}}$

Kommentar

- Die konsequente **Durchnummerierung** der Gleichungen erhöht den Überblick und hilft den Lösungsweg nachzuvollziehen.
- Durch Einsetzen in die **ursprünglichen** Gleichungen kann ein Gleichungssystem kontrolliert werden.
- Die Lösung einer Gleichung mit den Lösungsvariablen x, y (oder K, E) ist ein Zahlenpaar (x-Wert, y-Wert), welches die beiden Gleichungen erfüllen.
  Die Lösungsmenge ist immer anzugeben!

12.4 Gleichsetzungsmethode

Vorgehensweise: Beide Gleichungen werden nach derselben Variablen aufgelöst.
Danach können die Gleichungen **gleichgesetzt** werden.
Man erhält eine lineare Gleichung mit nur einer Variablen.

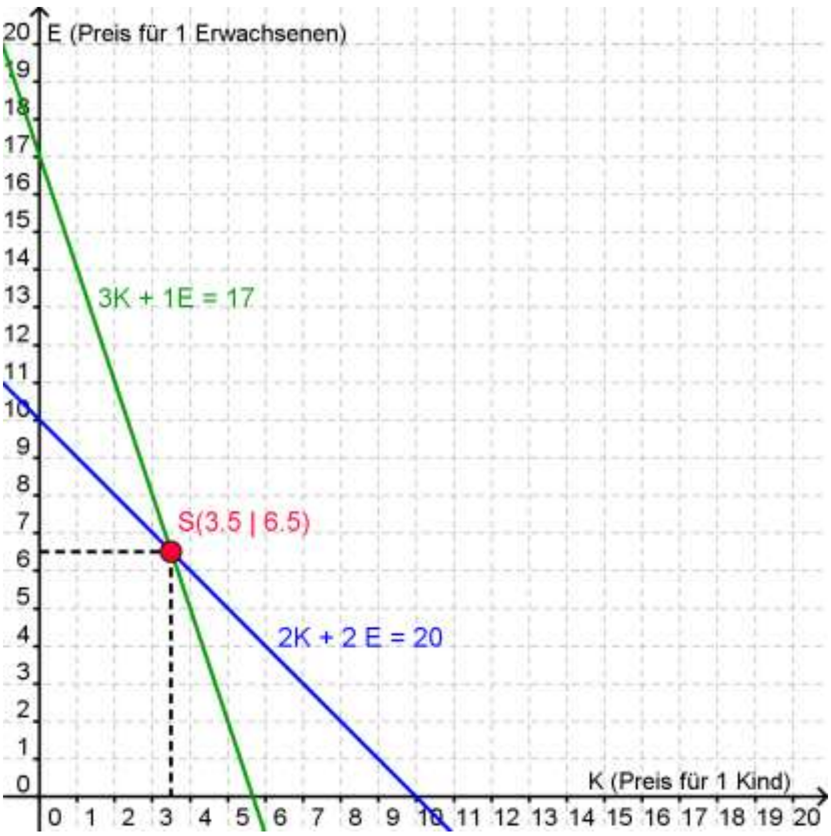
Ursprüngliches Gleichungssystem:	(1) $2K + 2E = 20$ (2) $3K + 1E = 17$
Beide Gleichungen werden nach derselben Variablen aufgelöst. Der kleinste Aufwand ergibt sich hier, wenn beide Gleichungen nach 2E aufgelöst werden. Dazu muss die zweite Gleichung mit 2 multipliziert werden:	(1a) $2E = 20 - 2K$ (2a) $E = 17 - 3K \quad \vert \cdot 2$ (2b) $2E = 34 - 6K$
Die beiden Gleichungen (1a) und (2b) werden gleichgesetzt. Man erhält eine neue Gleichung (3) mit nur einer Variablen:	(3) $20 - 2K = 34 - 6K$
Die Gleichung (3) wird nach K aufgelöst:	(3a) $4K = 14$ (3b) $K = \frac{14}{4} = \underline{3.5}$
Für die Berechnung von E wird das Resultat (3b) in (2a) eingesetzt:	(2a) $E = 17 - 3 \cdot 3.5$ $E = 17 - 10.5 = \underline{6.5}$
Probe, durch Einsetzen der beiden Lösungen in die ursprünglichen Gleichungen:	(1) $2 \cdot 3.5 + 2 \cdot 6.5 = 20 \rightarrow$ wahre Aussage (2) $3 \cdot 3.5 + 1 \cdot 6.5 = 17 \rightarrow$ wahre Aussage
Lösungsmenge, ist ein Zahlenpaar (K;E), welches die beiden Gleichungen erfüllt:	$L = \underline{\underline{\{(3.5; 6.5)\}}}$

Kommentar
- Die Koeffizienten der Variablen müssen zum Gleichsetzen nicht zwingend 1 sein. Wichtig ist, dass beide Gleichungen nach derselben Variablen aufgelöst werden und vor dem Gleichsetzen den gleichen Koeffizienten haben (im Beispiel oben wurde z. B. nach 2E aufgelöst und nicht nach 1E).
- Die konsequente **Durchnummerierung** der Gleichungen erhöht den Überblick und hilft den Lösungsweg nachzuvollziehen.
- Durch Einsetzen in die **ursprünglichen** Gleichungen kann ein Gleichungssystem kontrolliert werden.
- Die Lösung einer Gleichung mit den Lösungsvariablen x, y (oder K, E) ist ein Zahlenpaar (x-Wert, y-Wert), welches die beiden Gleichungen erfüllen.
  Die Lösungsmenge ist immer anzugeben!

12.5 Grafische Lösung der Kinoaufgabe

Definitionen: x = Preis für ein Kind in CHF, y = Preis für einen Erwachsenen in CHF

Ursprüngliches Gleichungssystem:	(1) $2K + 2E = 20$ (2) $3K + 1E = 17$
K = x und E = y einsetzen:	(1a) $2x + 2y = 20$ (2a) $3x + 1y = 17$
Beide Gleichungen nach y auflösen. Danach beide Funktionen in das Koordinatensystem einzeichnen:	(1b) $2y = -2x + 20 \quad \vert :2$ (1c) $y = -x + 10$ (2b) $y = -3x + 17$
Koordinaten des Schnittpunkts S berechnen mit der Gleichsetzungsmethode (1c) = (2b):	$\overbrace{-x+10}^{y} = \overbrace{-3x+17}^{y}$ $2x = 7 \quad \rightarrow \quad x = \underline{3.5}$ $y = -x + 10 = -3.5 + 10 = \underline{6.5}$ $\underline{\underline{S(3.5;\, 6.5)}}$



12.6 Vorgehen beim Lösen von Gleichungssystemen mit zwei Variablen

Beim Lösen von Gleichungssystemen mit zwei Variablen gehen wir wie folgt vor:

1. Bestimmen des Definitionsbereichs (Schreibweise z. B. D = **R** x **R** *oder* D_x = **R**, D_y = **R**)
2. Ausrechnen und ordnen der Terme der Gleichungen
3. **Eliminieren einer Variablen mit Hilfe einer bestimmten Methode**
4. Ausrechnen der 1. Variable
5. Einsetzen des Wertes der 1. Variable und ausrechnen des Wertes der 2. Variable
6. Kontrolle durch Einsetzen in die **ursprünglichen Gleichungen**
7. Darstellung der Lösungsmenge, L = {(x; y)} → Definitionsbereich beachten!

Achtung: Bei den nachfolgenden Beispielen muss aufgepasst werden!

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichung in der Grundmenge **R** x **R**.

Beispiel 1 (Einsetzmethode):

(1) $y = 4 - x$

(2) $4x - 3y = 8 + y$

(zuerst Terme ordnen $\rightarrow$ 2. Punkt)

Beispiel 2 (Additionsmethode):

(1) $\frac{1}{x+2y} + \frac{1}{x+2} = 1$

(2) $\frac{2}{x+2y} - \frac{2}{x+2} = 6$

(der Term mit **beiden** Variablen im Nenner muss eliminiert werden)

Beispiel 3 (Gleichsetzungsmethode):

(1) $-8x - 2y + 9 = 5y$

(1) $5y = -x + 1 + 4y$

(zuerst Terme ordnen $\rightarrow$ 2. Punkt)

Gefahr: Es bleiben immer noch zwei Unbekannte!

Fazit: Nach dem 3. Punkt unbedingt kontrollieren, ob tatsächlich nur noch 1 Unbekannte vorkommt!

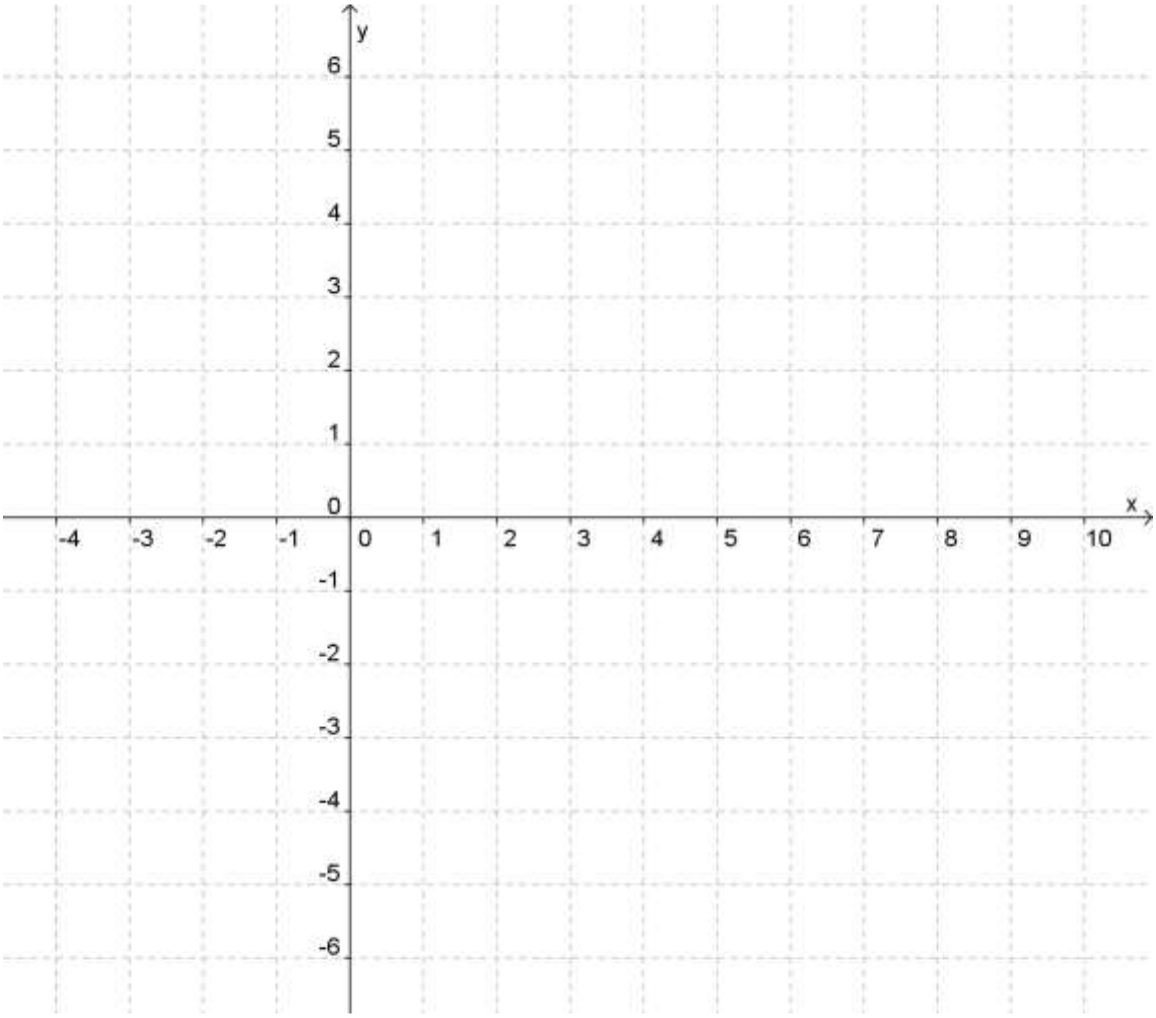
12.7 Zusammenfassung

- **Anzahl Unbekannte = Anzahl Gleichungen**
- **Ziel jeder Methode:** Eine Variable muss weggeschafft werden. Man erhält eine lineare Gleichung mit nur einer Variablen. **1 Unbekannte = 1 Gleichung → lösbar**
- Bei Textaufgaben: Anzahl Unbekannte = Anzahl Gleichungen
  Bei zwei Situationen hilft es oft, wenn Sie auch zwei Skizzen erstellen.
  Die Unbekannten müssen nicht immer x und y heissen. Sinnvolle Namen verwenden, besser H (für Hühner) und K (für Kaninchen) statt x bzw. y. Deklarieren Sie was gegeben ist bzw. was gesucht wird.
  Es lohnt sich den Grossteil des Zeitaufwandes für die Analyse zu verwenden. Der Rest ist nur noch *«Rechenknechtarbeit»*.
- Es können immer alle drei Methoden zur Lösung eines Gleichungssystems eingesetzt werden. Je nach Konstellation der Koeffizienten ist der Lösungsaufwand für die jeweilige Methode jedoch unterschiedlich gross. In der Praxis wählt man immer die Methode, für die der Aufwand minimal ist. Mit etwas Erfahrung und Übung werden Sie merken, welche Methode für die jeweilige Problemstellung am effizientesten ist!
  Zuerst überlegen, welches Lösungsverfahren eignet sich? Insbesondere wenn die **Variablen im Nenner** stehen, eignet sich das **Additionsverfahren** sehr gut.
- Werden die beiden linearen Gleichungen im Koordinatensystem dargestellt, so sind die Graphen immer zwei Geraden. Dadurch müssen drei Fälle unterscheidet werden:
  1. Die beiden **Geraden schneiden sich**. Die Koordinaten des Schnittpunktes S ergeben das Zahlenpaar (x;y) das beide Gleichungen erfüllt.
  2. Die beiden **Geraden verlaufen parallel** zueinander. Es entsteht kein Schnittpunkt. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist leer. Das System lässt sich nicht erfüllen, es ist unlösbar.
  3. Die beiden **Geraden fallen** in eine Gerade **zusammen**. Beide Gleichungen haben die gleiche Lösungsmenge, die aus unendlich vielen Zahlenpaaren (x;y) besteht. Diese unendliche Menge ist zugleich die Lösungsmenge des Systems.
- Durch Einsetzen in die **ursprünglichen** Gleichungen kann ein Gleichungssystem kontrolliert werden. **Beide** Lösungen in die **beiden ursprünglichen** Gleichungen einsetzen!

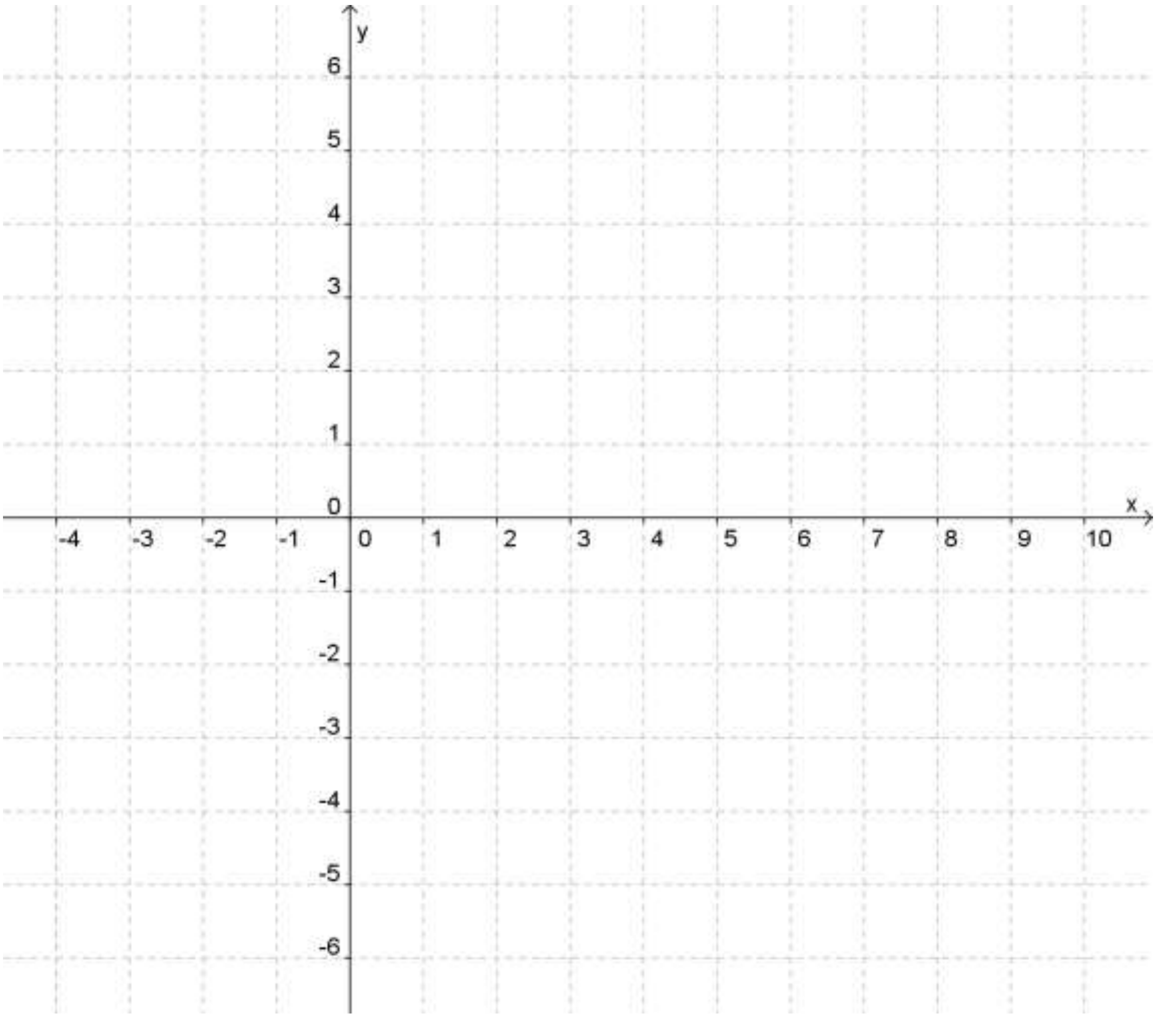
12.8 Übungen

Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungssysteme **grafisch** nach den beiden Unbekannten x und y auf. Für alle Aufgaben gilt $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

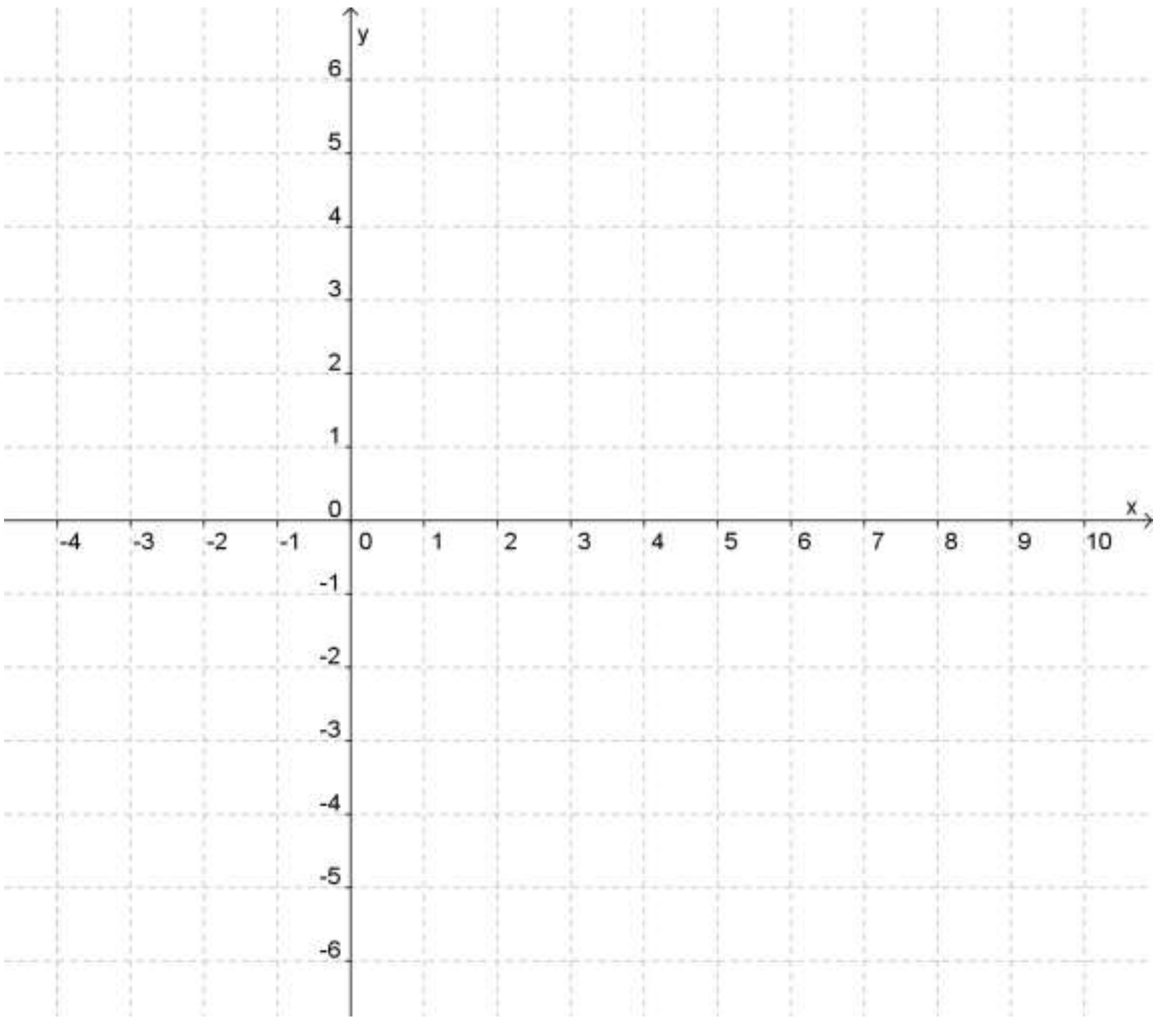
1. $$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \qquad (1) \\ x + 2y &= 4 \qquad (2) \end{aligned}$$



2.
$$-13x + 4y = 3 - 15x + 3y \qquad (1)$$
$$7x - 9y = 8 + 3x - 11y \qquad (2)$$



3.
$$3x - 12 = -4y \qquad (1)$$
$$8y - 24 + 6x = 0 \qquad (2)$$



Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungssysteme mit der Einsetzmethode!
Für alle Aufgaben gilt G = **R** x **R**.

4.
$$7x - 5y = 26 \quad (1)$$
$$2x + y = 5 \quad (2)$$

5.
$$3x + 2y = 1 \quad (1)$$
$$3y - 3x = 24 \quad (2)$$

6.
$$15x + 2y = 55 \quad (1)$$
$$2x + 3y = 21 \quad (2)$$

7.
$$\frac{9}{x+1} = \frac{12}{y+4} \quad (1)$$
$$\frac{4}{x-3} = \frac{8}{y-2} \quad (2)$$

Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungssysteme mit der Additionsmethode!
Für alle Aufgaben gilt G = **R** x **R**.

8.
$$15x + 2y = 126 \qquad (1)$$
$$3x - 4y = 12 \qquad (2)$$

9.
$$7x + 12y = 27 \qquad (1)$$
$$11x - 8y = -65 \qquad (2)$$

10.
$$1.8x + 2.5y = 9 \qquad (1)$$
$$2.4x + 3.5y = 12 \qquad (2)$$

11.
$$\frac{8}{x-1} = \frac{12}{y-2} \qquad (1)$$
$$\frac{15}{x+2} = \frac{18}{y+1} \qquad (2)$$

12.
$$\frac{2}{3x} - \frac{3}{2y} = \frac{1}{6} \qquad (1)$$
$$\frac{3}{4x} - \frac{5}{4y} = \frac{1}{3} \qquad (2)$$

13. $\frac{3}{x-1}+\frac{1}{2y+4}=1 \qquad (1)$

$\frac{1}{2x-2}-\frac{2}{y+2}=2\frac{1}{4} \qquad (2)$

Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungssysteme mit der Gleichsetzmethode!
Für alle Aufgaben gilt G = **R** x **R**.

14. $\frac{3x-2y}{3x-y}=\frac{5}{8}$ (1)

$x+y=20$ (2)

15.
$$3x + 2y = 1 \qquad (1)$$
$$3y - 3x = 24 \qquad (2)$$

16.
$$-8x - 2y + 9 = 5y \qquad (1)$$
$$5y = -x + 1 + 4y \qquad (2)$$

12.9 Lösen von Gleichungssystemen mit Hilfe einer geeigneten Substitution

Manchmal lassen sich Gleichungssysteme durch eine geeignete Substitution[1] auf einfachere Gleichungen zurückführen.

Beispiel 1 (G = R x R)

(1) $m^2 - n^2 = 120 \quad \Leftrightarrow \quad (m-n)(m+n) = 120$

(2) $m - n = 12$

Definitionsbereich:

$D = \{(m; n) | m, n \in R\}$

Substitution:

(3) $x = m - n$

(4) $y = m + n$

somit:

(3) und (4) in (1): $x \cdot y = 120$ (6)

(3) in (2): $x = \underline{12}$ (7)

(7) in (6): $12y = 120$

$y = \underline{10}$ (8)

Rücksubstitution:

$(7) = (3)$: $12 = m - n$ (9)

$(8) = (4)$: $10 = m + n$ (10)

$(9) + (10)$: $22 = 2m$

$m = \underline{11}$ (11)

(11) in (10): $n = 10 - m$

$n = 10 - 11 = \underline{-1}$

Kontrolle: $11^2 - (-1)^2 = 121 - 1 = 120$ (w)

$11 - (-1) = 11 + 1 = 12$ (w)

somit: $L = \underline{\underline{\{(m; n) | (11; -1)\}}}$

[1] Stellvertretung, Ersetzung

Beispiel 2 (Aufgabe 390c, Frommenwiler)

Lösen Sie das Gleichungssystem mit einer geeigneten Substitution. G = **R** x **R**.

$$\frac{5q}{4p+q} = 1 - \frac{3}{2p-4q} \qquad (1)$$

$$\frac{7q}{4p+q} = \frac{1}{3} - \frac{5}{2p-4q} \qquad (2)$$

Beispiel 3 (Berufsmaturitätsprüfung 1999)

Lösen Sie das Gleichungssystem mit einer geeigneten Substitution. G = **R** x **R**.

$$\frac{8}{\sqrt{x-3}} - \frac{3}{\sqrt{y+3}} = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{9}{\sqrt{y+3}} - \frac{4}{\sqrt{x-3}} = 4 \qquad (2)$$

12.10 Lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

Vorgehen

Man versucht, aus zwei Gleichungen eine Unbekannte zu eliminieren. Dann eliminiert man aus zwei anderen Gleichungen die gleiche Unbekannte. Damit erhält man ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, welches wie üblich gelöst wird. Die dritte Unbekannte wird durch Einsetzen der beiden anderen Unbekannten in einer Gleichung berechnet.

Beispiel 1 (G = **R** x **R** x **R**)

(1)	$2x-3y+3z=10$	$\|\cdot 2$	
(2)	$3x-2y-2z=4$	$\|\cdot 3$	$\|\cdot 1$
(3)	$4x-5y+z=6$		$\|\cdot 2$

Definitionsbereich:

$D=\{(x;y;z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$

z eliminieren aus (1) und (2):

(1a)	$4x-6y+6z=20$	
(2a)	$9x-6y-6z=12$	
(1a) + (2a):	$13x-12y=32$	(4)

z eliminieren aus (2) und (3):

(2b)	$3x-2y-2z=4$	
(3a)	$8x-10y+2z=12$	
(2b) + (3a):	$11x-12y=16$	(5)

reduziertes Gleichungssystem:

(4)	$13x-12y=32$	
(5) multipliziert mit (−1):	$-11x+12y=-16$	
(4) + (5):	$2x=16$	
	$x=\underline{8}$	(6)

(6) in (5):	$11\cdot 8-12y=16$	
	$88-16=12y$	
	$y=\frac{72}{12}=\underline{6}$	(7)

	z berechnen:
(6) und (7) in (1):	$2 \cdot 8 - 3 \cdot 6 + 3z = 10$
	$3z = 12$
	$z = \underline{4}$

somit: $L = \underline{\underline{\{(x;\, y;\, z) \mid (8;\, 6;\, 4)\}}}$

Kontrolle:

$2 \cdot 8 - 3 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 16 - 18 + 12 = 10 \quad (w)$

$3 \cdot 8 - 2 \cdot 6 - 2 \cdot 4 = 24 - 12 - 8 = 4 \quad (w)$

$4 \cdot 8 - 5 \cdot 6 + 4 = 32 - 30 + 4 = 6 \quad (w)$

12.11 Übungen, Frommenwiler

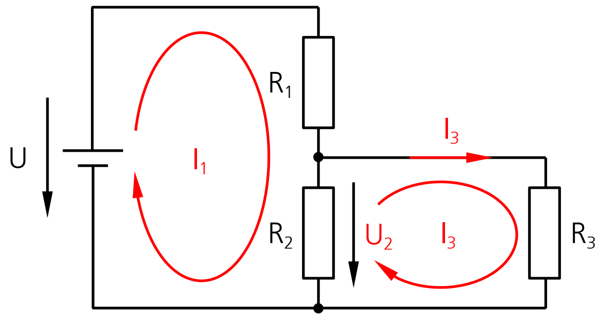
Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
382 (alle)	125	Kontrolle mit TI üben
383 (a, b und c)	125	Kontrolle mit TI üben
384 (a und c)	125	Kontrolle mit TI üben
385 (alle)	125	Kontrolle mit TI üben
386 (c und d)	126	Kontrolle mit TI üben
387	126	Kontrolle mit TI üben
388 (a)	126	Kontrolle mit TI üben
389 (alle)	126	Kontrolle mit TI üben
390 (a, b und d)	127	Kontrolle mit TI üben
391 (c und e)	127	Kontrolle mit TI üben
410 (a und b)	131	Kontrolle mit TI üben
411 (b und d)	131	Kontrolle mit TI üben

12.12 Anwendungen, die mit Gleichungssystemen gelöst werden können

Beispiel 1 (aus der Elektrotechnik)

Berechnen Sie die Spannung U_2 und den Strom I_3.

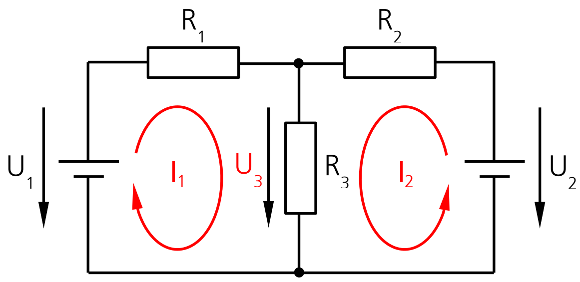


gegeben:
$U = 12$ V, $R_1 = 820\ \Omega$,
$R_2 = 180\ \Omega$ und $R_3 = 220\ \Omega$

gesucht:
$U_2 = ?$ und $I_3 = ?$

Beispiel 2 (aus der Elektrotechnik)

Berechnen Sie die Spannung U_3.

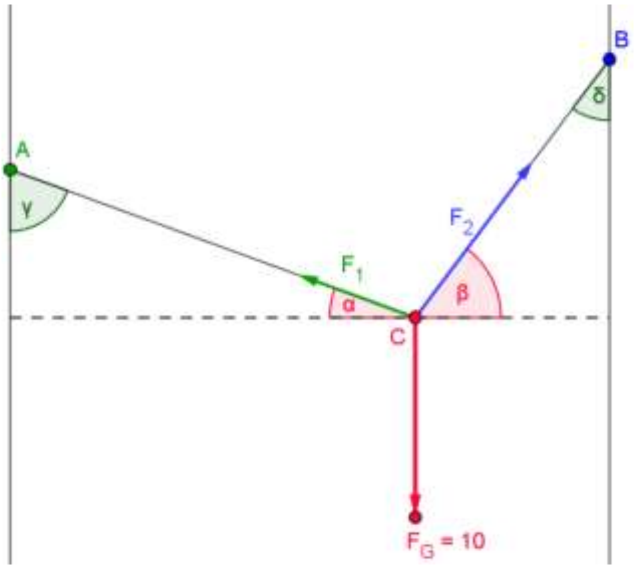


gegeben:
$U_1 = 10$ V, $U_2 = 12$ V
$R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 1.8$ kΩ und $R_3 = 2.2$ kΩ

gesucht:
$U_3 = ?$

Beispiel 3 (aus der Mechanik)

Eine Strassenlampe mit der Gewichtskraft F_G = 10 N ist an zwei Masten so montiert, dass sich die unten abgebildete Seilgeometrie ergibt.
Berechnen Sie die Beträge der Seilkräfte F_1 und F_2.



gegeben:

$F_G = 10\,\mathrm{N},\ \measuredangle\gamma = 70°,\ \measuredangle\delta = 37°$

gesucht:

$F_1 = ?$ und $F_2 = ?$

12.13 Lösen von Gleichungssystemen mit dem TI

Beispiel 1 (grafische Lösung)

$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$4x + 4 = 4y$ (1)

$5y - 10x = -5$ (2)

$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

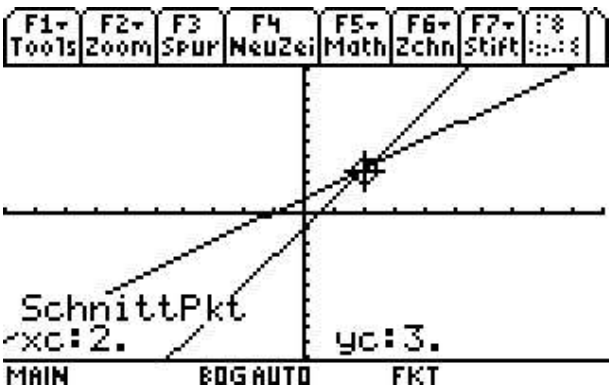
Beide Gleichungen müssen zuerst nach y umgeformt werden (explizite Form):

$y = x + 1$ (1a)

$y = 2x - 1$ (2a)

Eingabe: [Y=] mit [◆][F1] aktivieren
y1 = [X][+][1][ENTER] eintippen
y2 = [2][X][−][1][ENTER] eintippen
[GRAPH] mit [◆][F3] zeichnen

Schnittpunkt: [F5] und *SchnittPkt*, danach 1. Kurve? und 2. Kurve? mit Pfeiltasten ⊖ ⊖ auswählen und mit [ENTER] bestätigen. Danach untere und obere Grenze mit dem Cursor (◀ oder ▶) festlegen und *SchnittPkt* ablesen:



Ergebnis: xc: 2 yc: 3

$L = \underline{\underline{\{(2; 3)\}}}$

Achtung: Grafische Lösung funktioniert nur bei Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten! **Den Definitionsbereich nicht vergessen!**

Beispiel 2 (Lösung mit dem Solver)

Mit der Taste [F2] und 1:Löse() lassen sich viele Gleichungen lösen. Die Funktion Löse() zeigt aber den Lösungsweg nicht an. Es kann sogar vorkommen, dass die Funktion falsche Resultate anzeigt.

$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

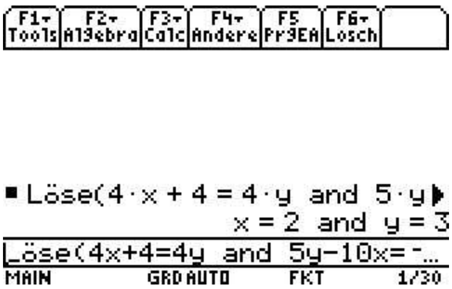
$4x + 4 = 4y$ (1)

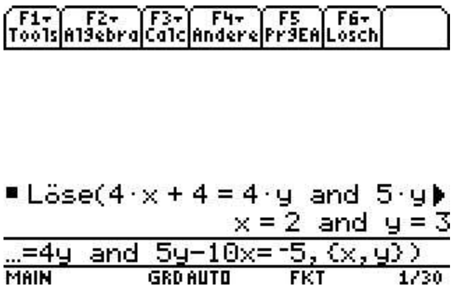
$5y - 10x = -5$ (2)

$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Eingabe: Löse [(] [4] [X] [+] [4] [=] [4] [Y] and [5] [Y] [−] [1] [0] [X] [=] [(-)] [5] [,] [{] [X] [,] [Y] [}] [)] [ENTER]

and → [CATALOG] { → [2nd] [(] } → [2nd] [)]





Ergebnis: x = 2 and y = 3

$L = \underline{\underline{\{(2; 3)\}}}$

Achtung: Auch wenn die Sprache auf Deutsch eingestellt ist, muss das «und» in englischer Sprache eingegeben werden (am einfachsten über [CATALOG]).

Beispiel 3 (Lösung mit dem Solver)

Mit der Taste [F2] und 1:Löse() lassen sich viele Gleichungen lösen. Die Funktion Löse() zeigt aber den Lösungsweg nicht an. Es kann sogar vorkommen, dass die Funktion falsche Resultate anzeigt.

$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$3a + 3c = 2b + 16$ (1)

$a + b + c = 7$ (2)

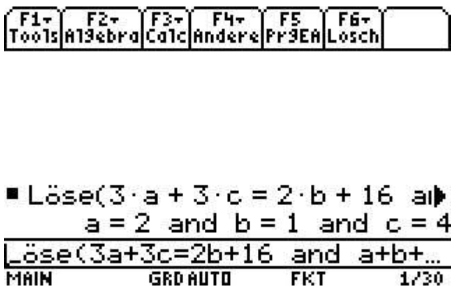
$2c - 3b = 13 - 4a$

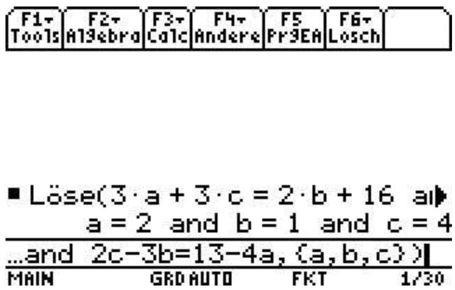
$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

alpha =

Eingabe: Löse [(] [3] a [+] [3] c [=] [2] b [+] [1] [6] and a [+] b [+] c [=] [7] and [2] c [−] [3] b [=] [1] [3] [−] [4] a [,] [{] a [,] b [,] c [}] [)] [ENTER]

CATALOG 2nd (2nd)





Ergebnis: a = 2 and b = 1 and c = 4

$$\underline{\underline{L = \{(a; b; c) | (2; 1; 4)\}}}$$

Achtung: Auch wenn die Sprache auf Deutsch eingestellt ist, muss das «und» in englischer Sprache eingegeben werden (am einfachsten über [CATALOG]).

12.14 Cramersche Regel (Determinantenmethode)

Eingescannt aus «Algebra für Berufsmaturitätsschulen» von Hans Marthaler und Benno Jakob.

Betrachten wir das allgemeine, lineare Gleichungssystem (19).

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array} \right| \tag{19}$$

Wir versuchen nun, dieses allgemeine, lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Additionsmethode zu lösen. Dabei führen wir die Parameter a_k, b_k und c_k $(k=1,2)$ mit, wie wenn wir konkrete Zahlen hätten. Dazu vervielfachen wir Gleichung (I) mit b_2 und Gleichung (II) mit $-b_1$:

$$\begin{array}{l} \text{(III)} = b_2 \cdot \text{(I)} \\ \text{(IV)} = -b_1 \cdot \text{(II)} \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} a_1b_2x & + & b_1b_2y & = & b_2c_1 \\ -a_2b_1x & - & b_1b_2y & = & -b_1c_2 \end{array} \right| \tag{20}$$

Da die Unbekannte y in beiden Gleichungen nun bis auf das Vorzeichen gleiche Koeffizienten hat, können diese Gleichungen so addiert werden, dass die y-Terme verschwinden.

$$\text{(V)} = \text{(III)} + \text{(IV)} \quad a_1b_2x - a_2b_1x = b_2c_1 - b_1c_2 \tag{21}$$

Dies ergibt für die Unbekannte x :

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{22}$$

Sobald die Koeffizienten a_k und b_k sowie die Konstanten c_k bekannt sind, kann also x durch Einsetzen in Gleichung (22) bestimmt werden.

Die Unbekannte y bestimmen wir analog:

$$\begin{array}{l} \text{(VI)} = -a_2 \cdot \text{(I)} \\ \text{(VII)} = a_1 \cdot \text{(II)} \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} -a_1a_2x & - & a_2b_1y & = & -a_2c_1 \\ a_1a_2x & + & a_1b_2y & = & a_1c_2 \end{array} \right| \tag{23}$$

$$\text{(VIII)} = \text{(VI)} + \text{(VII)} \quad -a_2b_1y + a_1b_2y = -a_2c_1 + a_1c_2 \tag{24}$$

Dies ergibt für die Unbekannte y :

$$y = \frac{-a_2c_1 + a_1c_2}{-a_2b_1 + a_1b_2} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{25}$$

Lösung des linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten

Das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array} \right| \tag{26}$$

mit den Unbekannten x und y, den Koeffizienten a_1, b_1, a_2 und b_2 und den Konstanten c_1 und c_2 hat die Lösung:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{und} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{27}$$

In der Mathematik ist es üblich, die vier ***Koeffizienten*** in einer quadratischen Anordnung zu notieren:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Man zeichnet noch eine Klammer darum und spricht von einer Matrix – der sogenannten ***Koeffizientenmatrix***. Die Koeffizientenmatrix (28) ist eine 2×2-Matrix, da die Matrix 2 Zeilen und 2 Spalten hat.

Quadratischen Matrizen, also Matrizen mit gleich vielen Zeilen wie Spalten, kann eine Zahl, die ***Determinante***, zugeordnet werden. Nach der ***Regel von Sarrus*** kann die Determinante von 2×2-Matrizen berechnet werden, indem vom Produkt der ***Hauptdiagonalelemente*** $a_1 \cdot b_2$ das Produkt der ***Nebendiagonalelemente*** $a_2 \cdot b_1$ subtrahiert wird:

Definition **Regel von Sarrus**

Die *zweireihige Matrix*

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \tag{29}$$

hat die *Determinante*:

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \tag{30}$$

Kommentar

- Die Determinante ist eine Zahl, die jeder quadratischen Matrix ***eindeutig*** zugeordnet ist.
- Bei zweireihigen Matrizen (= 2×2-Matrizen) kann die Determinante mit der Regel von Sarrus einfach berechnet werden.
- Vergleicht man die Lösungen des linearen Gleichungssystems (27) mit der Definition (30), so entspricht die Determinante der Koeffizientenmatrix dem Nenner der Lösungen für die Unbekannten x und y.

■ **Beispiele**

(1) Berechnen Sie die Determinante von $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$D = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) = 6 + 5 = 11$$

(2) Berechnen Sie die Determinante von $\begin{pmatrix} 3a & -b^2 \\ 3 & a-2b \end{pmatrix}$.

$$D = \det \begin{pmatrix} 3a & -b^2 \\ 3 & a-2b \end{pmatrix} = 3a(a-2b) - 3(-b^2) = 3a^2 - 6ab + 3b^2 = 3(a-b)^2$$

■

Rechner

(1) `det([3,-1;5,2])` → `11`

(2) `det([3*a,-b^2;3,a-2*b])` → `3*(a^2-2*a*b+b^2)`

Übungen 3

Rein formal können in der Koeffizientenmatrix die Elemente der ersten Spalte a_1 und a_2 durch die Konstanten c_1 und c_2 ersetzt werden. Die Determinante dieser neuen Matrix ist:

$$D_x = \det\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1 \tag{31}$$

Die Determinante D_x heisst erste ***Nebendeterminante*** des Gleichungssystems. Analog dazu kann die zweite Nebendeterminante D_y berechnet werden:

$$D_y = \det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \tag{32}$$

Definition **Hauptdeterminante und Nebendeterminanten**

Jedem linearen Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} a_1 x & + & b_1 y & = & c_1 \\ a_2 x & + & b_2 y & = & c_2 \end{vmatrix} \tag{33}$$

werden *eindeutig* die *Hauptdeterminante D*

$$D = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \doteq a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \tag{34}$$

und die beiden *Nebendeterminanten* D_x und D_y

$$D_x = \det\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1 \tag{35}$$

$$D_y = \det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \tag{36}$$

zugeordnet.

Vergleichen wir nun noch die Definitionen der Hauptdeterminanten (34) und der Nebendeterminanten (35) und (36) mit der Lösung (27) des linearen Gleichungssystems (26), so sind die Lösungen gegeben durch den Quotienten der zugehörigen Nebendeterminante über die Hauptdeterminante:

Cramersche Regel

Das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_1 x & + & b_1 y & = & c_1 \\ a_2 x & + & b_2 y & = & c_2 \end{array} \right| \tag{37}$$

hat die Lösung:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}} = \frac{c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} = \frac{D_x}{D} \tag{38}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}} = \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} = \frac{D_y}{D} \tag{39}$$

Die Lösungsmenge lautet:

$$\mathrm{L} = \{(x;\, y)\} = \left\{ \left(\frac{D_x}{D};\, \frac{D_y}{D} \right) \right\} \tag{40}$$

Kommentar

- Mit der Cramerschen Regel lässt sich die Lösung eines linearen Gleichungssystems sehr kompakt und einfach schreiben: $x = \frac{D_x}{D}$ und $y = \frac{D_y}{D}$. Dabei muss man nur wissen, wie die Hauptdeterminante und die beiden Nebendeterminanten berechnet werden.
- Die Cramersche Regel eignet sich hervorragend als Grundlage für ein Computerprogramm. Spezielle Programme und einige wissenschaftliche Taschenrechner haben Funktionen zur Berechnung von Determinanten integriert.
- Wir können bereits hier feststellen, dass immer dann keine Probleme zu erwarten sind, wenn die Hauptdeterminante von Null verschieden ist.
  Begründung: Die Division durch Null ist nicht definiert.
  Wir werden die Konsequenzen von $D = 0$ im nächsten Abschnitt diskutieren.

■ **Beispiel**

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 7x & - & 3y & = & 11 \\ 5x & + & 2y & = & 13 \end{array} \right|$$

Lösung:

Hauptdeterminante: $D = \det\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 14-(-15) = 29$

Nebendeterminanten: $D_x = \det\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} = 22-(-39) = 61$

$D_y = \det\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} = 91-55 = 36$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{61}{29}$ und $y = \frac{D_y}{D} = \frac{36}{29}$

Lösungsmenge: $\mathrm{L} = \left\{ \left(\frac{61}{29}; \frac{36}{29} \right) \right\}$

■

◆ **Übungen 4**

Blättern wir nochmals etwas zurück und betrachten die Gleichungen (21) und (24).

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \quad \Rightarrow \quad D \cdot x = D_x \tag{41}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 \quad \Rightarrow \quad D \cdot y = D_y \tag{42}$$

Um die Lösung $(x; y)$ zu finden, müssen die Gleichungen (41) und (42) durch die Hauptdeterminante D dividiert werden. Dies ist dann und nur dann zulässig, wenn die Hauptdeterminante von Null verschieden ist: $D \neq 0$.

Was ist aber, wenn die ***Hauptdeterminante Null*** ist: $D = 0$?
Dann müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: Ist ***mindestens eine der Nebendeterminanten von Null verschieden***, dann finden wir bei mindestens einer der Unbekannten keine reelle Zahl, die diese Gleichung (41) oder Gleichung (42) erfüllen kann. Denn Null mal die gesuchte Unbekannte kann nie eine von Null verschiedene Zahl ergeben. Dann ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems die ***leere Menge***. Wir schreiben dann: $\mathrm{L} = \{\}$.

Fall 2: Sind ***alle Nebendeterminanten Null***, dann können wir für x oder y sämtliche reellen Zahlen einsetzen. Das Gleichungssystem ist dann ***allgemein gültig*** und hat unendlich viele Lösungen.

Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems

Wir unterscheiden die 3 Fälle:

Fall 0: Hauptdeterminante $D \neq 0$:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{und} \quad y = \frac{D_y}{D} \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{L} = \{(x; y)\} \tag{43}$$

Fall 1: Hauptdeterminante $D = 0$ und *mindestens eine* der Nebendeterminanten $D_k \neq 0$:

$$x \in \{\} \quad \text{und} \quad y \in \{\} \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{L} = \{\} \tag{44}$$

Fall 2: Hauptdeterminante $D = 0$ und *alle* Nebendeterminanten $D_k = 0$:

$$x = x(\lambda) \quad \text{und} \quad y = y(\lambda) \quad \text{mit } \lambda \in \mathrm{R}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{L} = \{(x(\lambda); y(\lambda))\} \tag{45}$$

Kommentar

- Fall 0 ist die Regel. Wenn Sie die Koeffizienten und die Konstanten des Gleichungssystems mit Zufallszahlen festlegen, dann ist Fall 0 auch der mit Abstand wahrscheinlichste. Sie müssen aber beim Lösen eines linearen Gleichungssystems immer an die Fälle 1 und 2 denken.
- Bei Fall 2 sind die Lösungen abhängig von einem Parameter (beliebige reelle Zahl). Betrachten Sie dazu Beispiel (2). Die Cramersche Regel sagt im Fall 2 nur, dass es unendlich viele Lösungen hat, aber nicht welche.
- Bei Fall 1 sind die Koeffizienten der Gleichungen ***linear abhängig***.
  Bei Fall 2 sind die Koeffizienten der Gleichungen inklusive der Konstanten linear abhängig.

■ **Beispiele**

(1) Lösen Sie das Gleichungssystem $\left| \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 3 \\ -2x & + & 2y & = & 1 \end{array} \right|$ ...

(a) mit der Einsetzmethode
(b) mit der Cramerschen Regel

Lösung:

(a) (I) nach x auflösen: $x = y + 3$

einsetzen in (II): $-2 \cdot (y+3) + 2y = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot y = 7$

Es gibt keine reelle Zahl, die mit Null multipliziert 7 ergibt.

$\Rightarrow \quad \mathrm{L} = \{\}$

(b) $D = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$

$D_x = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 6 - (-1) = 7$ und $D_y = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - (-6) = 7$

Fall 1: Hauptdeterminante $D = 0$ und mindestens eine der Nebendeterminanten $D_k \neq 0$.

$\Rightarrow \quad \mathrm{L} = \{\}$

(2) Lösen Sie das Gleichungssystem $\left| \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & -3 \\ -2x & + & 2y & = & 6 \end{array} \right| \ldots$

(a) mit der Additionsmethode
(b) mit der Cramerschen Regel

Lösung:

(a)
$$\begin{array}{lrcrcr} 2\cdot(\mathrm{I}) & 2x & - & 2y & = & -6 \\ (\mathrm{II}) & -2x & + & 2y & = & 6 \\ (\mathrm{III}) = 2\cdot(\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) & 0 & + & 0 & = & 0 \end{array}$$

Die Gleichungen (I) und (II) tragen die gleiche Information. Gleichung (II) bringt also nichts Neues hinzu. Somit dürfen wir für y irgendeine beliebige reelle Zahl wählen:

$y \in \mathrm{R}$ beliebig, aber fest.

$\Rightarrow \quad x = y - 3$

Die Lösung lautet somit: $x = y - 3$ und $y \in \mathrm{R}$
oder $\mathrm{L} = \{(x;\, y) \mid y \in \mathrm{R} \wedge x = y - 3\}$.

(b) $D = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$

$D_x = \det\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = -6 - (-6) = 0$ und $D_y = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = 6 - 6 = 0$

Fall 2: Hauptdeterminante $D = 0$ und alle Nebendeterminanten $D_k = 0$.

$\Rightarrow$ Allgemein gültiges Gleichungssystem.

■

Kommentar

- Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten können auch grafisch gelöst werden. Dies wird im Zusammenhang mit linearen Funktionen in Kapitel IV-1 besprochen.

☐ **Rechner**

(1) `solve(x-y=3 and -2*x+2*y=1,{x,y})` → `false`
(2) `solve(x-y=-3 and -2*x+2*y=6,{x,y})` → `x=@1-3 and y=@1`

◆ **Übungen 5**

12.15 Übungen (siehe Übungen 12.8)

Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungssysteme mit der Determinantenmethode.
Für alle Beispiele gilt G = **R** x **R.**

1. $2x + y = 5$ (1)
   $x + 2y = 4$ (2)

2. $2x + y = 3$ (1)
   $4x + 2y = 8$ (2)

3.
$$3x - 12 = -4y \qquad (1)$$
$$8y - 24 + 6x = 0 \qquad (2)$$

4.
$$1.3x + 2.4y = -3.72 \qquad (1)$$
$$0.8x + 1.8y = -3 \qquad (2)$$

12.16 Cramersche Regel für Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

Eingescannt aus «Algebra für Berufsmaturitätsschulen» von Hans Marthaler und Benno Jakob.

Auch die Cramersche Regel ist bei linearen Gleichungssystemen mit *drei Gleichungen* und *drei Unbekannten* analog derjenigen Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten. Dabei braucht es drei Gleichungen, denn sonst ist die Koeffizientenmatrix nicht quadratisch und damit die Determinante nicht definiert.

Definition **Regel von Sarrus**

Die *dreireihige Matrix*

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad (59)$$

hat die *Determinante*:

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \qquad (60)$$

$$\doteq a_1\,b_2\,c_3 + b_1\,c_2\,a_3 + c_1\,a_2\,b_3 - a_3\,b_2\,c_1 - b_3\,c_2\,a_1 - c_3\,a_2\,b_1$$

Kommentar

- Zur besseren Übersicht werden wie in Gleichung (60) bei 3-reihigen Matrizen oft die beiden ersten Spalten rechts hinter der Matrix notiert. Die Haupt- und Nebendiagonalen lassen sich so besser ablesen.
- $a_1\,b_2\,c_3 + b_1\,c_2\,a_3 + c_1\,a_2\,b_3$ ist die Summe der Produkte der *Hauptdiagonalen*;
  $-a_3\,b_2\,c_1 + b_3\,c_2\,a_1 - c_3\,a_2\,b_1$ ist die Summe der Produkte der *Nebendiagonalen*.
  Dies ist analog zu der Berechnung der Determinante von zweireihigen Matrizen.
- Die *Regel von Sarrus gilt nur für zwei- und dreireihige Matrizen*. Für die Berechnung von Determinanten grösserer quadratischer Matrizen benutzt man den Entwicklungssatz von Laplace. Wir benutzen im Bedarfsfall den Taschenrechner oder Excel.

■ **Beispiele**

(1) Berechnen Sie die Determinante $D = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$= 1\cdot(-3)\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 0\cdot(-1) - 2\cdot(-3)\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 2$$

$$= -9 + 4 + 0 - 6 - (-1) - 0$$

$$D = -10$$

(2) Für welche Werte von λ hat die Determinante von $\begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$ den Wert Null?

$$D = \det \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 2\lambda & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{matrix}$$

$$= 2\lambda \cdot 0 \cdot \lambda + 1 \cdot 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 \cdot (-2) - 5 \cdot 0 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 \cdot 2\lambda - \lambda \cdot 3 \cdot 1$$

$$= 0 + 5 + 6 - 0 - (-4\lambda) - 3\lambda$$

$$D = \lambda + 11$$

Setzt man für $\lambda = -11$ ein, so verschwindet die Determinante.

■

Sind die Haupt- und Nebendeterminanten des linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten bestimmt, dann hat die Cramersche Regel die gleiche Form wie bei den linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten.

Cramersche Regel

Das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{matrix} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{matrix} \right| \tag{61}$$

hat die Hauptdeterminante

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{62}$$

und die Nebendeterminanten

$$D_x = \det \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}; \; D_y = \det \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{pmatrix}; \; D_z = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Das Lösungstripel lautet dann:

$$x = \frac{D_x}{D}; \quad y = \frac{D_y}{D} \quad \text{und} \quad z = \frac{D_z}{D} \qquad \mathrm{L} = \left\{ \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}; \frac{D_z}{D} \right) \right\} \tag{64}$$

Auch beim Lösungsverhalten lässt sich für lineare Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten analog zu Gleichungssystemen mit 2 Unbekannten folgern:

Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems mit drei Unbekannten

Fall 0: Hauptdeterminante $D \neq 0$:

$$x = \frac{D_x}{D}; \quad y = \frac{D_y}{D} \quad \text{und} \quad z = \frac{D_z}{D} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L} = \{(x; y; z)\} \tag{65}$$

Fall 1: Hauptdeterminante $D = 0$ und mindestens eine der Nebendeterminanten $D_k \neq 0$:

$$x \in \{\}; \quad y \in \{\} \quad \text{und} \quad z \in \{\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L} = \{\} \tag{66}$$

Fall 2: Hauptdeterminante $D = 0$ und alle Nebendeterminanten $D_k = 0$:

$$x = x(z); \quad y = y(z) \quad \text{und} \quad z \in \mathrm{R}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{L} = \{(x; y; z) \mid z \in \mathrm{R} \wedge x = x(z) \wedge y = y(z)\} \text{ oder:} \\ \mathrm{L} = \{(x; y; z) \mid y \in \mathrm{R} \wedge z \in \mathrm{R} \wedge x = x(y; z)\} \end{array} \tag{67}$$

■ **Beispiel**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel.

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 10y & - & 12z & = & -12 \\ 6x & - & 5y & + & 4z & = & 7 \\ 12x & + & 20y & + & 8z & = & 2 \end{array} \right|$$

Lösung:

$$D = \det\begin{pmatrix} 3 & 10 & -12 \\ 6 & -5 & 4 \\ 12 & 20 & 8 \end{pmatrix} = -2520; \qquad D_x = \det\begin{pmatrix} -12 & 10 & -12 \\ 7 & -5 & 4 \\ 2 & 20 & 8 \end{pmatrix} = -840$$

$$D_y = \det\begin{pmatrix} 3 & -12 & -12 \\ 6 & 7 & 4 \\ 12 & 2 & 8 \end{pmatrix} = 1008; \qquad D_z = \det\begin{pmatrix} 3 & 10 & -12 \\ 6 & -5 & 7 \\ 12 & 20 & 2 \end{pmatrix} = -1890$$

Das Lösungstripel lautet:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-840}{-2520} = \frac{1}{3}; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1008}{-2520} = -\frac{2}{5} \quad \text{und} \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1890}{-2520} = \frac{3}{4}$$

■

□ **Rechner**

```
det([3,10,-12;6,-5,4;12,20,8])  →  -2520
```

12.17 Übungen

Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungssysteme mit der Determinantenmethode.
Für alle Beispiele gilt die Lösungsvariablen sind Element von **R**.

1. $$\begin{aligned} x - y + z &= 2 && (1)\\ 3x - 4y + 5z &= 0 && (2)\\ 5x - 2y - 6z &= -3 && (3) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 2x - 4y + 3z &= 1 \qquad (1)\\ -x + y - 2z &= 3 \qquad (2)\\ x - y - 2z &= 5 \qquad (3) \end{aligned}$$

3. Aufgabe 411c, Frommenwiler

$$3a + 3c = 2b + 16 \quad (1)$$
$$a + b + c = 7 \quad (2)$$
$$2c - 3b = 13 - 4a \quad (3)$$

4.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z - 4u &= 18 && (1) \\ 2x + 3y - 4z + 5u &= 10 && (2) \\ 3x - 4y + 5z + 6u &= 2 && (3) \\ -4x + 5y + 6z + 7u &= -6 && (4) \end{aligned}$$

(mit TI berechnen!)

12.18 Lösen von Gleichungssystemen mit dem TI nach der Determinantenmethode

Beispiel 1 (für kleinere Matrizen geeignet)

$G = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

$4x + 3y = 6 \qquad (1)$

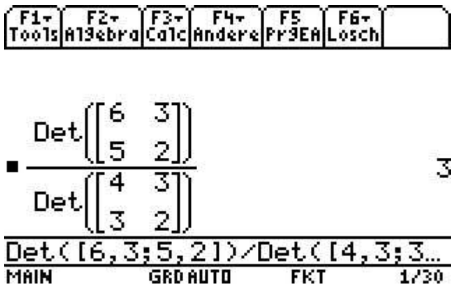
$3x + 2y = 5 \qquad (2)$

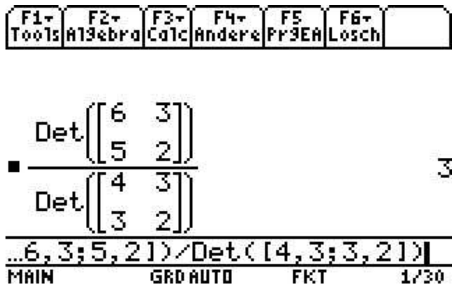
$D = R \times R$

2nd ,

x berechnen: Det([6,3;5,2])/ Det([4,3;3,2]) ENTER

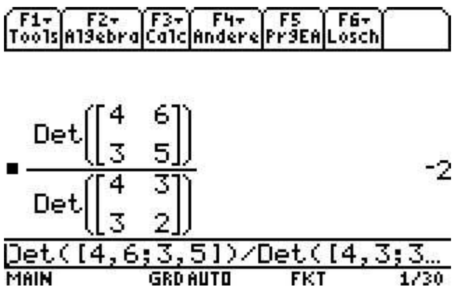
CATALOG 2nd 9

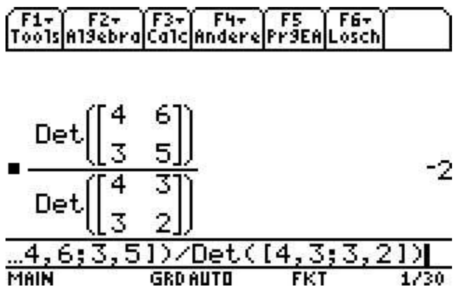




Ergebnis: Dx / D = x = 3

y berechnen: Det([4,6;3,5])/ Det([4,3;3,2]) ENTER





Ergebnis: Dy / D = y = –2

somit: $L = \underline{\underline{\{(3; -2)\}}}$

Beispiel 2 (für grössere Matrizen geeignet)

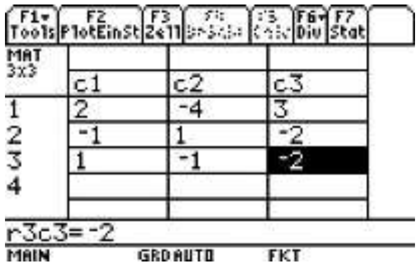
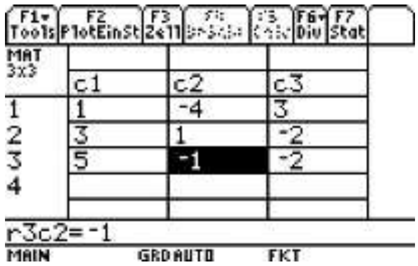
$G = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

$2x - 4y + 3z = 1 \qquad (1)$

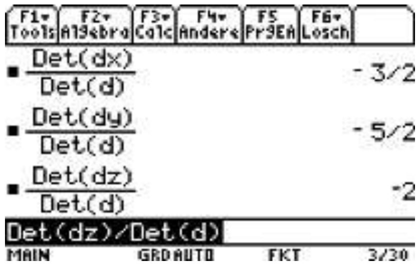
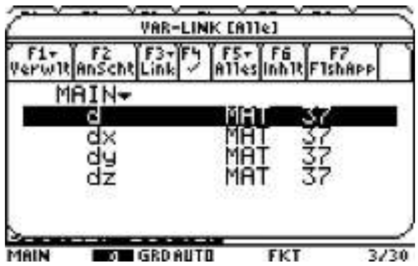
$-x + y - 2z = 3 \qquad (2)$

$x - y - 2z = 5 \qquad (3)$

$D = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

Schritte	TI-89 Tastenfolgen	Anzeige
Daten/Matrix-Editor starten und eine neue Matrix namens **d** erstellen.	[APPS] 6 3 ▶ 2 ▼ ▼ [alpha] d ▼ 3 ▼ 3 [ENTER] [ENTER]	
Koeffizienten zeilenweise in die Matrix eingeben. Danach Daten/Matrix-Editor mit Home beenden.	2 [ENTER] [(-)] 4 [ENTER] 3 [ENTER] [(-)] 1 [ENTER] 1 [ENTER] [(-)] 2 [ENTER] 1 [ENTER] [(-)] 1 [ENTER] [(-)] 2 [ENTER] [HOME]	
Matrix **d** öffnen und als neue Matrix namens **dx** abspeichern.	[APPS] 6 2 ▶ 2 ▼ ▼ ▶ [ENTER] [ENTER] [F1] 2 ▼ [alpha] dx [ENTER] [ENTER] [HOME]	
Matrix **dx** öffnen und 1. Spalte ändern.	[APPS] 6 2 ▶ 2 ▼ ▼ ▶ ▼ [ENTER] [ENTER] 1 Spalte ändern [HOME]	

Vorgängige Schritte wiederholen, bis alle Matrizen (d, dx, dy und dz) abgespeichert sind

Lösungen berechnen, hier am Beispiel von x gezeigt.	CATALOG Det(dx) [:] CATALOG Det(d) ENTER	
Die Variablen nach der Berechnung wieder löschen, damit die Namen für neue Berechnungen wieder frei sind.	2nd [VAR-LINK]!	

Ergebnis: Dx / D = x = –3/2
Dy / D = y = –5/2
Dz / D = z = –2

somit: $$\underline{\underline{L = \left\{ (x;y;z) \middle| \left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}; -2 \right) \right\}}}$$

12.19 Übungen mit dem TI

Lösen Sie einige Aufgaben mit dem TI nach der Determinantenmethode:

Nummer	Seite	Bemerkungen
410 (Sie wählen selber)	131	mit TI lösen
411 (Sie wählen selber)	131	mit TI lösen
413 (Sie wählen selber)	131	mit TI lösen

12.20 Gaußsches Eliminationsverfahren (Gauss-Verfahren)

Der Algorithmus von Gauss[2] ist **das** universelle Verfahren zur Lösung beliebiger linearer Gleichungssysteme. Mit ihm ist die Lösung von Systemen mit quadratischer Koeffizientenmatrix ebenso möglich wie die Bestimmung der Lösungsmenge von Systemen, bei denen die Anzahl der Gleichungen nicht mit der der Unbekannten übereinstimmt.

Das Gauss-Verfahren ist vom Prinzip her nichts anderes als das **Additionsverfahren**, das bereits behandelt wurde. Der Algorithmus von Gauss besteht grundsätzlich aus zwei Phasen. Das Ziel der **Eliminationsphase** besteht darin, die Anzahl der Unbekannten in den Gleichungen schrittweise so weit zu reduzieren, bis eine Gleichung mit nur einer Variablen entsteht. Die Lösung des Gleichungssystems wird durch **Rückwärtseinsetzen** ermittelt. Dabei wird zuerst die letzte Gleichung mit einer Variablen gelöst. Durch Einsetzen der schon berechneten Werte in die jeweils vorhergehende Gleichung können nacheinander auch die weiteren Variablen ermittelt werden.

Um Schreibarbeit einzusparen, wird das Rechenschema in Form einer Tabelle ausgeführt, in die die Koeffizientenmatrix sowie die rechte Seite eingetragen werden. Als Gedankenstütze empfiehlt es sich, über jeder Spalte die dazugehörige Variable zu notieren.

Rechenprinzip

$$x - y + z = 0$$
$$8x + 10y + 2z = 6$$
$$-2x + y - 3z = 5$$

Drei Gleichungen
mit drei Variablen

Es wird zeilenweise gearbeitet.

Zeilen darf man:
- vertauschen
- mit einer Zahl multiplizieren
- durch eine Zahl dividieren
- addieren
- subtrahieren

Rechenschema:

x	y	z	
1	–1	1	0
8	10	2	6
–2	1	–3	5

Die Umformung
soll ergeben:

x	y	z	
*	*	*	*
0	*	*	*
0	0	*	*

* bedeutet irgend eine Zahl

Hinweise zur Vorgehensweise (Empfehlung):

1. Brüche vermeiden durch zeilenweise Multiplikation mit dem Hauptnenner.
2. Die erste Zahl in der ersten Zeile soll positiv sein, evtl. Zeilen vertauschen oder $\cdot(-1)$
3. Zuerst werden die Koeffizienten von x eliminiert, danach die Koeffizienten von y, usw.
4. Wer sicher arbeitet, kann mehrere Umformungen gleichzeitig machen, dadurch ist weniger zu schreiben, die Fehlerquote steigt aber!

Es kann auch anders umgeformt werden. Das «wie» ist ganz Ihrem Geschick überlassen. Durch intensives Üben finden Sie den optimalen Weg.

[2] Johann Carl Friedrich Gauss, deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker mit einem breit gefächerten Feld an Interessen.

Beispiel 1

$$x - y + z = 0$$
$$8x + 10y + 2z = 6$$
$$-2x + y - 3z = 5$$

$D = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

Gauss-Verfahren (Eliminationsphase)

	x	y	z	
E	1	–1	1	0
	8	10	2	6
–8 · E	–8	8	–8	0
	–2	1	–3	5
2 · E	2	–2	2	0
E	0	18	–6	6
	0	–1	–1	5
1/18 · E	0	1	–1/3	1/3
	0	0	–4/3	16/3

x wird eliminiert, Faktor $-\frac{8}{1} = -8$

x wird eliminiert, Faktor $-\frac{-2}{1} = 2$

y wird eliminiert, Faktor $-\frac{-1}{18} = \frac{1}{18}$

Lösungen bestimmen (Rückwärtseinsetzen)

$-\frac{4}{3}z = \frac{16}{3} \quad \rightarrow \quad z = \frac{16}{-4} = \underline{-4}$

$-y - (-4) = 5 \quad \rightarrow \quad y = 4 - 5 = \underline{-1}$

$x - (-1) + (-4) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4 - 1 = \underline{3}$

Kontrolle:

$3 - (-1) + (-4) = 0 \quad \rightarrow \quad 3 + 1 - 4 = 0 \quad (w)$
$8 \cdot 3 + 10 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) = 6 \quad \rightarrow \quad 24 - 10 - 8 = 6 \quad (w)$
$-2 \cdot 3 + (-1) - 3 \cdot (-4) = 5 \quad \rightarrow \quad -6 - 1 + 12 = 5 \quad (w)$

somit: $L = \underline{\underline{\{(3; -1; -4)\}}}$

Beispiel 2

$$x + y + z = 0$$
$$x - z = 0$$
$$2x + y = 1$$

Beispiel 3

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 3 \\
x + 2y + 3z &= 6 \\
2x + 3y + 4z &= 9
\end{aligned}
$$

Beispiel 4

$$
\begin{aligned}
x - y &= -1 \\
x + z &= 6 \\
y + z &= 7
\end{aligned}
$$

Beispiel 5 (Eintrittstest Fachhochschule)

Betrachten Sie das folgende Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den drei Unbekannten x, y und z. Für welchen Wert von a hat das Gleichungssystem Lösungen?

$$x + 2y = 1$$
$$x - z = a$$
$$4x + 4y - 2z = 6$$

Beispiel 6

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z - 4u &= 18 \\
2x + 3y - 4z + 5u &= 10 \\
3x - 4y + 5z + 6u &= 2 \\
-4x + 5y + 6z + 7u &= -6
\end{aligned}
$$