

13 Ungleichungen

Eingescannt aus «Mathematik für die Fachschule Technik» von Heinz Rapp.

13.1 Einführung

Bei Gleichungen haben wir zwei gleiche Terme durch ein Gleichheitszeichen (=) miteinander verbunden. In entsprechender Weise lassen sich auch ungleiche Terme, von denen der eine größer (>) oder kleiner (<) als der andere ist, durch ein Ungleichheitszeichen miteinander in Verbindung bringen.

Ungleichungen können bei Kostenabschätzungen, bei Fehlerrechnungen oder bei Intervallschachtelungen vorkommen.

13.2 Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen

Um Ungleichungen auf die einfachste Form ($x > \dots$) oder ($x < \dots$) zu bringen, werden die Terme auf beiden Seiten der Ungleichung durch *äquivalente Umformungen* so lange verändert, bis die einfachste Form entsteht. Da wir bei diesen Umformungen nur Termadditionen oder -multiplikationen durchführen, bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert, handelt es sich immer um Äquivalenzumformungen. Wir können deshalb auch hier, wenn es sich ausschließlich um Äquivalenzumformungen handelt, auf das Schreiben des Äquivalenzzeichens (\Leftrightarrow) verzichten.

Wir wollen dies an einfachen Zahlenbeispielen untersuchen.

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $x - 3 < 1$.

Lösung

1. Termaddition

Durch die Addition von (+ 3) auf beiden Seiten der Ungleichung werden beide Terme um den gleichen Wert vergrößert. Damit ist der linke Term aber immer noch kleiner als der rechte. Die Ungleichheit bleibt erhalten. Die beiden Ungleichungen sind äquivalent.

$$\begin{aligned} x - 3 &< 1 \\ x - 3 + 3 &< 1 + 3 \\ x &< 4 \\ \underline{L = \{x \mid x < 4\}} \end{aligned}$$

Beispiel

Bestimmen Sie Lösungsmenge von $x + 7 > 10$.

Lösung

2. Termsubtraktion

In diesem Fall erhalten wir die Lösungsmenge nur durch die Subtraktion der Zahl 7.

$$\begin{aligned} x + 7 &> 10 \\ x + 7 - 7 &> 10 - 7 \\ x &> 3 \\ \underline{L = \{x \mid x > 3\}} \end{aligned}$$

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{1}{2}x > 3$.

Lösung**3. Termmultiplikation**

In diesem Fall muss die Termmultiplikation angewandt werden. Der doppelte Wert des größeren Terms ist dabei immer noch größer als der doppelte Wert des kleineren Terms. Die Ungleichheit bleibt bestehen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x &> 3 \\ 2 \cdot \frac{1}{2}x &> 3 \cdot 2 \\ x &> 6 \\ \underline{\underline{L = \{x | x > 6\}}}\end{aligned}$$

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $3x < 9$.

Lösung**4. Termdivision**

Durch die Multiplikation mit $\frac{1}{3}$, was der Division durch 3 entspricht, erhalten wir eine äquivalente Gleichung, denn der linksseitige Term ist immer noch kleiner als der rechtsseitige.

$$\begin{aligned}3x &< 9 \\ \frac{1}{3} \cdot 3x &< 9 \\ x &< 3 \\ \underline{\underline{L = \{x | x < 3\}}}\end{aligned}$$

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $x - 2 > 3x - 6$.

Lösung

Bei dieser Ungleichung kommt man erst durch mehrere Umformungen zur Lösungsmenge.

Durch die Termaddition (+6) sowie die Termsubtraktion (-x) ergibt sich die Ungleichung $4 > 2x$.

Dividiert man diese Ungleichung durch 2, so erhält man $2 > x$. Diese Ungleichung kann auch von rechts nach links gelesen werden. Dabei ergibt sich die Ungleichung $x < 2$.

$$\begin{aligned}x - 2 &> 3x - 6 \\ x - 2 + 6 &> 3x - 6 + 6 \\ x + 4 &> 3x \\ x - x + 4 &> 3x - x \\ 4 &> 2x \\ \frac{1}{2} \cdot 4 &> \frac{1}{2} \cdot 2x \\ 2 &> x \\ \underline{\underline{L = \{x | x < 2\}}}\end{aligned}$$

Die Termumformung kann aber auch in anderer Weise durchgeführt werden:

Um die Ungleichung $-2x > -4$ zu vereinfachen, ist die Termmultiplikation sinnvollerweise mit der negativen Zahl $\left(-\frac{1}{2}\right)$ durchzuführen.

Ohne das Ungleichheitszeichen umzukehren, würde aber das Ergebnis $x > 2$ herauskommen. Dies wäre jedoch eine falsche und damit keine zur ursprünglichen Aussageform äquivalente Ungleichungsform.

Damit eine äquivalente Aussageform entsteht, ist bei der Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl das Ungleichheitszeichen gleichzeitig umzukehren.

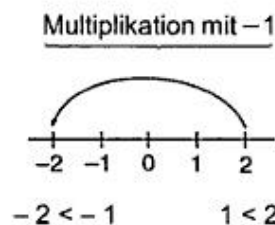
Wir wollen dies an einer einfachen Zahlenungleichung plausibel machen:

$1 < 2$	1 ist kleiner als 2
$1 \cdot (-1) > 2 \cdot (-1)$	Umkehrung der Ungleichheit bei negativen Faktoren
$-1 > -2$	-1 ist größer als -2

$$\begin{aligned} x - 2 &> 3x - 6 \\ x - 2 + 2 &> 3x - 6 + 2 \\ x &> 3x - 4 \\ x - 3x &> 3x - 3x - 4 \\ -2x &> -4 \end{aligned}$$

Umkehrung des Ungleichheitszeichens bei Multiplikation mit negativen Zahlen (*Inversionsregel*):

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2x) &< \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-4) \\ x &< 2 \\ \underline{\underline{L = \{x \mid x < 2\}}} \end{aligned}$$



Darstellung der Inversionsregel

Für die Lösung von Ungleichungen ergeben sich somit folgende *Äquivalenzsätze*:

Durch Termaddition oder -subtraktion auf beiden Seiten einer Ungleichung erhält man eine äquivalente Gleichung.

Durch Termmultiplikation oder -division mit einer *positiven Zahl* auf beiden Seiten einer Gleichung entsteht eine äquivalente Gleichung.

Bei Termmultiplikation und Termdivision mit einer *negativen Zahl* oder *einem negativen Term* entsteht nur dann eine äquivalente Ungleichung, wenn gleichzeitig das Ungleichheitszeichen umgekehrt wird (*Inversionsregel*).

Zusammenfassend erhält man folgende Umformungsregeln:

1. Ungleichungen lassen sich durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit einem positiven Term wie Gleichungen umformen.
2. Beim Multiplizieren und Dividieren mit einem negativen Term muss das Ungleichheitszeichen umgekehrt werden (*Inversionsregel*).

13.3 Einfache lineare Ungleichungen

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $3(x - 1) > 7x + 5$.

Lösung

Klammer ausmultiplizieren

$$3(x - 1) > 7x + 5.$$

x-Glieder auf die linke Seite bringen (Termaddition) und zusammenfassen

$$3x - 3 > 7x + 5$$

$$-4x - 3 > 5$$

Zahlenterm auf die rechte Seite bringen (Termaddition) und zusammenfassen

$$-4x > 8$$

$$x < -2$$

Termdivision unter Beachtung der Inversionsregel

$$\underline{\underline{L = \{x | x < -2\}}}$$

Alle Zahlen, die kleiner als (-2) sind, gehören zur Lösungsmenge.

Beispiel

Bestimmen Sie aus der Grundmenge $G = \mathbb{N}^*$ die Lösungsmenge der Ungleichung

$$2(x + 5) + 3 > 7(x + 1) - 3x.$$

Lösung

Klammern ausmultiplizieren und Terme zusammenfassen

$$2(x + 5) + 3 > 7(x + 1) - 3x$$

$$2x + 10 + 3 > 7x + 7 - 3x$$

Äquivalenzumformungen durchführen

$$-2x > -6$$

$$x < 3$$

Da nur die natürlichen Zahlen zur Grundmenge gehören, kommen als Zahlen, die kleiner als 3 sind, nur die Zahlen 1 und 2 in Frage.

$$\underline{\underline{L = \{1; 2\}}}$$

13.4 Bruchungleichungen

Ungleichungen mit Bruchtermen, bei denen die Lösungsvariable im Nenner vorkommt, bezeichnet man als Bruchungleichungen. Da bei Bruchtermen der Nenner nicht Null werden darf, müssen wir wie bei Bruchgleichungen mit Hilfe der Definitionsmenge solche Werte ausschließen, die den Nenner zu Null werden lassen.

Beispiel

Bestimmen Sie für die Ungleichung

$$\frac{5}{x+1} < 1$$

die Definitions- und Lösungsmenge aus der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$.

Lösung

1. Methode

Um die Ungleichung bruchfrei zu machen, werden beide Seiten der Ungleichung mit dem Hauptnenner (hier mit dem Faktor $(x + 1)$) multipliziert.

Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- 1. Fall: Multiplikator > 0 (positiv) – Ungleichheitszeichen bleibt gleich
- 2. Fall: Multiplikator < 0 (negativ) – Ungleichheitszeichen wird umgekehrt.

Lösungsgang

Bestimmung der Definitionsmenge D

Da für $x = -1$ der Nenner Null werden würde, ist der Bruchterm und damit die Ungleichung für diesen Wert nicht definiert.

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$$

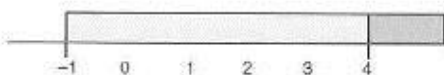
Berechnung der Lösungsmenge L

1. Fall: Multiplikation mit dem Faktor

$$x + 1 > 0$$

Da beide Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sein müssen, wollen wir beide Ungleichungen gleichzeitig nach x auflösen und durch das Zeichen \wedge (und) verknüpfen.

Das Ergebnis wollen wir an der Zahlengeraden veranschaulichen.



2. Fall: Multiplikation mit dem Faktor

$$x + 1 < 0$$

Bei der Multiplikation mit einem negativen Faktor ist das Ungleichheitszeichen entsprechend der Inversionsregel umzukehren.

Auch dieses Ergebnis wollen wir an der Zahlengeraden veranschaulichen.



Wir erkennen aus den Teillösungen, dass zwei Zahlenbereiche zur Lösungsmenge gehören, nämlich alle rationalen Zahlen, die größer als 4 oder (\vee) alle rationalen Zahlen, die kleiner als (-1) sind.

$$\frac{5}{x+1} < 1$$

$$\frac{5 \cdot (x+1)}{x+1} < 1 \cdot (x+1) \quad \text{Multiplikator } \frac{5}{x+1} > 0$$

$$5 < x + 1 \quad \wedge \quad x + 1 > 0$$

$$4 < x \quad \wedge \quad x > -1$$

Da beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein müssen, folgt daraus (vgl. Zahlengerade):

$$\underline{x > 4}$$

$$5 > x + 1 \quad \wedge \quad \text{Multiplikator } \frac{5}{x+1} < 0$$

$$x < 4 \quad \wedge \quad x < -1$$

Da beides gleichzeitig erfüllt sein muss, folgt daraus

$$\underline{x < -1}$$

Damit erhält man als Lösungsmenge

$$\underline{L = \{x \mid x > 4 \vee x < -1\}_{\mathbb{Q}}}$$

2. Methode

Man formt die Ungleichung äquivalent so um, dass rechts Null steht. Durch entsprechendes Erweitern und Zusammenfassen wird die linke Seite der Ungleichung so umgewandelt, dass nur noch ein einziger Bruchterm übrigbleibt.

Nun werden Zähler und Nenner getrennt betrachtet. Ein Bruch ist z. B. kleiner Null (< 0), wenn der Zähler negativ (< 0) und der Nenner positiv (> 0) ist. Entsprechendes gilt für den umgekehrten Fall.

Lösungsgang

a) Bestimmung der Definitionsmenge D

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$$

b) Umformung der Ungleichung

$$\frac{5}{x+1} < 1$$

Alle Terme werden durch Äquivalenzumformung auf die linke Seite der Ungleichung gebracht.

$$\frac{5}{x+1} - 1 < 0$$

Erweitern mit dem Hauptnenner

$$\frac{5}{x+1} - \frac{1(x+1)}{x+1} < 0$$

Zusammenfassen der Bruchterme

$$\frac{5 - (x+1)}{x+1} < 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} < 0$$

c) Fallunterscheidungen

1. Ein Bruchterm ist negativ, wenn der Zähler negativ und der Nenner positiv ist.

Zähler	Nenner
$4 - x < 0$	$x + 1 > 0$
$x > 4$	$x > -1$

$x > 4$

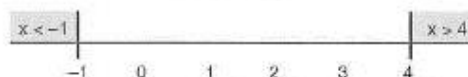
2. Ein Bruchterm ist negativ, wenn der Zähler positiv und der Nenner negativ ist.

Zähler	Nenner
$4 - x > 0$	$x + 1 < 0$
$x < 4$	$x < -1$

$x < -1$

d) Formulierung der Lösungsmenge L

$$L = \{x \mid x > 4 \vee x < -1\}_{\mathbb{Q}}$$



Graphische Darstellung

Beispiel

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge von $\frac{x+3}{x} > \frac{x}{x-3}$ mit $G = \mathbb{Q}$.

Lösung

Lösungsgang nach der 2. Methode

a) Definitionsmenge

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 3\}$$

b) Umformung der Ungleichung

$$\frac{x+3}{x} > \frac{x}{x-3}$$

$$\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-3} > 0$$

$$\frac{(x+3) \cdot (x-3) - x \cdot x}{x \cdot (x-3)} > 0$$

$$\boxed{\frac{-9}{x(x-3)} > 0}$$

c) Fallunterscheidungen

In diesem Fall ist der Zähler negativ. Da er keine Variable enthält, kann er sich nicht mehr verändern. Dies bedeutet, dass der Nenner negativ werden muss, damit der Bruchterm positiv bleibt.

Es gibt keine rationale Zahl, die negativ und gleichzeitig größer als 3 ist.

Nenner negativ

(wenn die beiden Faktoren x und $(x-3)$ ungleiche Vorzeichen haben)

$$x \cdot (x-3) < 0$$

1. $x < 0 \wedge (x-3) > 0$

$$x < 0 \wedge x > 3$$

kein Lösungselement

2. $x > 0 \wedge (x-3) < 0$

$$x > 0 \wedge x < 3$$

d) Lösungsmenge

Alle rationalen Zahlen im Intervall $]0; 3[$ gehören zur Lösungsmenge

$$\boxed{0 < x < 3}$$

$$\underline{\underline{L = \{x \mid 0 < x < 3\}_{\mathbb{Q}}}}$$

Anmerkung:

Die Lösungsmenge lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$\underline{\underline{L =]0; 3[_{\mathbb{Q}}}}$$

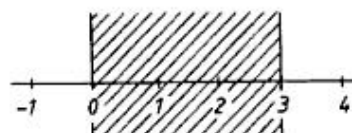
Andere Schreibweise der Lösungsmenge: $L = (x; 3)_{\mathbb{Q}}$

abhängig vom Fachbuch

runde Klammer: Grenze gehört **nicht** dazu

eckige (nach innen gerichtete) Klammer: Grenze gehört dazu

eckige (nach aussen gerichtete) Klammer: Grenze gehört **nicht** dazu



Graphische Darstellung der Lösungsmenge

Beispiel

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge von $\frac{3}{x+2} > \frac{4}{x+1}$ mit $G = \mathbb{Q}$.

Lösung

a) Definitionsmenge

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; -2\}$$

b) Umformung der Ungleichung

$$\frac{3}{x+2} > \frac{4}{x+1}$$

$$\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+1} > 0$$

$$\frac{3(x+1) - 4(x+2)}{(x+2)(x+1)} > 0$$

$$\frac{-x-5}{(x+2)(x+1)} > 0$$

$$\frac{x+5}{(x+2)(x+1)} < 0$$

c) Fallunterscheidungen

Da bei dem vorliegenden Beispiel nicht nur zwei Fälle zu unterscheiden sind, wollen wir ein Lösungsschema anwenden.

Lösungsschema

Zähler	positiv	negativ
	$x + 5 > 0$	$x + 5 < 0$
	$x > -5$	$x < -5$
Nenner	negativ	positiv
	$(x + 2)(x + 1) < 0$	$(x + 2)(x + 1) > 0$
	1. $x + 2 < 0 \wedge x + 1 > 0$	1. $x + 2 > 0 \wedge x + 1 > 0$
	$x < -2 \wedge x > -1$	$x > -2 \wedge x > -1$
	keine Lösungselemente	$x > -1$
	2. $x + 2 > 0 \wedge x + 1 < 0$	2. $x + 2 < 0 \wedge x + 1 < 0$
	$x > -2 \wedge x < -1$	$x < -2 \wedge x < -1$
	$-2 < x < -1$	$x < -2$
Ergebnis	$-2 < x < -1$	$x < -5$

d) Lösungsmenge

$$L = \{x \mid -2 < x < -1 \vee x < -5\}_{\mathbb{Q}}$$

13.5 Übungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen.

$$1. \quad 25 - 10x \leq 70 + 5x \quad (G = R)$$

$$D = R$$

$$\begin{array}{ll} 25 - 10x \leq 70 + 5x & | -70 + 10x \\ -45 \leq 15x & | :15 \\ \underline{x \geq -3} & \end{array}$$



● inklusive Grenze (Punkt $\in L$)

$$T_1(-4): \quad \underbrace{25 - 10 \cdot (-4)}_{65} \leq \underbrace{70 + 5 \cdot (-4)}_{50} \quad (f) \rightarrow \text{«linker Teil»} \notin L$$

$$T_2(-3): \quad \underbrace{25 - 10 \cdot (-3)}_{55} \leq \underbrace{70 + 5 \cdot (-3)}_{55} \quad (w) \rightarrow \text{«rechter Teil»} \in L$$

$$\text{somit:} \quad L = \underline{\underline{\{x \mid x \geq -3\}}}$$

$$2. \quad 3 \cdot (x-5) + 2 > 75 - 5 \cdot (x-5) - 13 \quad (G=R)$$

$$D=R$$

$$3x - 15 + 2 > 75 - 5x + 25 - 13$$

| zusammenfassen

$$3x - 13 > -5x + 87$$

| +5x + 13

$$8x > 100$$

| : 8

$$\underline{x > 12.5}$$



○ ohne Grenze (Punkt \notin L)

$$T_1(12): \quad \underbrace{3 \cdot (12-5) + 2}_{23} > \underbrace{75 - 5 \cdot (12-5) - 13}_{27} \quad (f) \rightarrow \text{«linker Teil»} \notin L$$

$$T_2(12.5): \quad \underbrace{3 \cdot (12.5-5) + 2}_{24.5} > \underbrace{75 - 5 \cdot (12.5-5) - 13}_{24.5} \quad (w) \rightarrow \text{«rechter Teil»} \in L$$

$$\text{somit:} \quad L = \underline{\underline{\{x \mid x > 12.5\}}}$$

$$3. \quad (2x-3) \cdot (2x+3) < (2x-3)^2 \quad (G = \mathbf{R})$$

$$D = \mathbf{R}$$

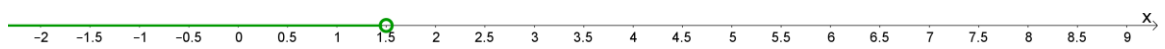
$$4x^2 - 9 < 4x^2 - 12x + 9$$

$$12x < 18$$

$$\underline{\underline{x < \frac{3}{2}}}$$

$$|-4x^2 + 12x + 9$$

$$| : 12$$



○ ohne Grenze (Punkt \notin L)

$$T_1(1): \quad \underbrace{(2 \cdot 1 - 3) \cdot (2 \cdot 1 + 3)}_{-5} < \underbrace{(2 \cdot 1 - 3)^2}_1 \quad (w) \rightarrow \text{«linker Teil»} \in L$$

$$T_2(1.5): \quad \underbrace{(2 \cdot 1.5 - 3) \cdot (2 \cdot 1.5 + 3)}_0 < \underbrace{(2 \cdot 1.5 - 3)^2}_0 \quad (f) \rightarrow \text{«rechter Teil»} \notin L$$

$$\text{somit:} \quad \underline{\underline{L = \left\{ x \mid x < \frac{3}{2} \right\}}}$$

4. $x+6 > 4x-12$

$(G = \mathbf{N})$

$D = \mathbf{N}$

$x+6 > 4x-12$

$|-x+12$

$12 > 3x$

$|\div 3$

$x < 6$



○ ohne Grenze (Punkt $\notin L$)

$$T_1(5): \quad \underset{11}{5} + 6 > \underbrace{4 \cdot \underset{8}{5} - 12}$$

(w) \rightarrow «linker Teil» $\in L$

$$T_2(6): \quad \underset{12}{6} + 6 > \underbrace{4 \cdot \underset{12}{6} - 12}$$

(f) \rightarrow «rechter Teil» $\notin L$

somit: $L = \underline{\underline{\{x \in \mathbf{N} \mid x < 6\}}}$ oder $L = \underline{\underline{\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}}}$

$$5. \quad -1 < 2x \quad \wedge \quad 1.5x \leq 6 + \frac{x}{2} \quad (G = \mathbb{Z})$$

$$D = \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{l} -1 < 2x \quad | :2 \quad \wedge \quad 1.5x \leq 6 + \frac{x}{2} \quad | -\frac{x}{2} \\ \underline{x > -\frac{1}{2}} \quad \wedge \quad \underline{x \leq 6} \end{array}$$



○ ohne Grenze (Punkt $\notin L$)

● inklusive Grenze (Punkt $\in L$)

$$T_1\left(-\frac{1}{2}\right): \quad -1 < 2 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{-1} \quad \wedge \quad 1.5 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{-\frac{3}{4}} \leq 6 + \underbrace{\frac{-1}{2}}_{\frac{23}{4}} \quad (f) \rightarrow \text{«linker Teil» } \notin L$$

$$T_2(0): \quad -1 < 2 \cdot \underbrace{(0)}_0 \quad \wedge \quad 1.5 \cdot \underbrace{(0)}_0 \leq 6 + \underbrace{0}_6 \quad (w) \rightarrow \text{«mittlerer Teil» } \in L$$

$$T_3(6): \quad -1 < 2 \cdot \underbrace{(6)}_{12} \quad \wedge \quad 1.5 \cdot \underbrace{(6)}_9 \leq 6 + \underbrace{6}_9 \quad (w) \rightarrow \text{«mittlerer Teil» } \in L$$

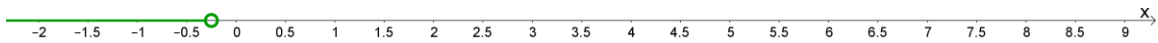
$$T_4(7): \quad -1 < 2 \cdot \underbrace{(7)}_{14} \quad \wedge \quad 1.5 \cdot \underbrace{(7)}_{10.5} \leq 6 + \underbrace{\frac{7}{2}}_{9.5} \quad (f) \rightarrow \text{«rechter Teil» } \notin L$$

$$\text{somit:} \quad L = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid -\frac{1}{2} < x \leq 6 \right\} \quad \text{oder} \quad L = \{ \underline{\underline{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6}} \}$$

$$6. \quad \frac{7x-2}{7} - \frac{1}{7} < -\frac{4}{7} + \frac{3}{7}x \quad (G=\mathbf{R})$$

$$D=\mathbf{R}$$

$$\begin{array}{l} \frac{7x-2}{7} - \frac{1}{7} < -\frac{4}{7} + \frac{3}{7}x \\ 7x-2-1 < -4+3x \\ 4x < -1 \\ \underline{x < -\frac{1}{4}} \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot 7 \\ | -3x+3 \\ | : 4 \end{array}$$



○ ohne Grenze (Punkt $\notin L$)

$$T_1(-1): \quad \underbrace{\frac{7 \cdot (-1) - 2}{7} - \frac{1}{7}}_{-1.29} < \underbrace{-\frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot (-1)}_{-1} \quad (w) \rightarrow \text{«linker Teil»} \in L$$

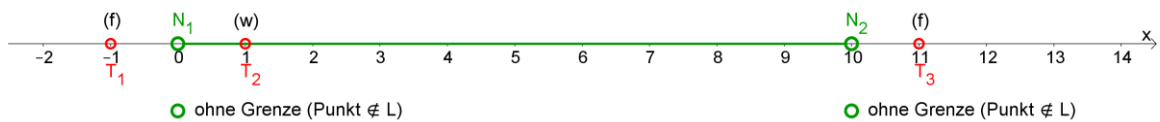
$$T_2(0): \quad \underbrace{\frac{7 \cdot 0 - 2}{7} - \frac{1}{7}}_{-\frac{3}{7}} < \underbrace{-\frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot 0}_{-\frac{4}{7}} \quad (f) \rightarrow \text{«rechter Teil»} \notin L$$

$$\text{somit:} \quad \underline{\underline{L = \left\{ x \mid x < -\frac{1}{4} \right\}}}$$

$$7. \frac{5x-20}{x} < 3 \quad (G=R)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} \frac{5x-20}{x} < 3 & \quad | -3 \\ \frac{5x-20}{x} - 3 < 0 & \quad | \text{alles auf einen Bruchstrich} \\ \frac{5x-20-3x}{x} < 0 & \quad | \text{zusammenfassen} \\ \frac{2x-20}{x} < 0 & \quad | :2 \\ \frac{x-10}{x} < 0 & \quad | \text{Nullstellen bei } x=10 \vee x=0 \end{aligned}$$



$$T_1(-1): \frac{5 \cdot (-1) - 20}{-1} < 3 \quad (f) \rightarrow \text{«linker Teil» } \notin L$$

$$T_2(1): \frac{5 \cdot 1 - 20}{1} < 3 \quad (w) \rightarrow \text{«mittlerer Teil» } \in L$$

$$T_3(11): \frac{5 \cdot 11 - 20}{11} < 3 \quad (f) \rightarrow \text{«rechter Teil» } \notin L$$

$$\text{somit: } L = \underline{\underline{\{x \mid 0 < x < 10\}}}$$

13.6 Quadratische Ungleichungen

Die Lösungsmenge kann mit Hilfe einer Faktorisierung des quadratischen Polynoms und anschließender Fallunterscheidung bestimmt werden. Dazu wird die quadratische Ungleichung zuerst auf die Form $Ax^2 + Bx + C > 0$ bzw. $Ax^2 + Bx + C < 0$ gebracht. Danach wird der Term so umgeformt, dass zwei Faktoren F_1 und F_2 entstehen (Faktorzerlegung).

$$\begin{array}{l} F_1 \cdot F_2 > 0 \\ \text{bzw.} \\ F_1 \cdot F_2 < 0 \end{array}$$

$$F_1 \cdot F_2 > 0 \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 > 0 \quad \wedge \quad F_2 > 0 \\ \vee \text{ (oder)} \\ F_1 < 0 \quad \wedge \quad F_2 < 0 \end{array} \right.$$

Ein Produkt ist > 0 wenn beide Faktoren grösser 0 oder beide Faktoren kleiner 0 sind!

Beispiel 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 + 3x - 10 > 0$. ($G = \mathbf{R}$)

$$D = \mathbf{R}$$

$$x^2 + 3x - 10 > 0$$

|Faktorzerlegung

$$(x+5) \cdot (x-2) > 0$$

|Fallunterscheidung

1. Fall $(+) \cdot (+) \rightarrow$ (beide Faktoren positiv)

$$x+5 > 0 \quad \wedge \quad x-2 > 0$$

$$x > -5 \quad \wedge \quad x > 2$$

$$L_1 = \{x \mid x > 2\}$$

2. Fall $(-) \cdot (-) \rightarrow$ (beide Faktoren negativ)

$$x+5 < 0 \quad \wedge \quad x-2 < 0$$

$$x < -5 \quad \wedge \quad x < 2$$

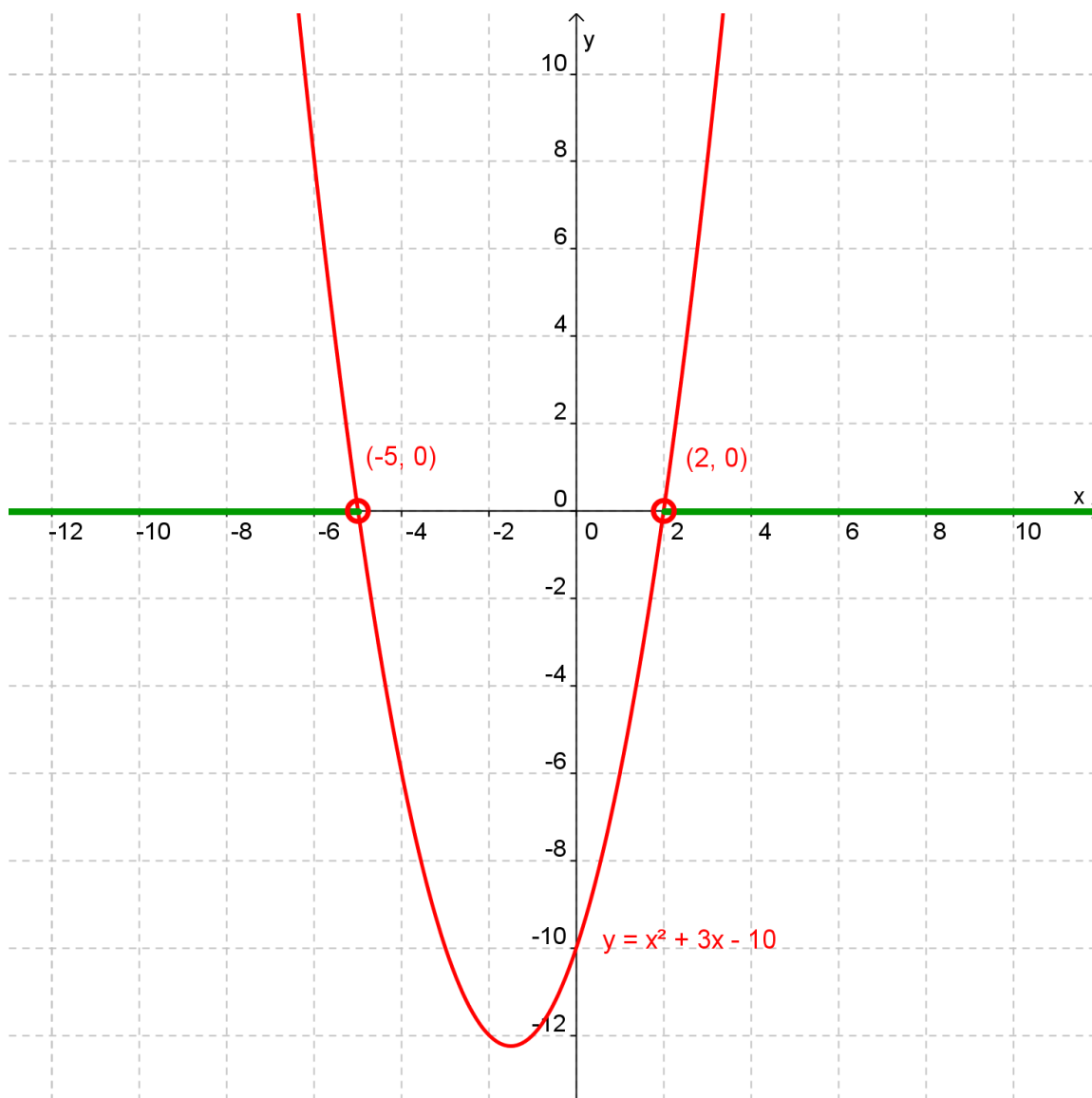
$$L_2 = \{x \mid x < -5\}$$

Lösungsmenge

$$L = L_1 \overset{\text{oder}}{\vee} L_2 = \underline{\underline{\{x \mid x > 2 \quad \vee \quad x < -5\}}}$$

Grafische Interpretation von Beispiel 1

Die linke Seite der Ungleichung $x^2 + 3x - 10 > 0$ wird als Funktionswert einer Funktion aufgefasst, d. h. $y = x^2 + 3x - 10$. Der Graf dieser Funktion ist eine Parabel (zweiten Grades), die im Koordinatensystem die x-Achse bei den Punkten $(-5, 0)$ und $(2, 0)$ schneidet:



Interpretation: Die Lösungsmenge der Ungleichung $\overbrace{x^2 + 3x - 10}^y > 0$ entspricht dem grün markierten Bereich auf der x-Achse, in dem die Parabel **oberhalb** der x-Achse liegt!

Anschaulich: Alle x die in y eingesetzt werden, müssen einen positiven Funktionswert ergeben. Deshalb muss die Lösungsmenge im Intervall $]-\infty; -5[$ oder im Intervall $]2; \infty[$ liegen.

Bemerkung:



Beispiel 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $-3x^2 + 3x + 18 < 0$. ($G = \mathbf{R}$)

$$D = \mathbf{R}$$

$$-3x^2 + 3x + 18 < 0$$

$:(-3) \rightarrow$ Relationszeichen kehren

$$x^2 - x - 6 > 0$$

| Faktorzerlegung

$$(x-3) \cdot (x+2) > 0$$

| Fallunterscheidung

1. Fall $(+) \cdot (+) \rightarrow$ (beide Faktoren positiv)

$$x-3 > 0 \quad \wedge \quad x+2 > 0$$

$$x > 3 \quad \wedge \quad x > -2$$

$$L_1 = \{x \mid x > 3\}$$

2. Fall $(-) \cdot (-) \rightarrow$ (beide Faktoren negativ)

$$x-5 < 0 \quad \wedge \quad x+2 < 0$$

$$x < 5 \quad \wedge \quad x < -2$$

$$L_2 = \{x \mid x < -2\}$$

Lösungsmenge

$$L = L_1 \overset{\text{oder}}{\vee} L_2 = \underline{\underline{\{x \mid x > 3 \vee x < -2\}}}$$

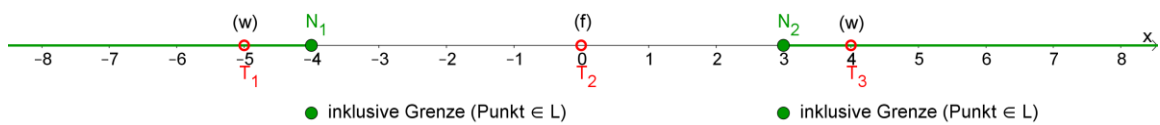
13.7 Übungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen.

1. $x^2 + x - 12 \geq 0$ (G = R)

D = R

$(x + 4)(x - 3) \geq 0$ | Nullstellen bei $x = -4 \vee x = 3$



$T_1(-5): \underbrace{(-5)^2 + (-5) - 12}_{8} \geq 0$ (w) \rightarrow «linker Teil» \in L

$T_2(0): \underbrace{0^2 + 0 - 12}_{-12} \geq 0$ (f) \rightarrow «mittlerer Teil» \notin L

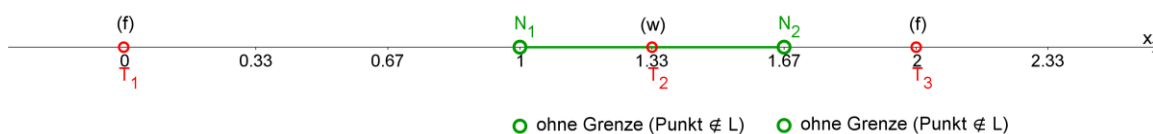
$T_3(4): \underbrace{4^2 + 4 - 12}_{8} \geq 0$ (w) \rightarrow «rechter Teil» \in L

somit: $L = \underline{\underline{\{x \mid -4 \geq x \vee x \geq 3\}}}$

$$2. \quad \frac{2x-3}{x-1} < \frac{1}{2} \quad (G=\mathbf{R})$$

$$D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x-1} < \frac{1}{2} & \quad \left| -\frac{1}{2} \right. \\ \frac{2 \cdot (2x-3)}{2(x-1)} - \frac{1(x-1)}{2(x-1)} < 0 & \quad \left| \text{alles auf einen Bruchstrich} \right. \\ \frac{4x-6-x+1}{2(x-1)} < 0 & \quad \left| \text{zusammenfassen} \right. \\ \frac{3x-5}{2(x-1)} < 0 & \quad \left| \cdot 2 \right. \\ \frac{3x-5}{x-1} < 0 & \quad \left| : 3 \right. \\ x - \frac{5}{3} < 0 & \quad \left| \text{Nullstellen bei } x = 1 \quad \vee \quad x = \frac{5}{3} \right. \\ x - 1 < 0 & \end{aligned}$$



$$T_1(0): \quad \frac{2 \cdot \underbrace{0}_{-3} - 3}{\underbrace{0-1}_{-1}} < \frac{1}{2} \quad (f) \rightarrow \text{«linker Teil» } \notin L$$

$$T_2\left(\frac{4}{3}\right): \quad \frac{2 \cdot \frac{4}{3} - 3}{\frac{4}{3} - 1} < \frac{1}{2} \quad (w) \rightarrow \text{«mittlerer Teil» } \in L$$

$$T_3(2): \quad \frac{2 \cdot \underbrace{2}_{-1} - 3}{\underbrace{2-1}_{-1}} < \frac{1}{2} \quad (f) \rightarrow \text{«rechter Teil» } \notin L$$

$$\text{somit: } \quad L = \underline{\underline{\left\{ x \mid 1 < x < \frac{5}{3} \right\}}}$$

$$3. \frac{(5x+5) \cdot x}{3x+x^2-4} > 5$$

(G = R)

BM-Prüfung Bern

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$$

$$\frac{(5x+5) \cdot x}{\underbrace{x^2+3x-4}_{\text{ordnen}}} > 5$$

|-5

$$\frac{5x(x+1)}{(x+4)(x-1)} - 5 > 0$$

|alles auf einen Bruchstrich

$$\frac{5x(x+1)}{(x+4)(x-1)} - \frac{5(x+4)(x-1)}{(x+4)(x-1)} > 0$$

[:5 und TU

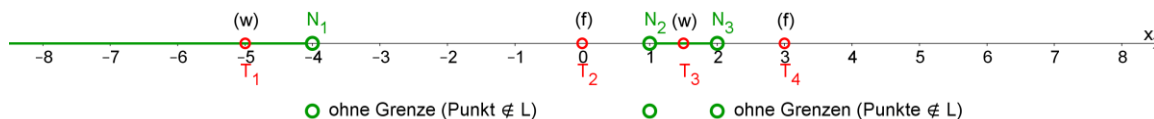
$$\frac{x^2+x-x^2-3x+4}{(x+4)(x-1)} > 0$$

$$\frac{4-2x}{(x+4)(x-1)} > 0$$

[:2

$$\frac{2-x}{(x+4)(x-1)} > 0$$

|Nullstellen bei $x = -4 \vee x = 1 \vee x = 2$



$$T_1(-5): \frac{[5 \cdot (-5) + 5] \cdot (-5)}{\underbrace{(-5)^2 + 3 \cdot (-5) - 4}_{16.7}} > 5$$

(w) → «linker Teil» ∈ L

$$T_2(0): \frac{(5 \cdot 0 + 5) \cdot 0}{\underbrace{0^2 + 3 \cdot 0 - 4}_0} > 5$$

(f) → «mittlerer Teil₁» ∉ L

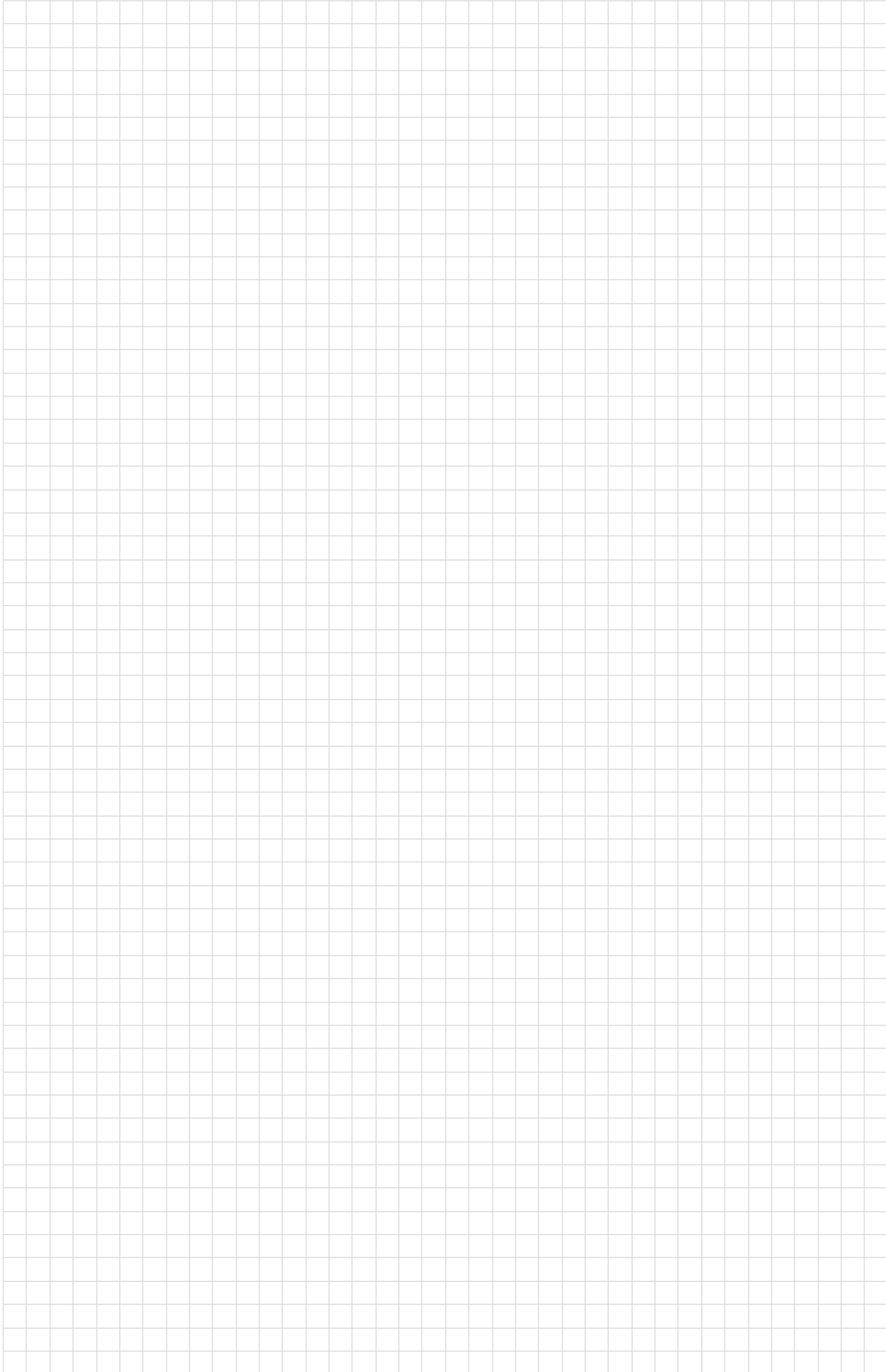
$$T_3(1.5): \frac{(5 \cdot 1.5 + 5) \cdot 1.5}{\underbrace{1.5^2 + 3 \cdot 1.5 - 4}_{6.82}} > 5$$

(w) → «mittlerer Teil₂» ∈ L

$$T_4(3): \frac{(5 \cdot 3 + 5) \cdot 3}{\underbrace{3^2 + 3 \cdot 3 - 4}_{4.29}} > 5$$

(f) → «rechter Teil» ∉ L

$$\text{somit: } L = \underline{\underline{\{x \mid -4 < x \vee 1 < x < 2\}}}$$



$$4. \frac{x+2}{3} \geq \frac{1}{x}$$

(G=R)

BM-Prüfung Uri 2004

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\frac{x+2}{3} \geq \frac{1}{x}$$

$$\left| -\frac{1}{x} \right|$$

$$\frac{x+2}{3} - \frac{1}{x} \geq 0$$

alles auf einen Bruchstrich

$$\frac{x+2}{3} \cdot \frac{x}{x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{3}{3} \geq 0$$

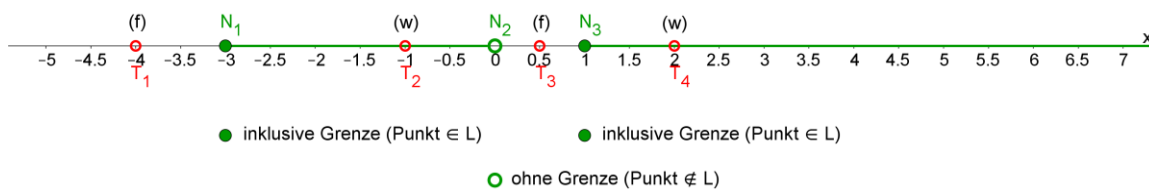
|TU

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{3x} \geq 0$$

·3 und Faktorzerlegung

$$\frac{(x+3)(x-1)}{x} \geq 0$$

Nullstellen bei $x = -3 \vee x = 0 \vee x = 1$



$$T_1(-4): \frac{-4+2}{3} \geq \frac{1}{-4}$$

(f) → «linker Teil» ∉ L

$$T_2(-1): \frac{-1+2}{3} \geq \frac{1}{-1}$$

(w) → «mittlerer Teil₁» ∈ L

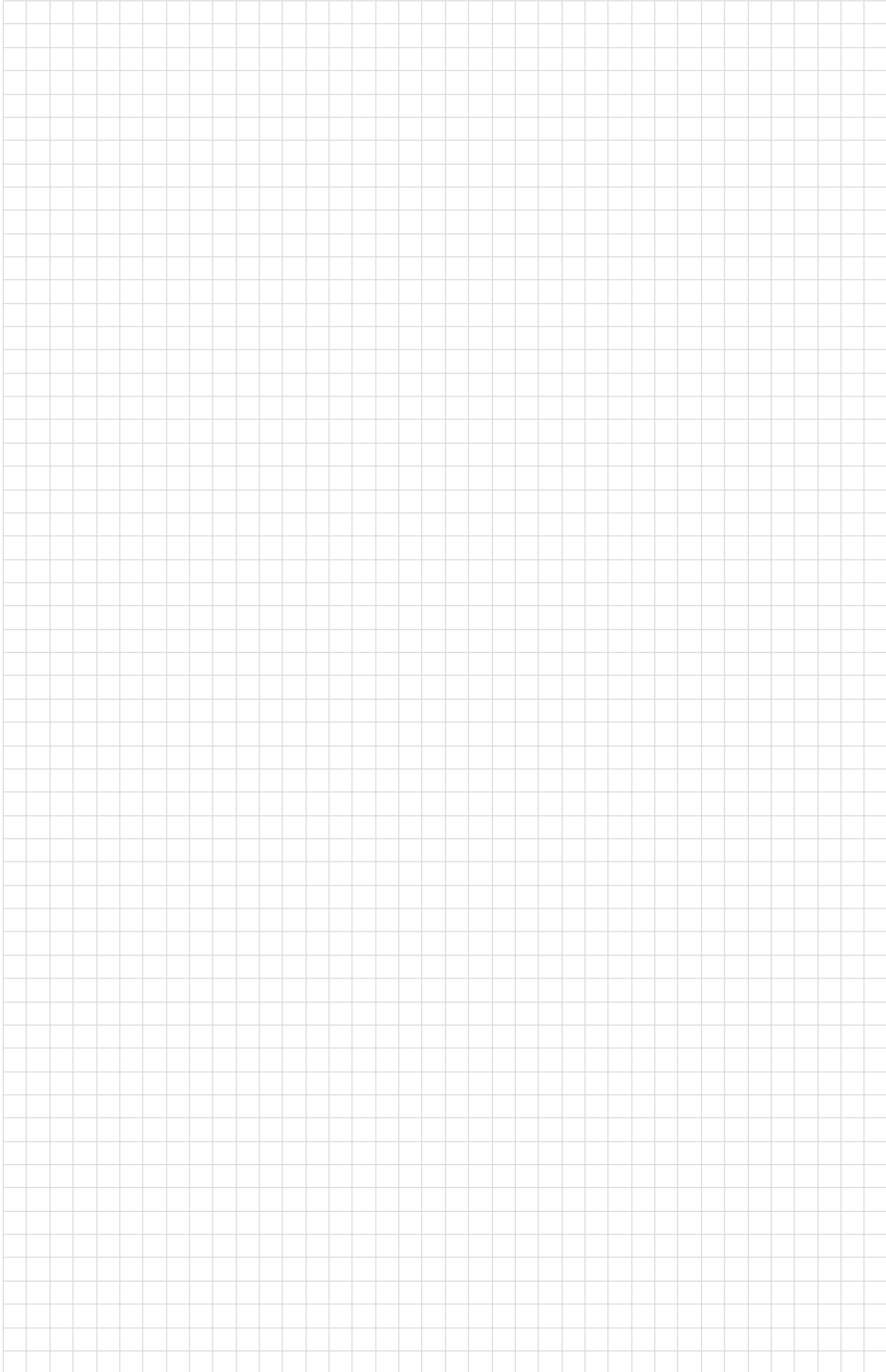
$$T_3(0.5): \frac{0.5+2}{3} \geq \frac{1}{0.5}$$

(f) → «mittlerer Teil₂» ∉ L

$$T_4(2): \frac{2+2}{3} \geq \frac{1}{2}$$

(w) → «rechter Teil» ∈ L

somit: $L = \{x \mid -3 \leq x < 0 \vee x \geq 1\}$



$$5. \frac{x-1}{x+3} < \frac{x+1}{x-3}$$

(G=R)

BM-Prüfung Uri 1998

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

$$\frac{x-1}{x+3} < \frac{x+1}{x-3}$$

$$\left| \frac{x+1}{x-3} \right|$$

$$\frac{x-1}{x+3} - \frac{x+1}{x-3} < 0$$

alles auf einen Bruchstrich

$$\frac{x-1}{x+3} \cdot \frac{x-3}{x-3} - \frac{x+1}{x-3} \cdot \frac{x+3}{x+3} < 0$$

|TU

$$\frac{x^2 - 4x + 3 - (x^2 + 4x + 3)}{(x+3)(x-3)} < 0$$

|TU

$$\frac{x^2 - 4x + 3 - x^2 - 4x - 3}{(x+3)(x-3)} < 0$$

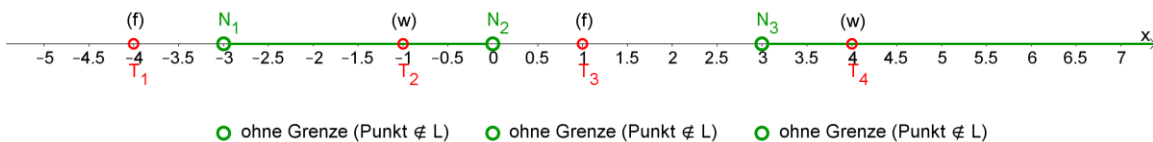
|TU

$$\frac{-8x}{(x+3)(x-3)} < 0$$

:(-8)

$$\frac{x}{(x+3)(x-3)} > 0$$

Nullstellen bei $x = -3 \vee x = 0 \vee x = 3$



$$T_1(-4): \frac{\underbrace{-4-1}_{-5}}{\underbrace{-4+3}_{-1}} < \frac{\underbrace{-4+1}_{-3}}{\underbrace{-4-3}_{-7}}$$

(f) → «linker Teil» $\notin L$

$$T_2(-1): \frac{\underbrace{-1-1}_{-2}}{\underbrace{-1+3}_{2}} < \frac{\underbrace{-1+1}_{0}}{\underbrace{-1-3}_{-4}}$$

(w) → «mittlerer Teil₁» $\in L$

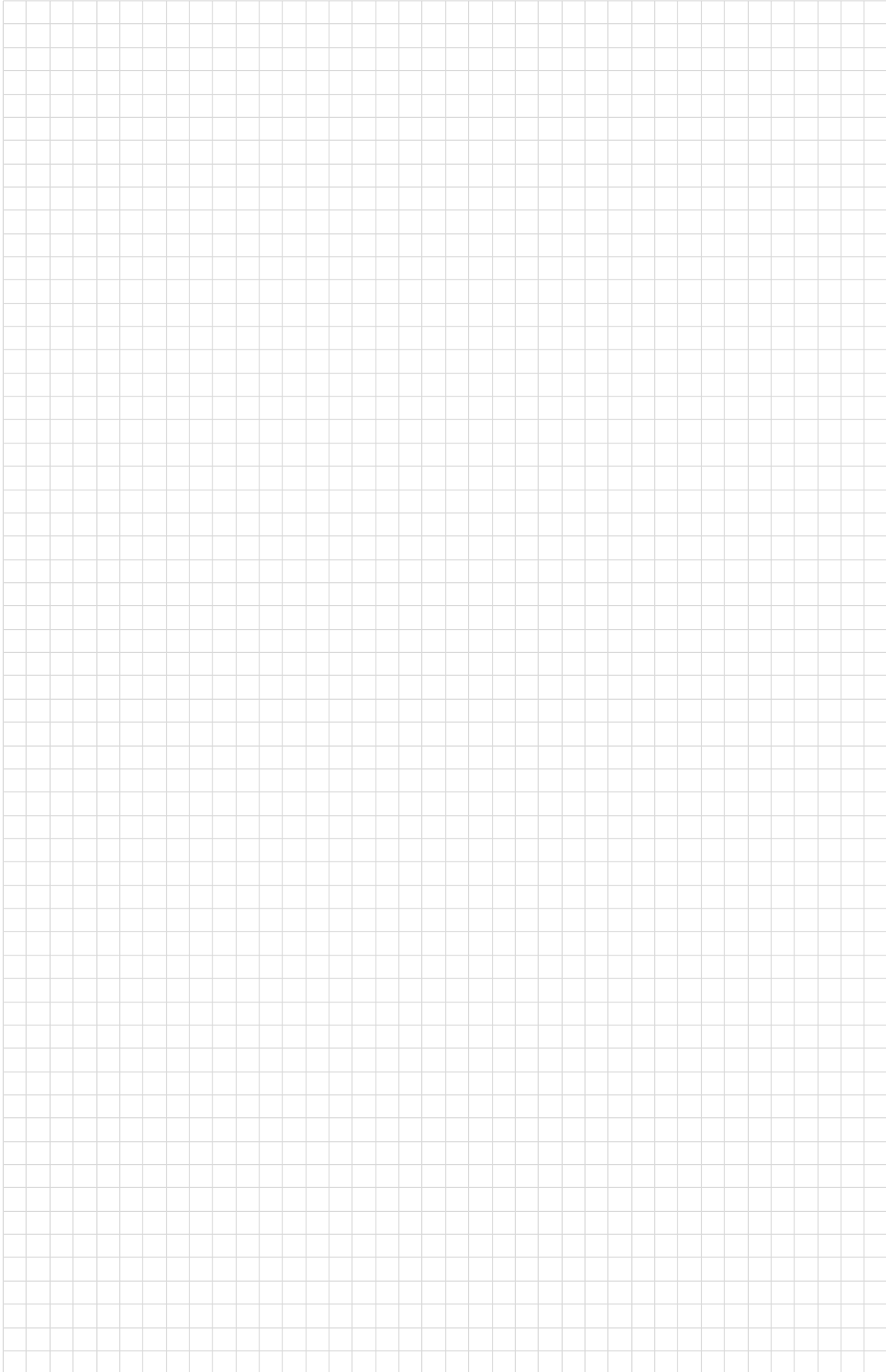
$$T_3(1): \frac{\underbrace{1-1}_{0}}{\underbrace{1+3}_{4}} < \frac{\underbrace{1+1}_{2}}{\underbrace{1-3}_{-2}}$$

(f) → «mittlerer Teil₂» $\notin L$

$$T_4(4): \frac{\underbrace{4-1}_{3}}{\underbrace{4+3}_{7}} < \frac{\underbrace{4+1}_{5}}{\underbrace{4-3}_{1}}$$

(w) → «rechter Teil» $\in L$

somit: $L = \underline{\underline{\{x \mid -3 < x < 0 \vee x > 3\}}}$



13.8 Übungsprüfung

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen.
Für alle Aufgaben gilt $G = \mathbb{R}$.

1. $4 - 2x \leq 3x + 4$

Lösung:

$$D = \mathbb{R}$$

$$4 - 2x \leq 3x + 4 \quad | +2x - 4$$

$$0 \leq 5x$$

$$\underline{x \geq 0}$$

$$L = \underline{\underline{\{x | x \geq 0\}}}$$

2. $\frac{3x-5}{3} < \frac{2x-1}{2}$

Lösung:

$$D = \mathbb{R}$$

$$\frac{3x-5}{3} \cdot \frac{2}{2} < \frac{2x-1}{2} \cdot \frac{3}{3} \quad | \cdot 6$$

$$6x - 10 < 6x - 3 \quad | -6x + 10$$

$$\underline{0 < 7} \quad (w)$$

$$L = \underline{\underline{\mathbb{R}}}$$

3. $-8 < 5 - 0.5x \leq 0$
 Zeichnen Sie den Grafen der Lösungsmenge auf.

Lösung:

$D = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lcl} -8 < 5 - 0.5x & \wedge & 5 - 0.5x \leq 0 \\ -13 < -0.5x & \wedge & 5 \leq 0.5x \\ x < \underline{26} & \wedge & x \geq \underline{10} \end{array}$$

$L = \{x \mid 10 \leq x < 26\}$

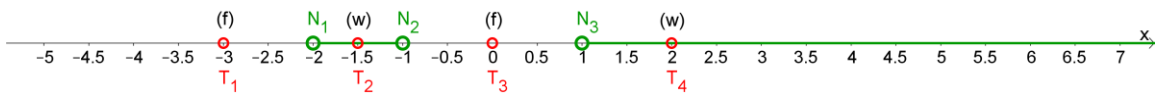


4. $\frac{x+2}{(x-1)(x+1)} > 0$
 Zeichnen Sie den Grafen der Lösungsmenge auf.

Lösung:

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)} > 0$ | Nullstellen bei $x = -2 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 1$



$T_1(-3): \frac{\overbrace{-3+2}^{-1}}{\underbrace{(-3-1)}_{-4} \cdot \underbrace{(-3+1)}_{-2}} > 0$ (f) → «linker Teil» $\notin L$

$T_2(-1.5): \frac{\overbrace{-1.5+2}^{0.5}}{\underbrace{(-1.5-1)}_{-2.5} \cdot \underbrace{(-1.5+1)}_{-0.5}} > 0$ (w) → «mittlerer Teil₁» $\in L$

$T_3(0): \frac{0+2}{\underbrace{(0-1)}_{-1} \cdot \underbrace{(0+1)}_1} > 0$ (f) → «mittlerer Teil₂» $\notin L$

$$T_4(2): \frac{2+2}{\underbrace{(2-1)}_1 \cdot \underbrace{(2+1)}_3} > 0 \quad (w) \rightarrow \text{«rechter Teil»} \in L$$

somit: $L = \underline{\underline{\{x \mid -2 < x < -1 \vee x > 1\}}}$

5. $\frac{4+x}{3+2x} > \frac{1}{2}$

Lösung:

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

$$\frac{4+x}{3+2x} > \frac{1}{2}$$

$$\left| -\frac{1}{2} \right.$$

$$\frac{4+x}{3+2x} - \frac{1}{2} > 0$$

|gleichnamig

$$\frac{4+x}{3+2x} \cdot \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3+2x}{3+2x} > 0$$

|TU

$$\frac{8+2x-3-2x}{2(3+2x)} > 0$$

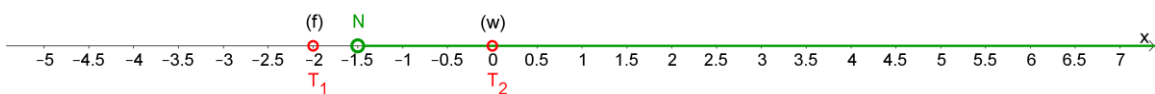
|TU

$$\frac{5}{2(3+2x)} > 0$$

$$\left| \cdot \frac{2}{5} \right.$$

$$\frac{1}{3+2x} > 0$$

|Nullstellen bei $x = -\frac{3}{2}$



$$T_1(-2): \frac{4+(-2)}{3+2 \cdot (-2)} > \frac{1}{2} \quad (f) \rightarrow \text{«linker Teil»} \notin L$$

$$T_2(0): \frac{4+0}{\underbrace{3+2 \cdot 0}_{4/3}} > \frac{1}{2} \quad (w) \rightarrow \text{«rechter Teil»} \in L$$

$$L = \underline{\underline{\left\{ x \mid x > -\frac{3}{2} \right\}}}$$

13.9 Grafisches Lösen linearer Ungleichungen

Eine **lineare Ungleichung** mit einer Lösungsvariable x lässt sich durch äquivalente Umformungen stets in folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} Ax + B \leq 0 & \text{ bzw. } Ax + B < 0 \\ (Ax + B \geq 0 & \text{ bzw. } Ax + B > 0) \end{aligned}$$

Die linke Seite der Ungleichung wird als Funktionswert einer Funktion (lineare Funktion) aufgefasst und kann somit als Graf im Koordinatensystem eingezeichnet werden.

Beispiel

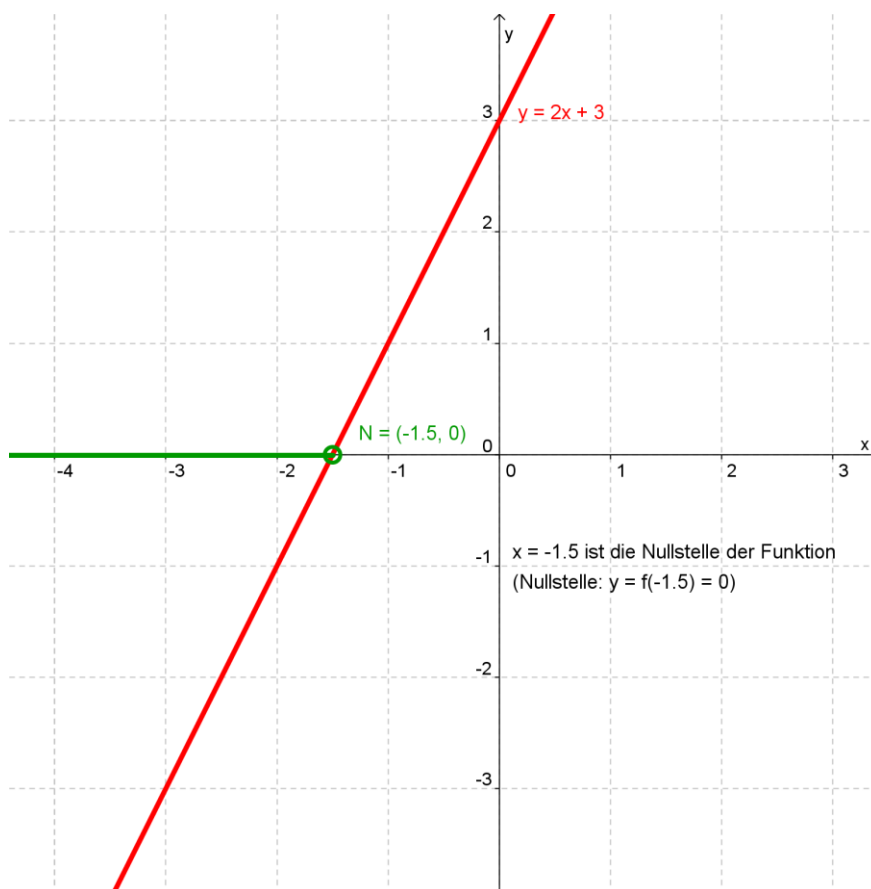
Bestimmen Sie grafisch die Lösungsmenge der Ungleichung $2x + 5 < 2$. ($G = \mathbf{R}$)

$$2x + 5 < 2 \quad | -2$$

$$2x + 3 < 0$$

zugehörige (lineare) Funktion: $y = f(x) = 2x + 3$

Lösung:



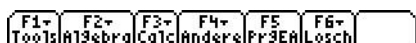
Alle x die in y eingesetzt werden und einen negativen Funktionswert ($y < 0$) ergeben, sind Lösungen der Ungleichung. Somit: $L = \underline{\underline{\{x \in \mathbf{R} \mid x < -1.5\}}}$.

13.10 Ungleichungen mit dem TI kontrollieren

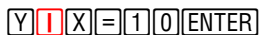
Bei der **Kontrolle von Ungleichungen** muss der gleiche Term mit **verschiedenen x-Werten** getestet werden. Damit das mühsame Eintippen nicht ständig wiederholt werden muss, kann der Term einmal eingetippt und abgespeichert werden. Danach kann der Term mit verschiedenen Werten beliebig oft (und sehr schnell) berechnet werden.

Beispiel: $\frac{5x-20}{x} < 3$ mit $L = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\}$ (Aufgabe 7 von Übung 14.5)

Eingabe:  (der Term auf der linken Seite wird unter y abgespeichert)



Kontrolle: Der Term wird für $x = 10$ wie folgt berechnet:



links von Ziffer 7



Für weitere Kontrollen muss nur der x-Wert geändert werden.
z. B. für $x = 9.99$:



Achtung: Variable kann für neue Berechnungen überschrieben werden.
Oder mit [2nd][VAR-LINK] kann die Variable auch gelöscht werden.

13.11 Betragsgleichungen

Gleichungen, in denen die Unbekannte in Beträgen vorkommt, heissen Betragsgleichungen. Beim Auflösen des Betrages müssen Fallunterscheidungen vorgenommen werden. Ist $T(x)$ ein Term mit der Variablen x , so gilt:

$$|T(x)| = \begin{cases} T(x) & \text{für } T(x) \geq 0 \\ -T(x) & \text{für } T(x) < 0 \end{cases} \quad \text{Beispiele: } \begin{matrix} |6| = 6 \\ |-6| = -(-6) = 6 \end{matrix}$$

Beispiel 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Betragsgleichung $|4x| = 12$. ($G = \mathbb{R}$)

$D = \mathbb{R}$

1. Fall $|+| \rightarrow (x \geq 0)$

$4x = 12 \quad | :4$

$x = 3$ Da die Lösung im Intervall $[0; \infty[$ liegt, gehört sie zur Lösungsmenge.

$x \geq 0$

$L_1 = \{3\}$

2. Fall $|-| \rightarrow (x < 0)$

$-4x = 12 \quad | :(-4)$

$x = -3$ Da die Lösung im Intervall $] -\infty; 0[$ liegt, gehört sie zur Lösungsmenge.

$x < 0$

$L_2 = \{-3\}$

Lösungsmenge

$L = L_1 \vee L_2 = \{3, -3\}$

Kontrolle durch Einsetzen der Lösungen in die **ursprüngliche Betragsgleichung** oder mit TI:



```

■ Löse(|4·x| = 12, x)
      x = 3 or x = -3
Löse(abs(4x)=12,x)
MAIN          GRD AUTO      FKT          1/30
    
```


Beispiel 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Betragsgleichung $|x - 1| = 5$. ($G = \mathbb{R}$)

$D = \mathbb{R}$

1. Fall $|+| \rightarrow (x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1)$

$$x - 1 = 5 \quad | +1$$

$x = 6$ Da die Lösung im Intervall $[1; \infty[$ liegt, gehört sie zur Lösungsmenge.

$x \geq 1$

$$L_1 = \{6\}$$

2. Fall $|-| \rightarrow (x - 1 < 0 \rightarrow x < 1)$

$$-(x - 1) = 5$$

$$-x + 1 = 5 \quad | +1$$

$x = -4$ Da die Lösung im Intervall $]-\infty; 1[$ liegt, gehört sie zur Lösungsmenge.

$x < 1$

$$L_2 = \{-4\}$$

Lösungsmenge

$$L = L_1 \vee L_2 = \{6, -4\}$$

Kontrolle durch Einsetzen der Lösungen in die **ursprüngliche Betragsgleichung** oder mit TI:



■ Löse(|x - 1| = 5, x)

x = 6 or x = -4

Löse(abs(x-1)=5, x)

MAIN GRD AUTO FKT 1/30

Beispiel 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Betragsgleichung $|2x - 3| = 4x - 7$. ($G = \mathbb{R}$)

$D = \mathbb{R}$

1. Fall $|+| \rightarrow \left(2x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2} \right)$

$$2x - 3 = 4x - 7 \qquad \qquad \qquad | -2x \quad | +7$$

$$4 = 2x \qquad \qquad \qquad | :2$$

$x = 2$ Da die Lösung im Intervall $\underbrace{[3/2; \infty[}_{x \geq \frac{3}{2}}$ liegt, gehört sie zur Lösungsmenge.

$$L_1 = \{2\}$$

2. Fall $|-| \rightarrow \left(2x - 3 < 0 \rightarrow x < \frac{3}{2} \right)$

$$-(2x - 3) = 4x - 7$$

$$-2x + 3 = 4x - 7 \qquad \qquad \qquad | +2x \quad | +7$$

$$10 = 6x \qquad \qquad \qquad | :6$$

$x = \frac{5}{3}$ Da die Lösung **nicht** im Intervall $\underbrace{]-\infty; 3/2[}_{x < \frac{3}{2}}$ liegt, gehört sie **nicht** zur Lösungsmenge.

$$L_2 = \{ \}$$

Lösungsmenge

$$L = L_1 \vee L_2 = \underline{\underline{\{2\}}}$$

Kontrolle durch Einsetzen der Lösungen in die **ursprüngliche Betragsgleichung** oder mit TI:



■ Löse(|2·x - 3| = 4·x - 7, x)

x = 2

Löse(abs(2x-3)=4x-7, x)

MAIN GRD AUTO FKT 1/30

13.12 Übungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsgleichungen.

1. $|x| - 1 = 1$ (G = \mathbf{R})

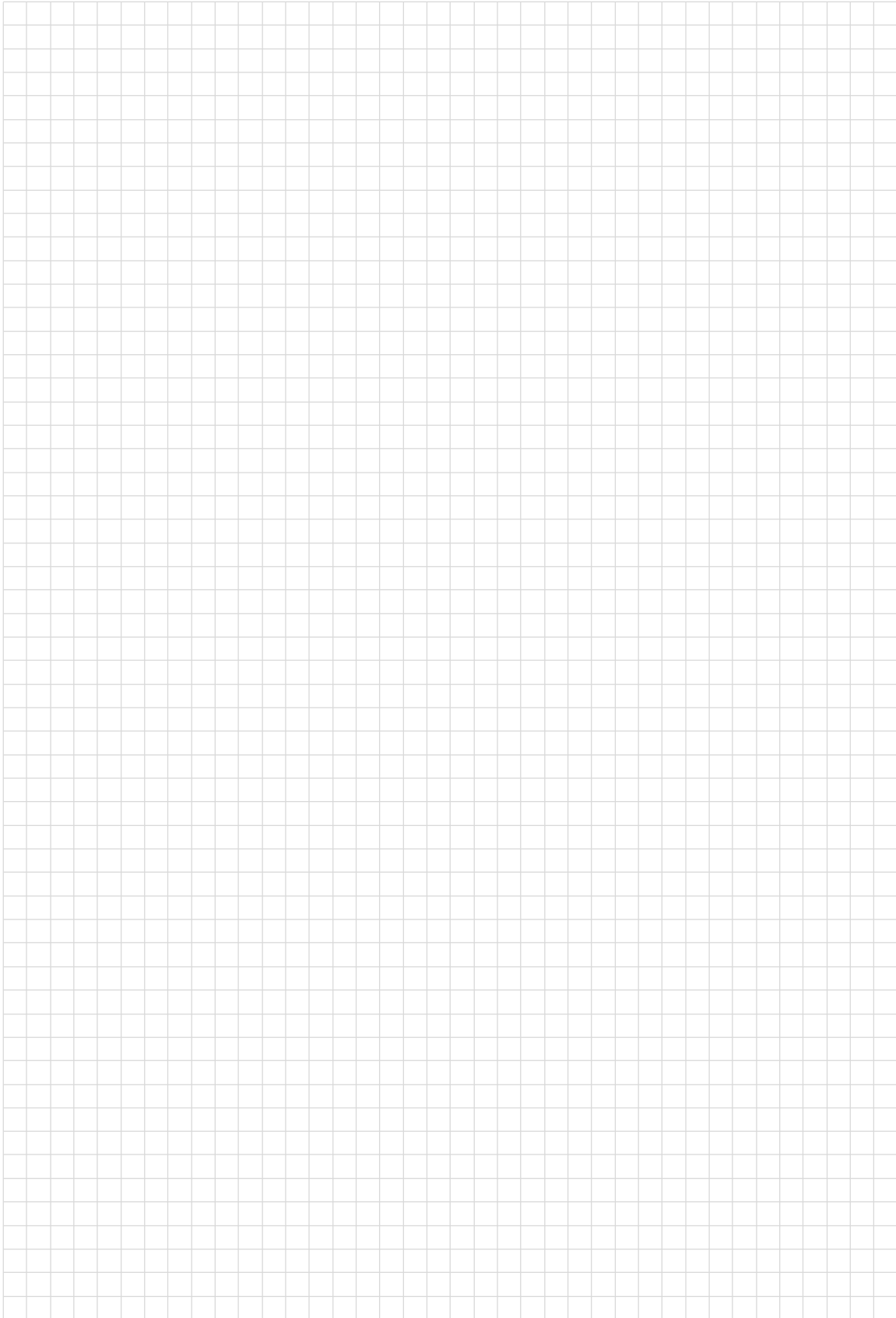
1. Methode (ohne Festlegung von Intervallen)

2. Methode (mit Festlegung von Intervallen)

Kontrolle:

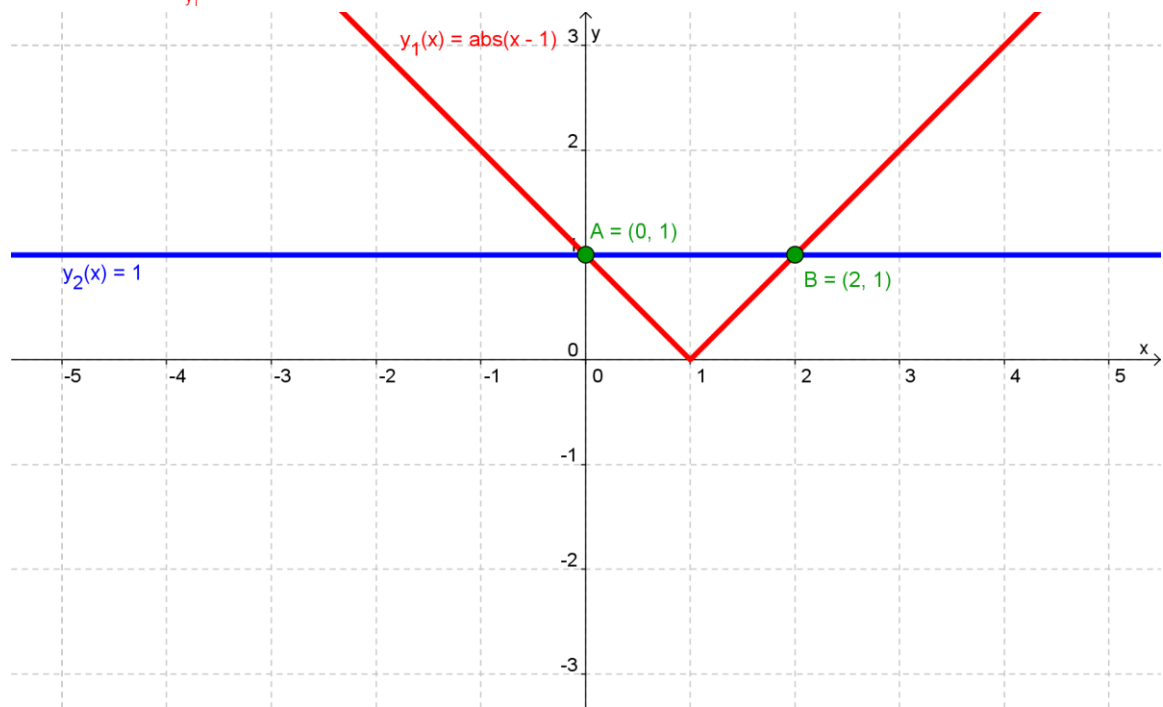
2. $|x-1|=1$

(G=R)

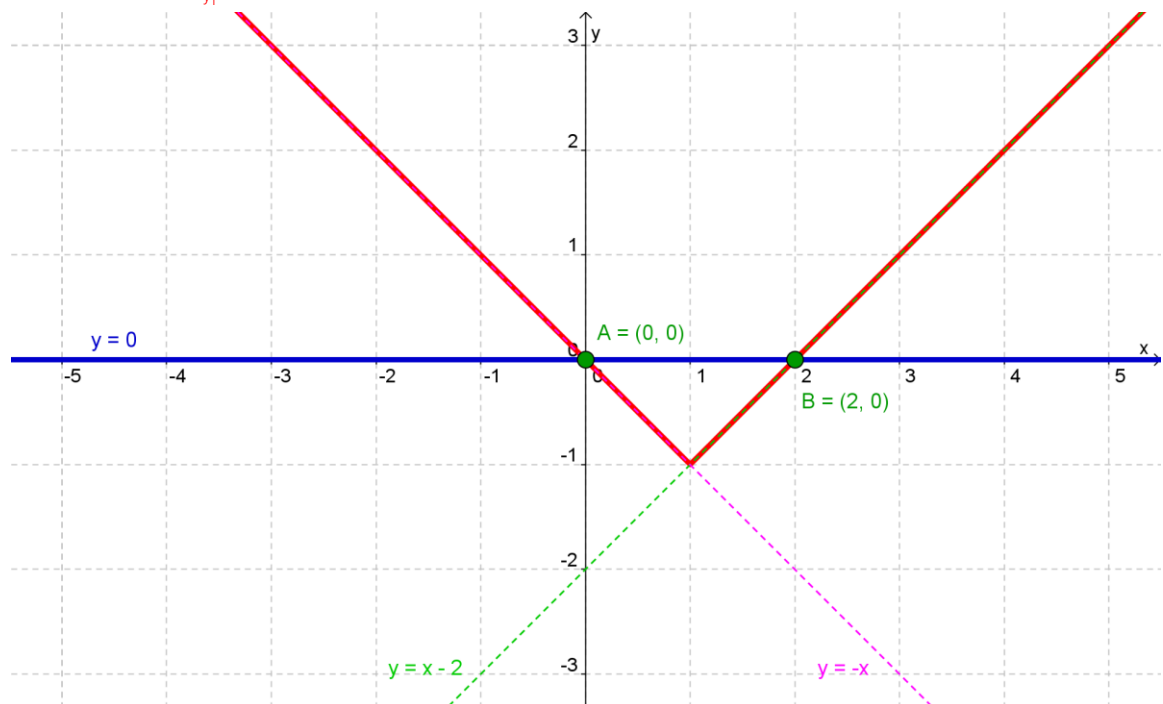


Grafische Darstellung der Lösungsmenge von Aufgabe 2

Variante 1: $|x - 1| = 1$
 y_1 y_2

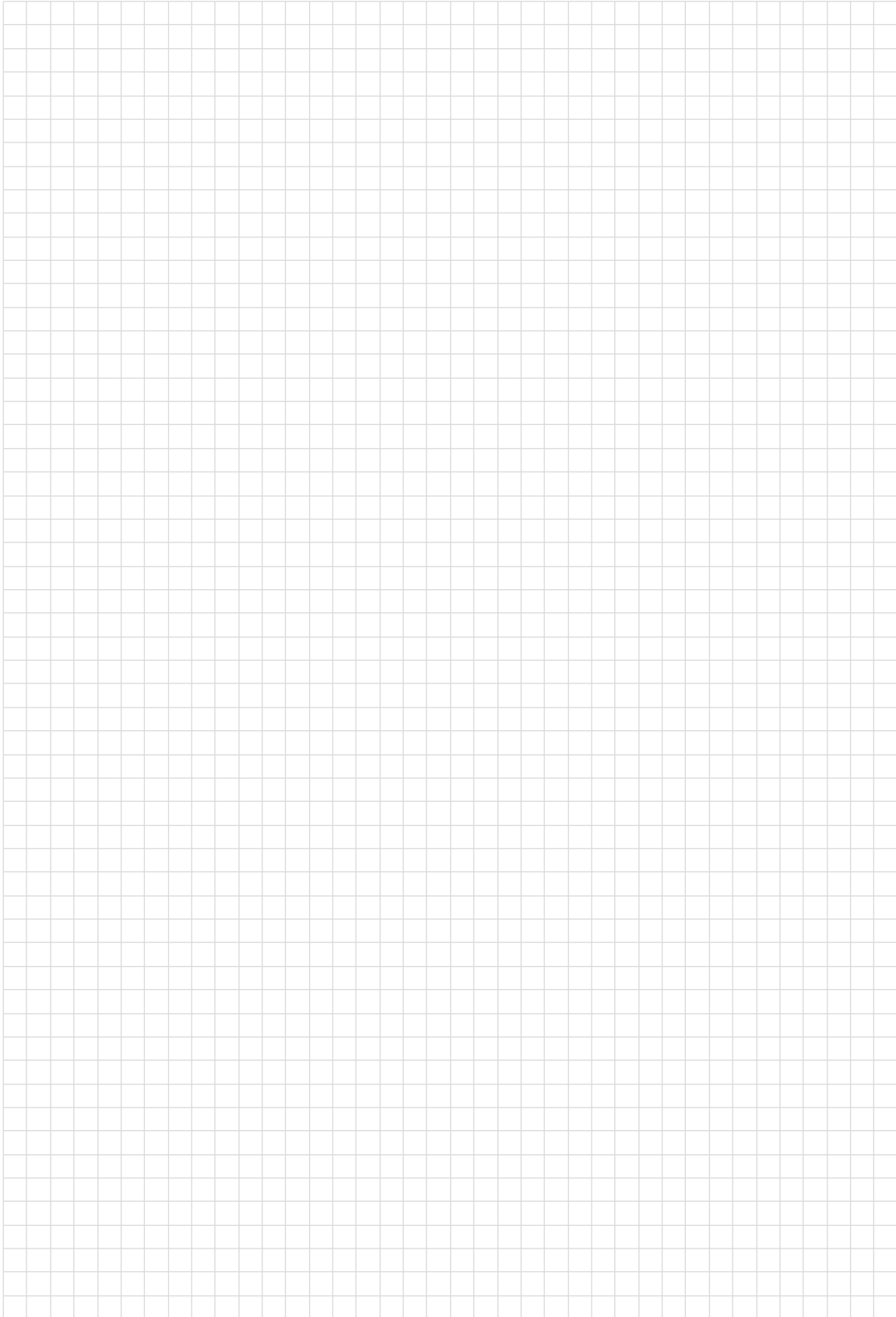


Variante 2: $\underbrace{|x-1|}_{y_1} - 1 = 0 \rightarrow y_1 = |x-1| - 1$ $\begin{cases} y_1 = x-1-1 = x-2 & \text{für } x \geq 1 \\ y_1 = -(x-1)-1 = -x & \text{für } x < 1 \end{cases}$



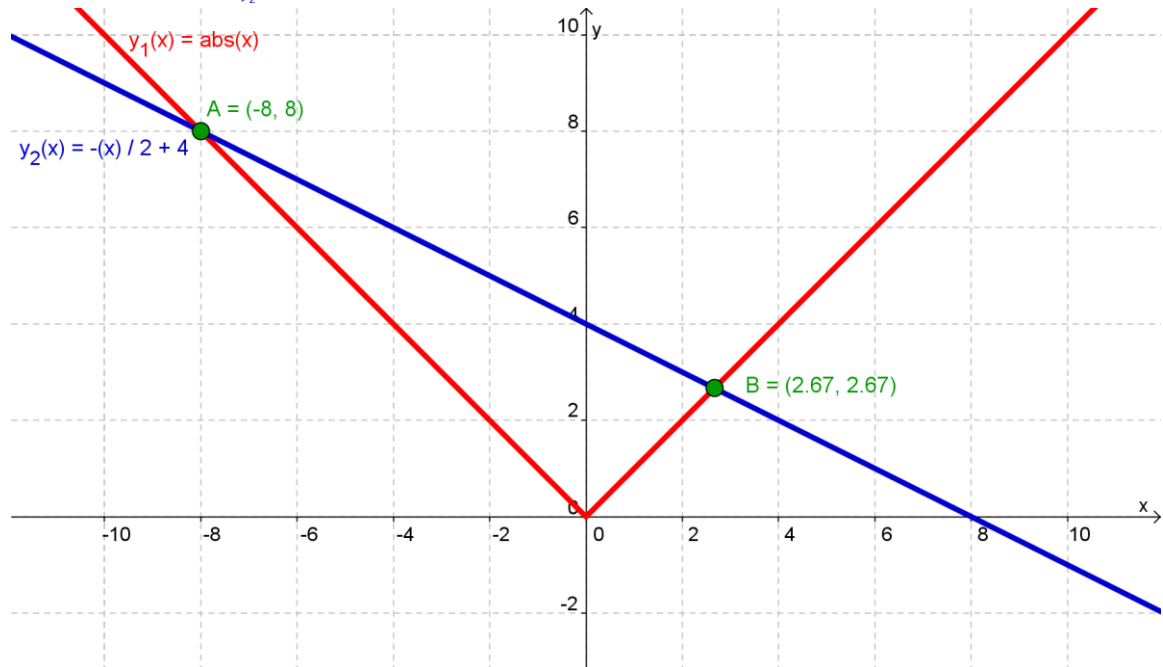
3. $|x| = 4 - \frac{x}{2}$

(G = R)



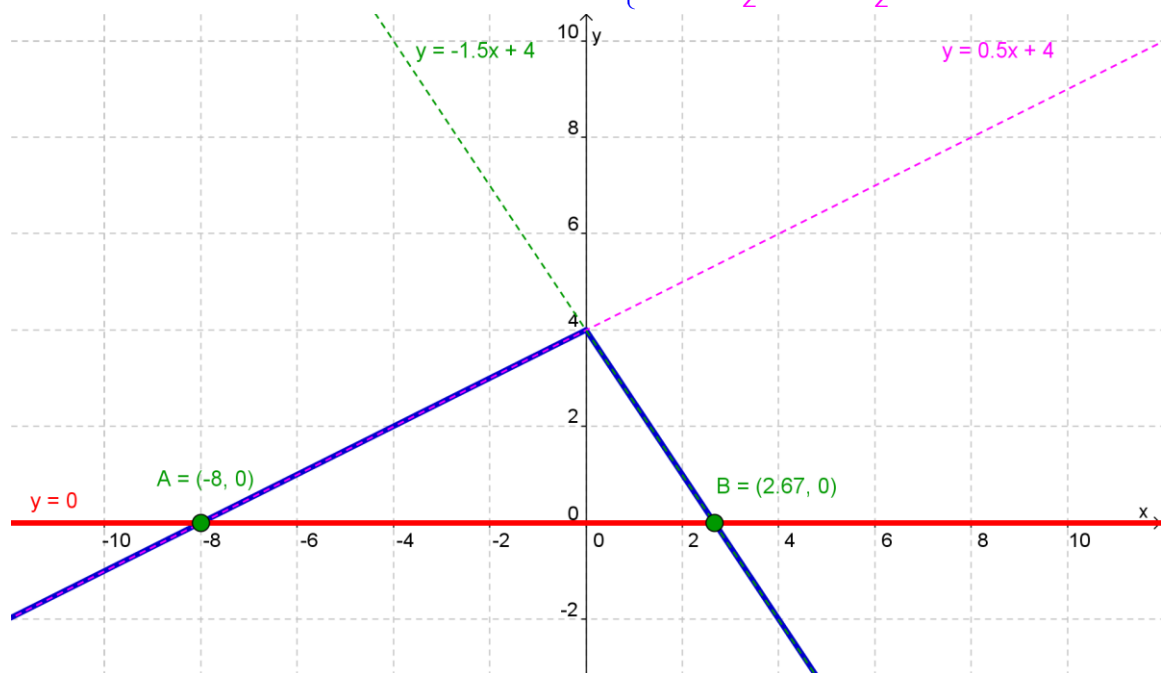
Grafische Darstellung der Lösungsmenge von Aufgabe 3

Variante 1: $|x| = 4 - \frac{x}{2}$



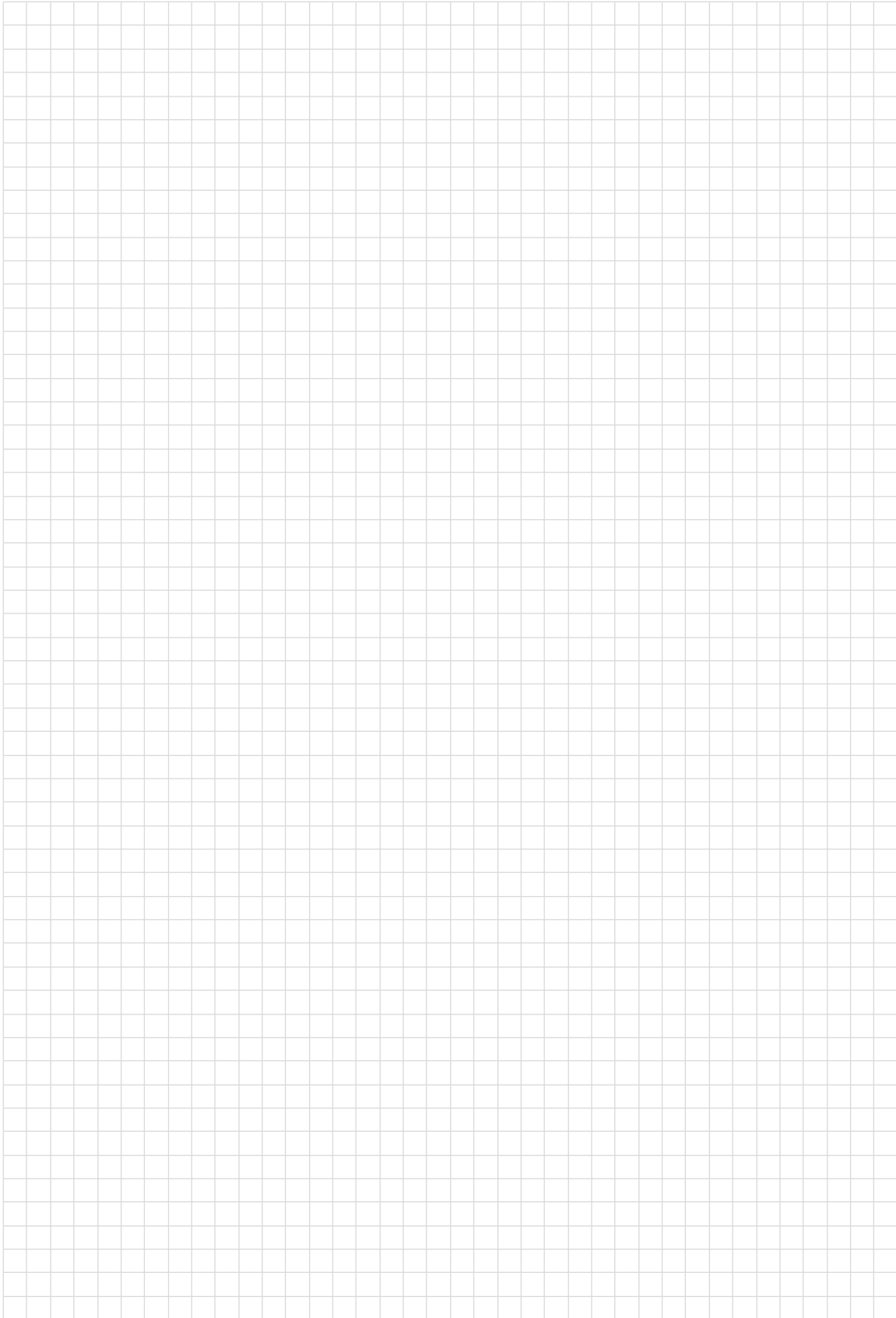
Variante 2: $0 = 4 - \frac{x}{2} - |x| \rightarrow y_2 = 4 - \frac{x}{2} - |x|$

$$\begin{cases} y_2 = 4 - \frac{x}{2} - x = -\frac{3}{2}x + 4 & \text{für } x \geq 0 \\ y_2 = 4 - \frac{x}{2} - (-x) = \frac{1}{2}x + 4 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



4. $|x-1|+|x-2|=5$

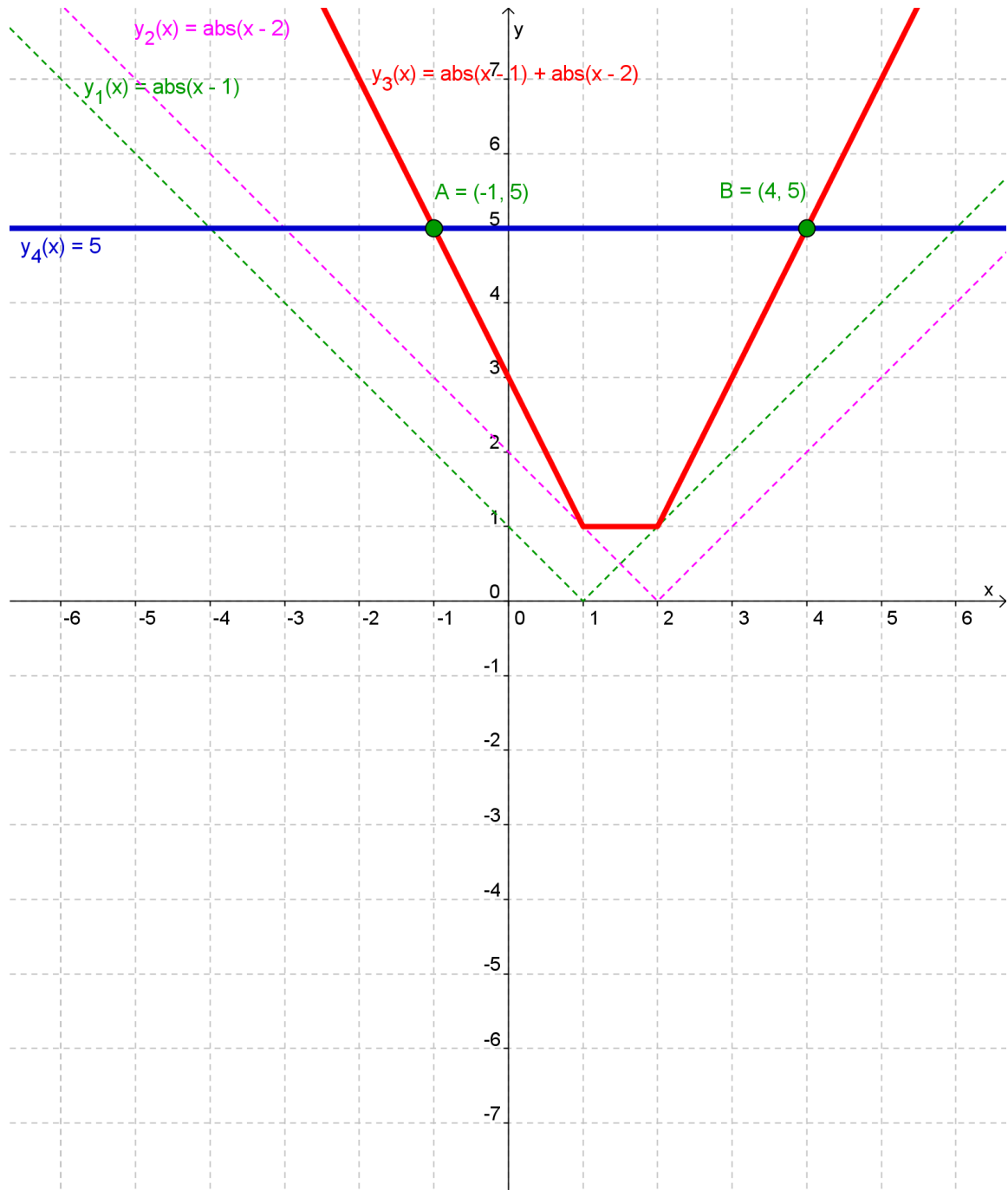
$(G=R)$



Grafische Darstellung der Lösungsmenge von Aufgabe 4

$$|x - 1| + |x - 2| = 5$$

$\underbrace{\quad}_{y_1} \quad \underbrace{\quad}_{y_2} \quad \underbrace{\quad}_{y_4}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{y_3}$



13.13 Betragsungleichungen

Wird in einer Betragsgleichung das Gleichheitszeichen durch " \leq ", " $<$ ", " \geq " bzw. " $>$ " ersetzt, entsteht eine Betragsungleichung. Betragsungleichungen können entsprechend den bereits behandelten Regeln (Betragsgleichungen bzw. Ungleichungen) gelöst werden. Allgemein sind die Lösungsmengen von Betragsungleichungen Vereinigungen von Intervallen.

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Betragsungleichung $|x - 5| > 4$. ($G = \mathbb{R}$)

$$D = \mathbb{R}$$

$$\text{1. Fall } | + | \rightarrow (x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5)$$

$$x - 5 > 4 \quad | +4$$

$$x > 9$$

$$L_1 = \{x | x \geq 5 \wedge x > 9\} = \{x | x > 9\}$$

$$\text{2. Fall } | - | \rightarrow (x - 5 < 0 \rightarrow x < 5)$$

$$-(x - 5) > 4 \quad | \text{Klammer auflösen}$$

$$-x + 5 > 4 \quad | -5$$

$$-x > -1 \quad | :(-1)$$

$$x < 1$$

$$L_2 = \{x | x < 5 \wedge x < 1\} = \{x | x < 1\}$$

Lösungsmenge

$$L = L_1 \vee L_2 = \{x | x > 9 \vee x < 1\}$$

Kontrolle

$$T(0): \quad |0 - 5| > 4 \rightarrow 5 > 4 \quad (w) \text{ korrekt!}$$

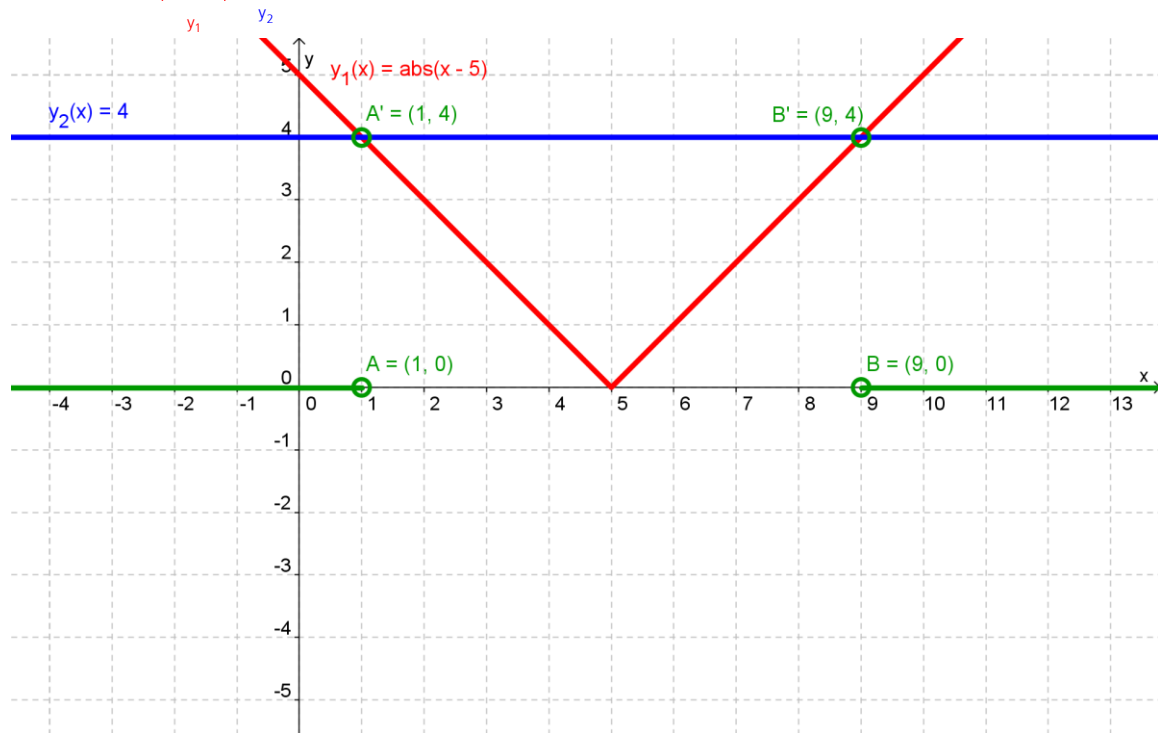
$$T(1): \quad |1 - 5| > 4 \rightarrow 4 > 4 \quad (f) \text{ korrekt!}$$

$$T(9): \quad |9 - 5| > 4 \rightarrow 4 > 4 \quad (f) \text{ korrekt!}$$

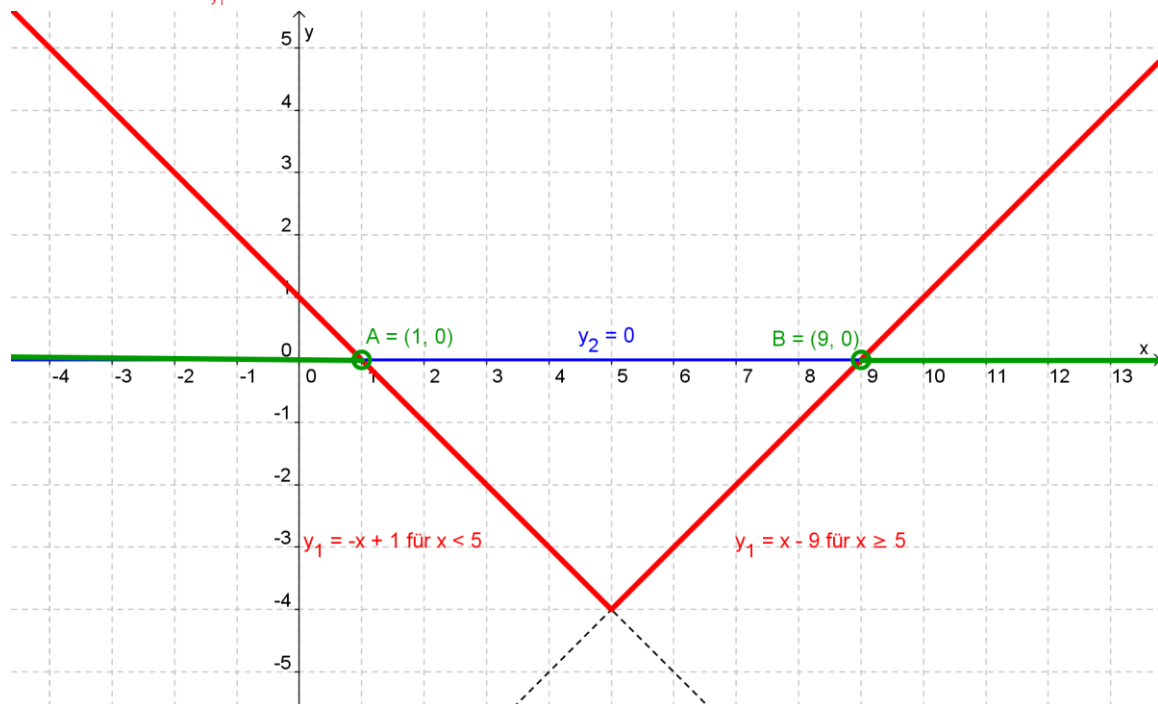
$$T(10): \quad |10 - 5| > 4 \rightarrow 5 > 4 \quad (w) \text{ korrekt!}$$

Grafische Darstellung der Lösungsmenge des Beispiels

Variante 1: $|x - 5| > 4$



Variante 2: $\underbrace{|x - 5| - 4}_{y_1} > 0 \rightarrow y_1 = |x - 5| - 4 \begin{cases} y_{1+} = x - 5 - 4 = x - 9 & \text{für } x \geq 5 \\ y_{1-} = -x + 5 - 4 = -x + 1 & \text{für } x < 5 \end{cases}$



13.14 Übungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsungleichungen.

1. $|x-7| < 4$ (G = R)

$$D = \mathbb{R}$$

1. Fall $|+| \rightarrow (x-7 \geq 0 \rightarrow x \geq 7)$

$$x-7 < 4 \qquad | +7$$

$$x < 11$$

$$L_1 = \left\{ x \mid \begin{array}{l} x \geq 7 \\ \text{und} \\ x < 11 \end{array} \right\} = \{x \mid 7 \leq x < 11\}$$

2. Fall $|-| \rightarrow (x-7 < 0 \rightarrow x < 7)$

$$-(x-7) < 4 \qquad | \text{Klammer auflösen}$$

$$-x+7 < 4 \qquad | -7$$

$$-x < -3 \qquad | \cdot (-1)$$

$$x > 3$$

$$L_2 = \left\{ x \mid \begin{array}{l} x < 7 \\ \text{und} \\ x > 3 \end{array} \right\} = \{x \mid 3 < x < 7\}$$

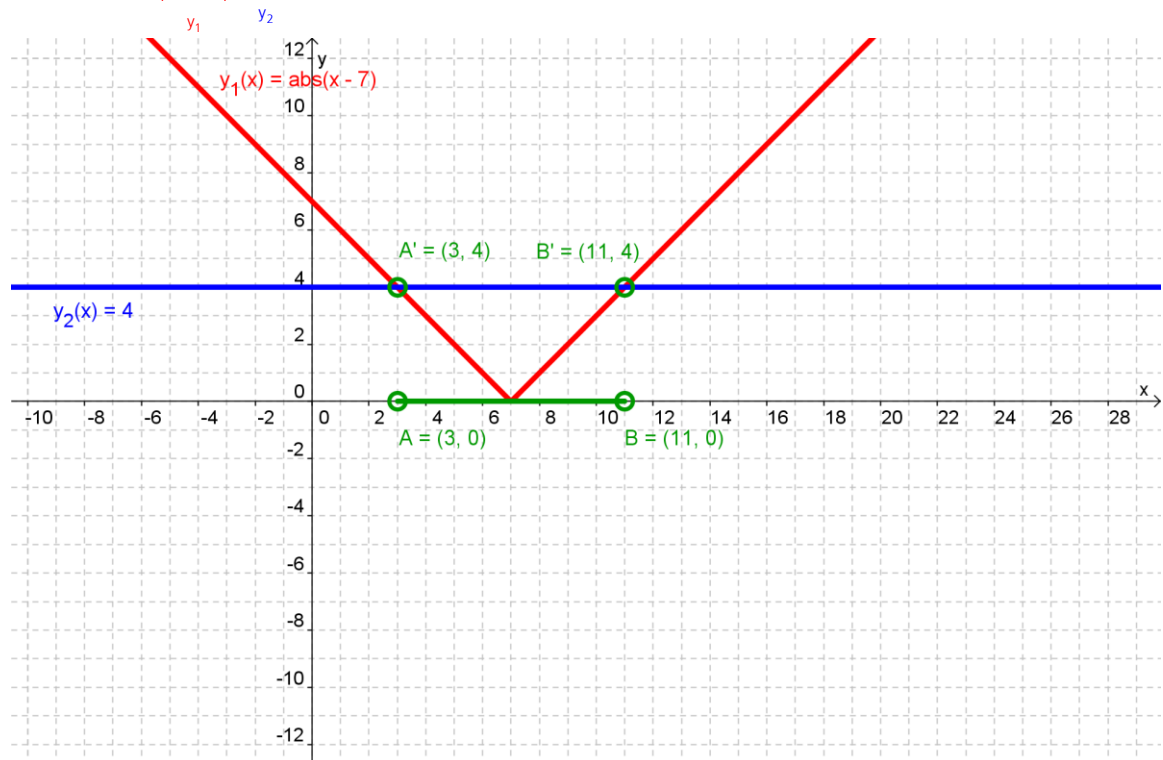
grafische Lösung:



somit: $L = L_1 \vee L_2 = \underline{\underline{\{x \mid 3 < x < 11\}}}$

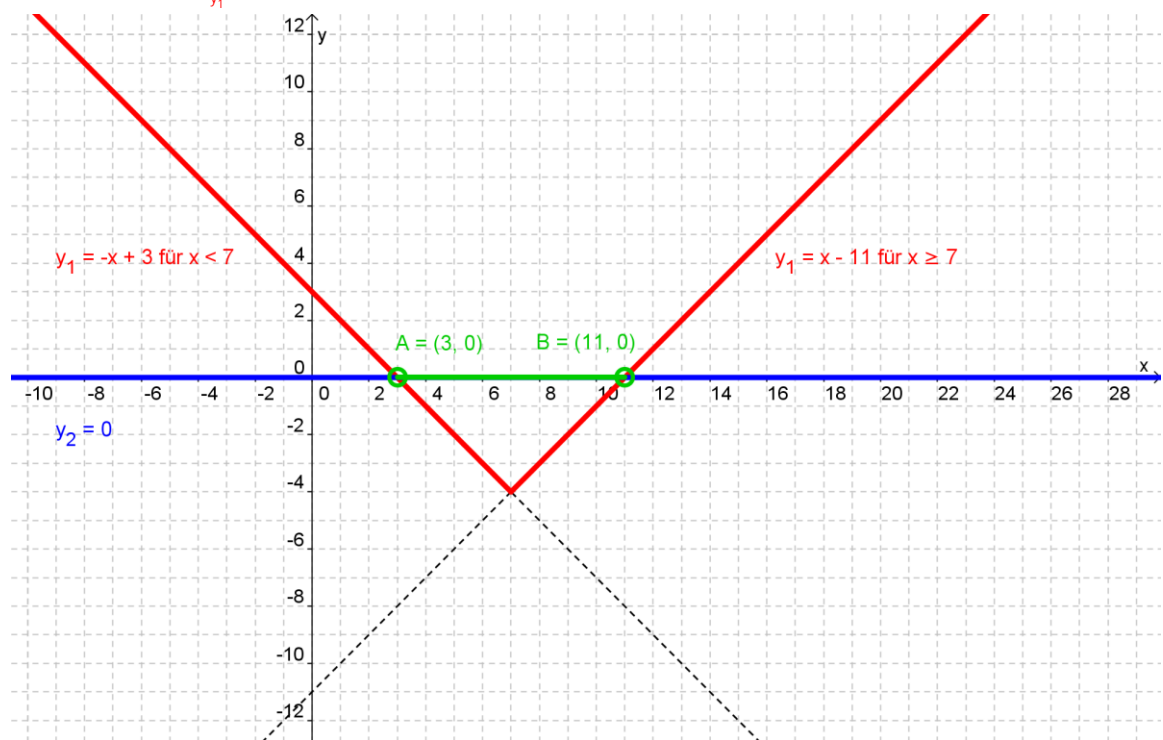
Grafische Darstellung der Lösungsmenge von Aufgabe 1

Variante 1: $|x - 7| < 4$



Variante 2: $\underbrace{|x - 7| - 4}_{y_1} < 0 \rightarrow y_1 = |x - 7| - 4$

$\begin{cases} y_{1+} = x - 7 - 4 = x - 11 & \text{für } x \geq 7 \\ y_{1-} = -x + 7 - 4 = -x + 3 & \text{für } x < 7 \end{cases}$
--



2. $\left| \frac{x-3}{x+5} \right| > 6$ (G = R)

$D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

1. Fall $|+| > 6$

$$\frac{x-3}{x+5} > 6$$

$$\frac{x-3}{x+5} - 6 > 0$$

$$\frac{x-3-(6x+30)}{x+5} > 0$$

$$\frac{x-3-6x-30}{x+5} > 0$$

$$\frac{-5x-33}{x+5} > 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{5x+33}{x+5} < 0 \quad (2 \text{ Fälle möglich})$$

2. Fall $|-| > 6$

$$-\left(\frac{x-3}{x+5}\right) > 6 \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{x-3}{x+5} < -6 \quad | +6$$

$$\frac{x-3+6(x+5)}{x+5} < 0$$

$$\frac{x-3+6x+30}{x+5} < 0$$

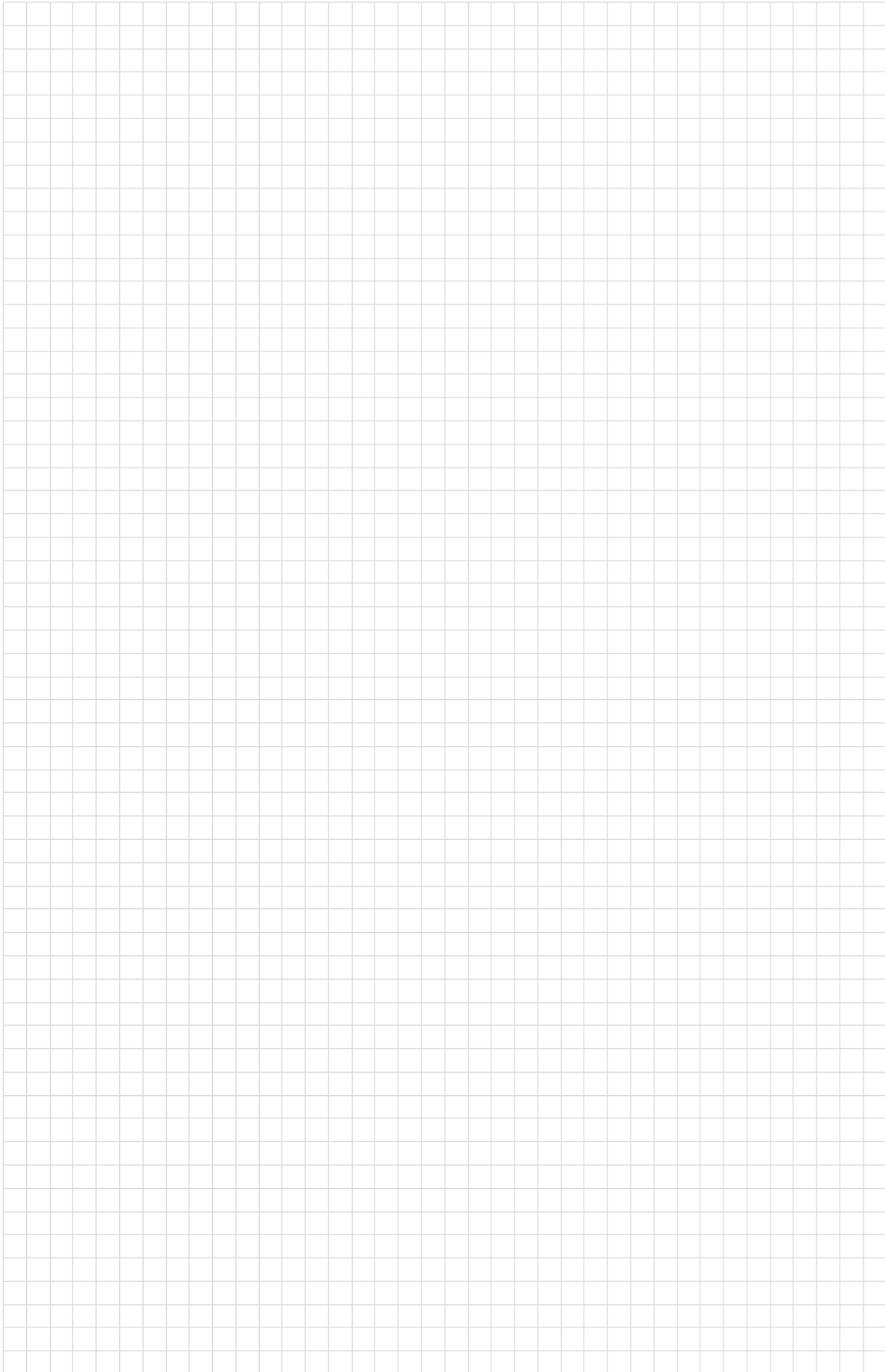
$$\frac{7x+27}{x+5} < 0 \quad (2 \text{ Fälle möglich})$$

$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix} < 0$	$\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} < 0$	$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix} < 0$	$\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} < 0$
$5x > -33 \wedge x < -5$ $x > \frac{-33}{5} \wedge x < -5$	$5x < -33 \wedge x > -5$ $x < \frac{-33}{5} \wedge x > -5$	$7x > -27 \wedge x < -5$ $x > \frac{-27}{7} \wedge x < -5$	$7x < -27 \wedge x > -5$ $x < \frac{-27}{7} \wedge x > -5$
$L_1 = \left\{ x \mid \frac{-33}{5} < x < -5 \right\}$	$L_2 = \{ \}$	$L_3 = \{ \}$	$L_4 = \left\{ x \mid -5 < x < \frac{-27}{7} \right\}$

somit:
$$L = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{-33}{5} < x < -5 \vee -5 < x < \frac{-27}{7} \right\}$$

oder:
$$L = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{-33}{5} < x < \frac{-27}{7} \right\} \setminus \{-5\}$$





3. $\left| \frac{x+3}{1-x} \right| > 3$

(G = R) (Schäfer, Aufg. 22a, Seite 233)

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

1. Fall $|+| > 3$

$$\frac{x+3}{1-x} > 3$$

$$\frac{x+3}{1-x} - 3 > 0$$

$$\frac{x+3-3(1-x)}{1-x} > 0$$

$$\frac{x+3-3+3x}{1-x} > 0$$

$$\frac{4x}{1-x} > 0 \quad (2 \text{ Fälle möglich})$$

2. Fall $|-| > 3$

$$-\left(\frac{x+3}{1-x}\right) > 3 \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{x+3}{1-x} < -3$$

$$\frac{x+3}{1-x} + 3 < 0$$

$$\frac{x+3+3(1-x)}{1-x} < 0$$

$$\frac{x+3+3-3x}{1-x} < 0$$

$$\frac{-2x+6}{1-x} < 0 \quad | \cdot (-2)$$

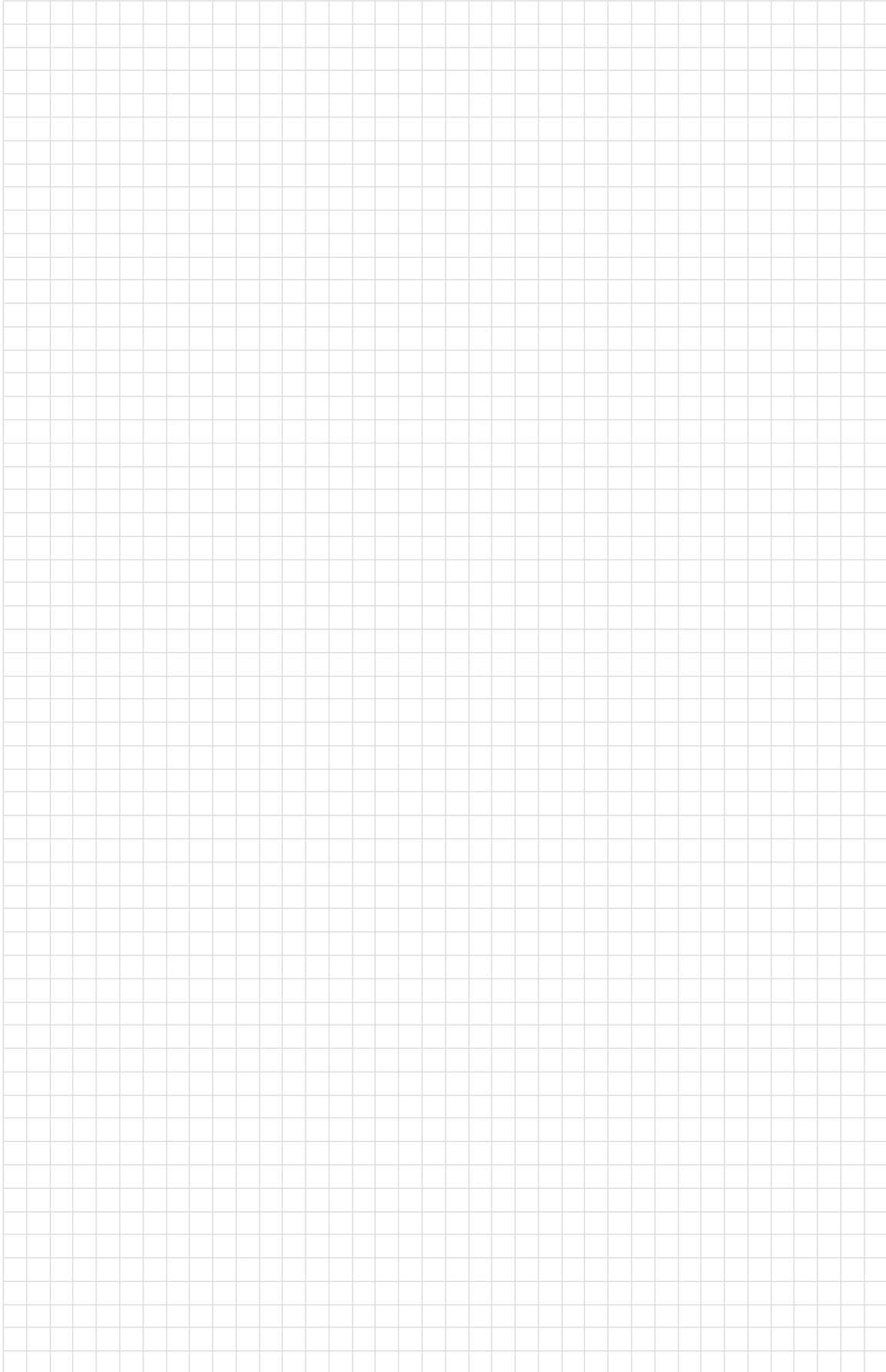
$$\frac{x-3}{1-x} > 0 \quad (2 \text{ Fälle möglich})$$

$\frac{+}{+} > 0$	$\frac{-}{-} > 0$	$\frac{+}{+} > 0$	$\frac{-}{-} > 0$
$x > 0 \wedge 1-x > 0$	$x < 0 \wedge 1-x < 0$	$x-3 > 0 \wedge 1-x > 0$	$x-3 < 0 \wedge 1-x < 0$
$x > 0 \wedge x < 1$	$x < 0 \wedge x > 1$	$x > 3 \wedge x < 1$	$x < 3 \wedge x > 1$
$L_1 = \{x 0 < x < 1\}$	$L_2 = \{ \}$	$L_3 = \{ \}$	$L_4 = \{x 1 < x < 3\}$

somit: $L = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4 = \underline{\underline{\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1 \vee 1 < x < 3\}}}$

oder $L = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4 = \underline{\underline{\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 3\} \setminus \{1\}}}$





13.15 Lineare Ungleichungssysteme

Beispiel 1

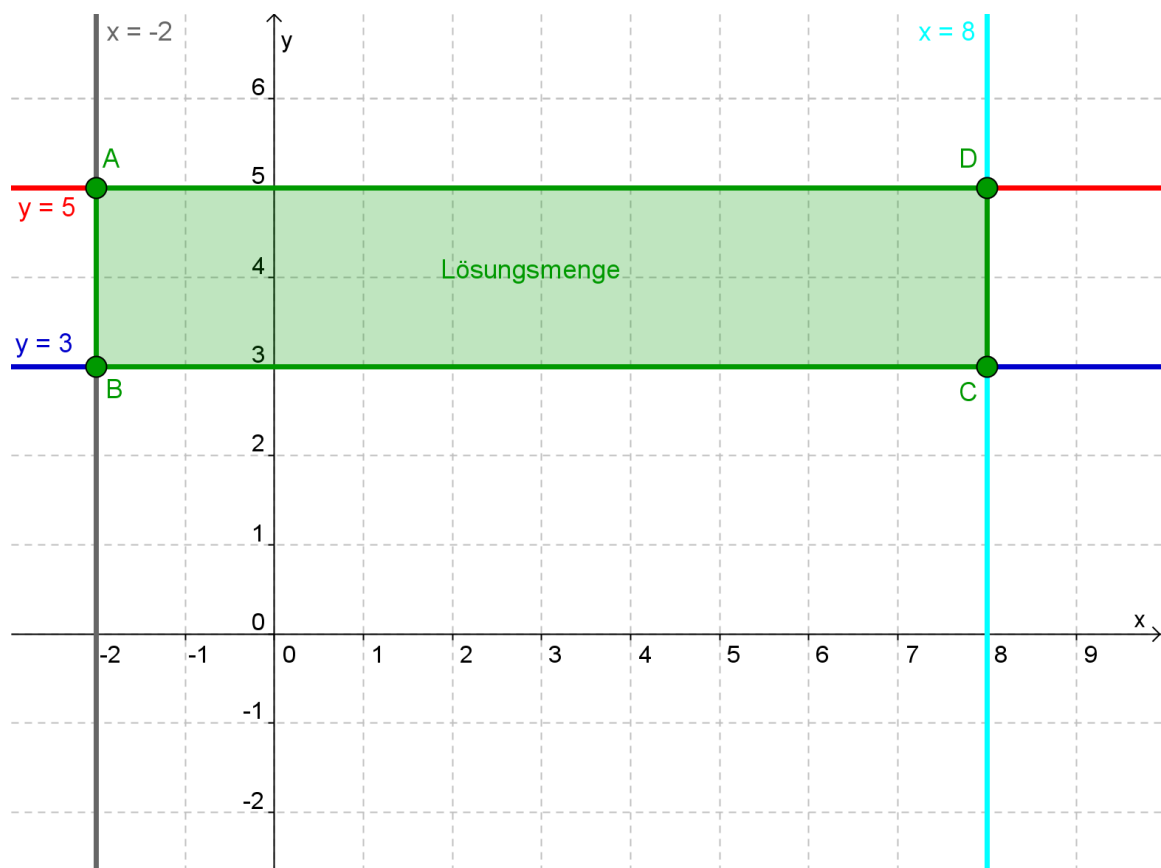
(Frommenwiler, Aufgabe 891a)

Schraffieren Sie das Gebiet, das durch die folgenden Ungleichungen bestimmt ist.

Es gilt $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$-2 \leq x \leq 8 \quad (1)$$

$$3 \leq y \leq 5 \quad (2)$$

Vereinbarung: ausgezogene Linie \rightarrow Randgerade gehört zur Lösungsmenge!gestrichelte Linie \rightarrow Randgerade gehört **nicht** zur Lösungsmenge!

Beispiel 2

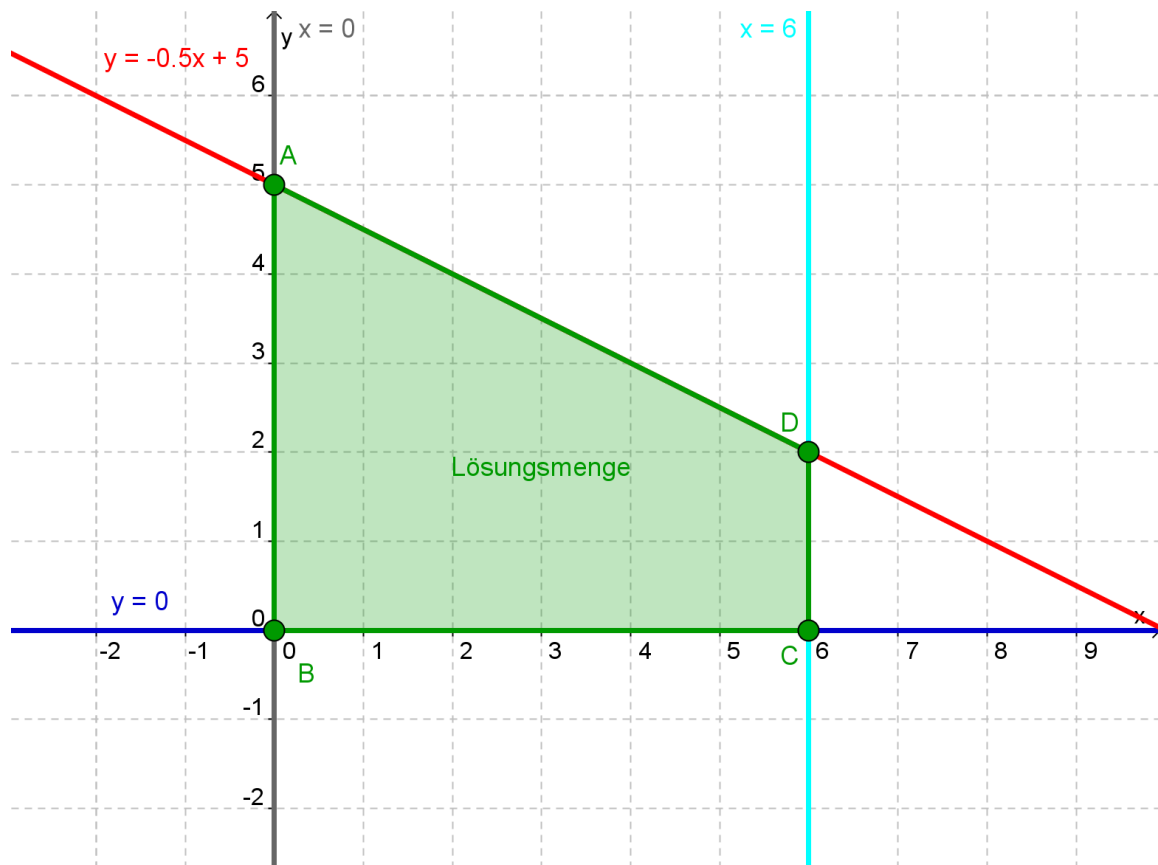
(Frommenwiler, Aufgabe 891b)

Schraffieren Sie das Gebiet, das durch die folgenden Ungleichungen bestimmt ist.

Es gilt $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$0 \leq x \leq 6 \quad (1)$$

$$0 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + 5 \quad (2)$$



Beispiel 3

(Frommenwiler, Aufgabe 892a)

Schraffieren Sie das Gebiet, das durch die folgenden Ungleichungen bestimmt ist.
Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses Gebietes. Es gilt $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

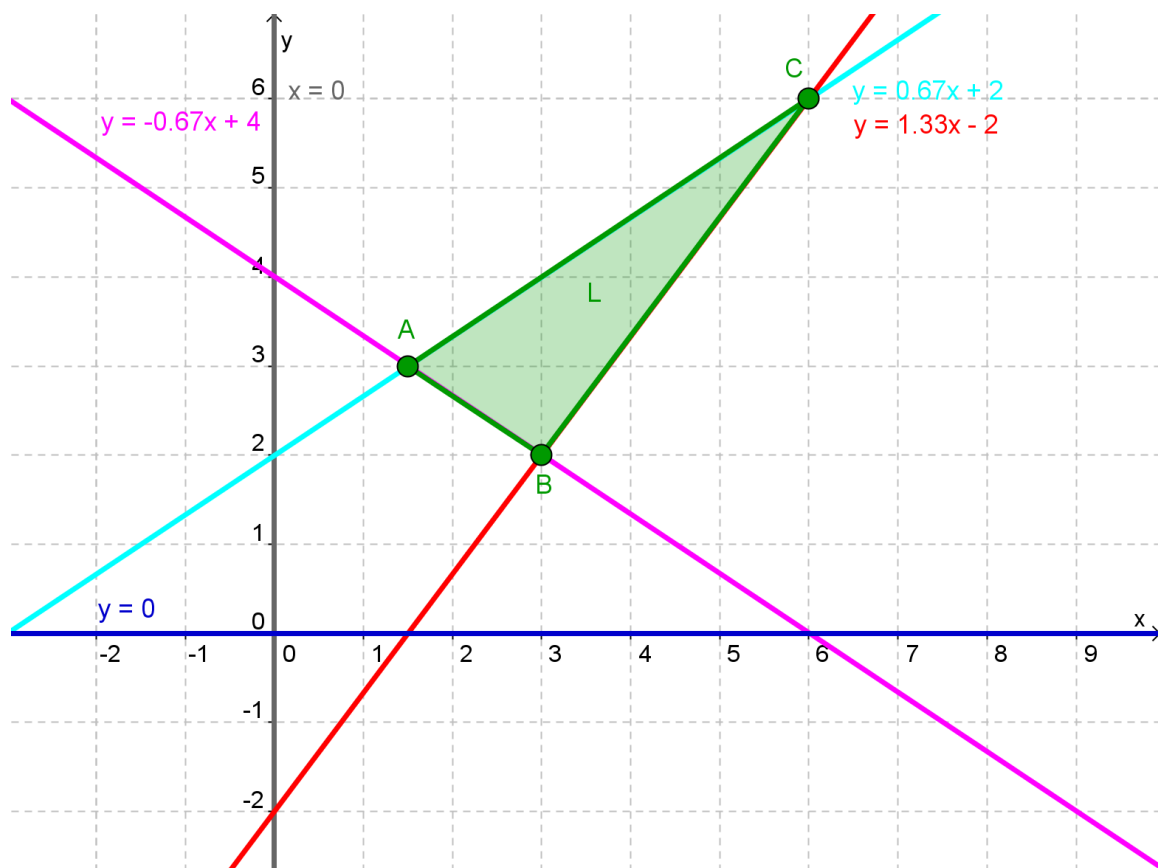
$$x \geq 0 \quad (1)$$

$$y \geq 0 \quad (2)$$

$$y \leq \frac{2}{3}x + 2 \quad (3)$$

$$y \geq -\frac{2}{3}x + 4 \quad (4)$$

$$y \geq \frac{4}{3}x - 2 \quad (5)$$

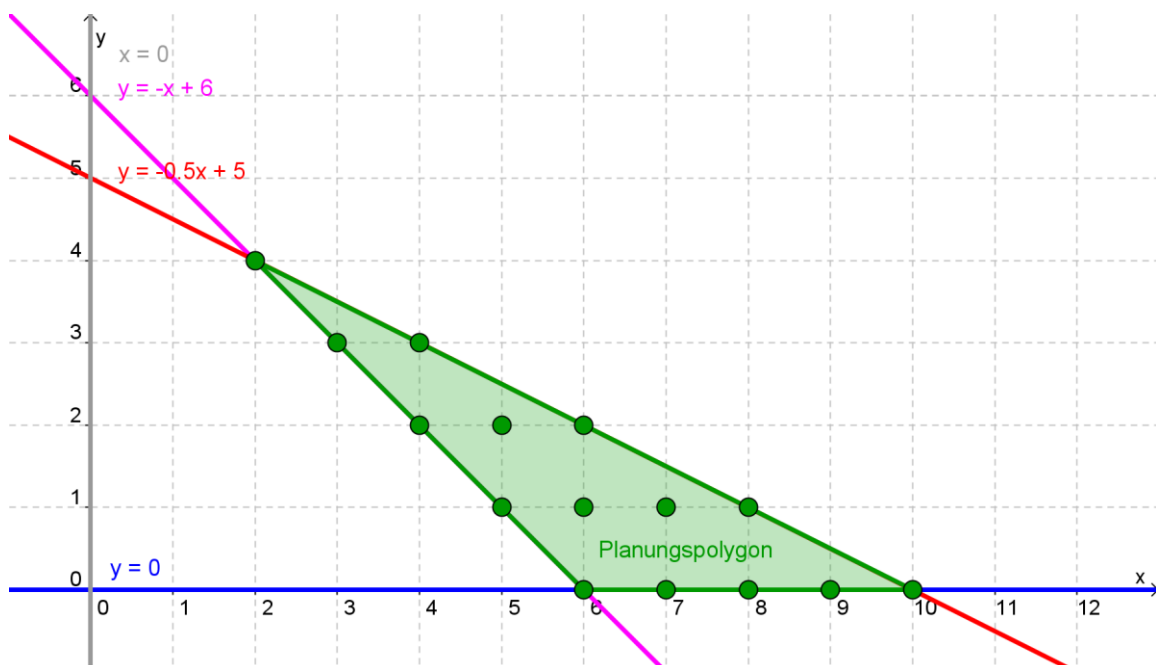


A berechnen:	$y = y \rightarrow \frac{2}{3}x + 2 = -\frac{2}{3}x + 4 \rightarrow \frac{4}{3}x = 2 \rightarrow x = \underline{1.5} \rightarrow \underline{\underline{A(1.5; 3)}}$
B berechnen:	$y = y \rightarrow \frac{4}{3}x - 2 = -\frac{2}{3}x + 4 \rightarrow \frac{6}{3}x = 6 \rightarrow x = \underline{3} \rightarrow \underline{\underline{B(3; 2)}}$
C berechnen:	$y = y \rightarrow \frac{4}{3}x - 2 = \frac{2}{3}x + 2 \rightarrow \frac{2}{3}x = 4 \rightarrow x = \underline{6} \rightarrow \underline{\underline{C(6; 6)}}$

Beispiel 4

(Frommenwiler, Aufgabe 902)

Damit eine Halle optimal beleuchtet werden kann, sind mindestens 6 Beleuchtungskörper notwendig. Bei Verwendung von 250-Watt-Leuchten und 500-Watt-Leuchten darf der stündliche Verbrauch nicht mehr als 2.5 kWh betragen. Wie viele Installationen sind möglich?

Zuordnung der Variablen und Festlegung der Definitionsmenge: x = Anzahl 250 Watt-Leuchten y = Anzahl 500 Watt-Leuchten $D = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ Ungleichungssystem aufstellen (Nebenbedingungen, Einschränkungen, Restriktionen): $x \geq 0 \wedge y \geq 0$ (folgt direkt aus der Grundmenge) $x + y \geq 6 \rightarrow y \geq -x + 6$ $x \cdot 250 + y \cdot 500 \leq 2'500 \rightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + 5$ Ungleichungen ins Koordinatensystem einzeichnen:

Lösung: Es sind 15 Installationen möglich, die die Bedingungen einhalten!

13.16 Lineare Optimierung

In unserer Wirtschaft und Technik treten Probleme auf, die mit Hilfe geeigneter Ungleichungssysteme gelöst werden können. Solche Probleme sind zum Beispiel:

- Wie kann die Kapazität von Maschinen so eingesetzt werden, dass der Gewinn **möglichst gross** wird?
- Wie müssen Transportmittel eingesetzt werden, damit die anfallenden **Kosten so gering wie möglich** bleiben?
- Wie viel Waren von welcher Sorte müssen eingekauft werden, damit bei gegebenem Verkaufspreis ein optimaler Gewinn erzielt werden kann?

Zur Lösung solcher Probleme verbindet man genau wie bei der Aufstellung von Textgleichungen die vorgegebenen Bedingungen mit den Variablen x und y in Form von Ungleichungen. Durch die Aufgabenstellung wird nach einer sogenannten **Zielfunktionsgleichung** $z = ax + by$ gefragt, die so klein wie möglich (z. B. Kosten) oder so gross wie möglich (z. B. Gewinn) werden soll. Die Zielfunktion z ist also immer die Grösse, welche optimiert werden soll.

Lösungsschema zum linearen Optimieren mit zwei Lösungsvariablen

- Zuordnung der Variablen und Festlegung der Definitionsmenge.
- Die Aussagen des Textes in Form von Ungleichungen darstellen.
Achtung: Definitionsmenge nicht vergessen! Aus $D = \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ folgt: $x \geq 0$ und $y \geq 0$
- Die Ungleichungen werden in einem Koordinatensystem grafisch dargestellt. Die Fläche, die von den Geraden berandet wird, nennt man Planungspolygon (Planungsvieleck).
- Für das zu optimierende Problem (Minimum bzw. Maximum) wird eine Funktion aufgestellt. Diese Funktion heisst Zielfunktion (z_{\min} bzw. z_{\max}) und ist eine Gerade.
- Steigung der Zielfunktion einzeichnen:
Die Steigung der Zielfunktion z ist bekannt und kann in das Planungsvieleck eingezeichnet werden (z. B. für $z = 0$ verläuft diese Hilfsgerade durch den Nullpunkt).
- Nun wird die Hilfsgerade parallel in dem Planungsvieleck verschoben, dass sie durch den äussersten Eckpunkt oder der äussersten Kante verläuft. **Bei einem Maximum muss der y-Achsenabschnitt maximal bei einem Minimum entsprechend minimal sein!**
- Die x - bzw. y -Koordinaten dieses Eckpunktes, eingesetzt in die Zielfunktion, ergeben den optimalen Wert für die Zielfunktion. Da das Herauslesen aus der Grafik zu ungenau ist, wird der Schnittpunkt berechnet.
- Falls die Gerade der Zielfunktion mit einer Kante des Planungsvielecks zusammenfällt, gibt es unendlich viele Lösungen, die durch den Abschnitt der betreffenden Gerade beschrieben werden.
- Für den Fall, dass die Nebenbedingungen von drei Entscheidungsvariablen abhängen, ergibt sich die Lösung als Schnittmenge von Ebenen, deren grafische Darstellungen entsprechend schwierig ist.

Beispiel 1

Ein EDV-Fachgeschäft bietet Monitore mit einer Bilddiagonalen von 17 sowie mit einer von 21 Zoll an. Gemäss Vorgaben sollen von den 21 Zoll-Modellen höchstens 20 Stück mehr als von den 17 Zoll-Modellen angeschafft werden. Von den 17 Zoll-Modellen sollen höchstens 40 Stück, von beiden Modellen zusammen höchstens 60 Stück gekauft werden. Der Gewinn für ein 17 Zoll-Modell beträgt CHF 40.–, für ein 21 Zoll-Modell CHF 50.–. Bei welchen Stückzahlen ist der Gewinn am grössten **und** wie gross ist er?

Zuordnung der Variablen und Festlegung der Definitionsmenge:

x = Anzahl 17 Zoll-Modelle

y = Anzahl 21 Zoll-Modelle

$D = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

Ungleichungssystem aufstellen (Nebenbedingungen, Einschränkungen, Restriktionen):

$x \geq 0 \wedge y \geq 0$ (folgt direkt aus der Definitionsmenge)

$y \leq x + 20$

$x \leq 40$

$x + y \leq 60 \rightarrow y \leq -x + 60$

Zielfunktion festlegen (die Grösse welche optimiert werden soll \rightarrow grösster Gewinn):

$$z_{\max} = x \cdot 40 + y \cdot 50 \rightarrow 50y = -40x + z_{\max} \rightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{z_{\max}}{50}$$

grösster Gewinn entspricht y-Achsenabschnitt b

Ungleichungen ins Koordinatensystem einzeichnen:



Koordinaten von Punkt D und z_{\max} berechnen:

$$y = y$$

$$-x + 60 = x + 20$$

$$40 = 2x$$

$$x = \underline{20} \rightarrow y = x + 20 = 20 + 20 = \underline{40} \rightarrow D(20; 40)$$

$$z_{\max} = x \cdot 40 + y \cdot 50 = \underline{20} \cdot 40 + \underline{40} \cdot 50 = 800 + 2'000 = \underline{\underline{2'800}}$$

somit: Bei 20 17-Zoll-Modellen und 40 21-Zoll-Modellen ist
der Gewinn mit CHF 2'800 am grössten.

Beispiel 2

(Frommenwiler, Aufgabe 909)

Aus Reis und magerem Schweinefleisch soll ein Eintopf zubereitet werden. Pro Person werden 450 g Eintopf gerechnet, wobei nicht mehr als 300 g Schweinefleisch beigegeben werden darf. Für einen ausgewogenen Geschmack soll der Reisanteil gewichtsmässig höchstens 75 % des Schweinefleischanteils betragen.

1 kg Schweinefleisch enthält 7'362 kJ, 1 kg Reis 15'447 kJ.

Wie muss dosiert werden, damit das Essen möglichst energiereich sein soll?

Zuordnung der Variablen und Festlegung der Definitionsmenge:

x = Reis in Gramm

y = Schweinefleisch in Gramm

$D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

Ungleichungssystem aufstellen (Nebenbedingungen, Einschränkungen, Restriktionen):

$x \geq 0 \wedge y \geq 0$ (folgt direkt aus der Definitionsmenge)

$x + y \leq 450 \rightarrow y \leq -x + 450$

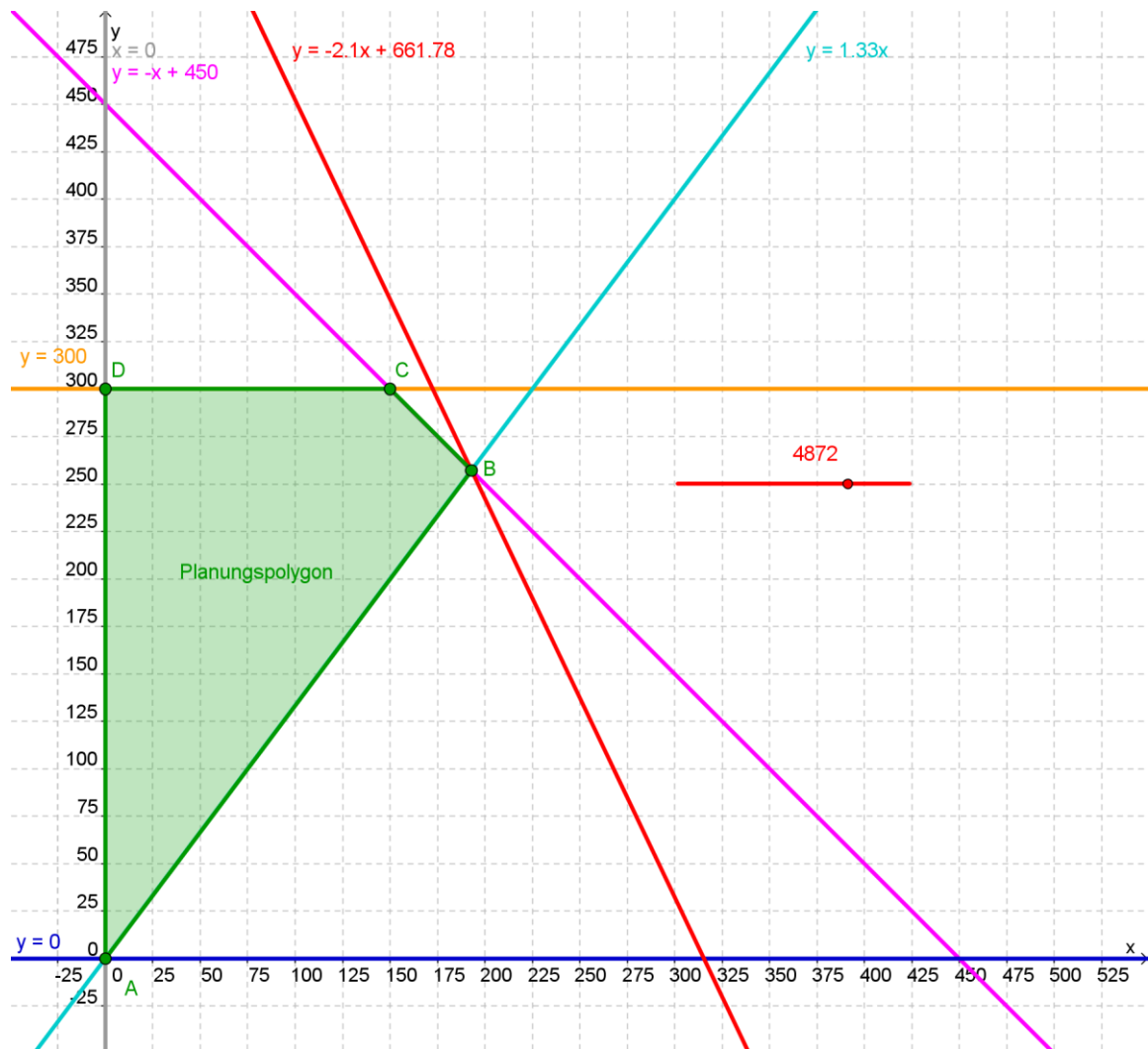
$y \leq 300$

$x \leq \frac{3}{4}y \rightarrow y \geq \frac{4}{3}x$

Zielfunktion festlegen (die Grösse welche optimiert werden soll \rightarrow maximale Energie):

$z_{\max} = x \cdot 15.447 + y \cdot 7.362 \rightarrow 7.362 \cdot y = -15.447x + z_{\max} \rightarrow y = -2.1x + \frac{z_{\max}}{7.362}$

Ungleichungen ins Koordinatensystem einzeichnen:



Koordinaten von Punkt B und z_{\max} berechnen:

$$y = y$$

$$\frac{4}{3}x = -x + 450$$

$$\frac{7}{3}x = 450$$

$$x = \frac{450 \cdot 3}{7} = \underline{192.9} \rightarrow y = -x + 450 = -192.9 + 450 = \underline{257.1} \rightarrow B(192.9; 257.1)$$

$$z_{\max} = x \cdot 15.447 + y \cdot 7.362 = \underline{192.9} \cdot 15.447 + \underline{257.1} \cdot 7.362 = \underline{\underline{4872 \text{ kJ}}}$$

somit: Es werden 193 Gramm Reis und 257 Gramm Schweinefleisch benötigt.

Die Energie beträgt dabei 4872 J (wurde nicht verlangt).