13 Ungleichungen

Eingescannt aus «Mathematik für die Fachschule Technik» von Heinz Rapp.

13.1 Einführung

Bei Gleichungen haben wir zwei gleiche Terme durch ein Gleichheitszeichen (=) miteinander verbunden. In entsprechender Weise lassen sich auch ungleiche Terme, von denen der eine größer (>) oder kleiner (<) als der andere ist, durch ein Ungleichheitszeichen miteinander in Verbindung bringen.

Ungleichungen können bei Kostenabschätzungen, bei Fehlerrechnungen oder bei Intervallschachtelungen vorkommen.

13.2 Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen

Um Ungleichungen auf die einfachste Form (x > ...) oder (x < ...) zu bringen, werden die Terme auf beiden Seiten der Ungleichung durch *äquivalente Umformungen* so lange verändert, bis die einfachste Form entsteht. Da wir bei diesen Umformungen nur Termadditionen oder -multiplikationen durchführen, bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert, handelt es sich immer um Äquivalenzumformungen. Wir können deshalb auch hier, wenn es sich ausschließlich um Äquivalenzumformungen handelt, auf das Schreiben des Äquivalenzzeichens (⇔) verzichten.

Wir wollen dies an einfachen Zahlenbeispielen untersuchen.

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $x - 3 < 1$.

Lösung

1. Termaddition

Durch die Addition von (+ 3) auf beiden Seiten der Ungleichung werden beide Terme um den gleichen Wert vergrößert. Damit ist der linke Term aber immer noch kleiner als der rechte. Die Ungleichheit bleibt erhalten. Die beiden Ungleichungen sind äquivalent.

$$x - 3 < 1$$
$$x - 3 + 3 < 1 + 3$$
$$x < 4$$
$$\underline{\underline{L = \{x | x < 4\}}}$$

Beispiel

Bestimmen Sie Lösungsmenge von $x + 7 > 10$.

Lösung

2. Termsubtraktion

In diesem Fall erhalten wir die Lösungsmenge nur durch die Subtraktion der Zahl 7.

$$x + 7 > 10$$
$$x + 7 - 7 > 10 - 7$$
$$x > 3$$
$$\underline{\underline{L = \{x | x > 3\}}}$$

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{1}{2}x > 3$.

Lösung

3. Termmultiplikation

In diesem Fall muss die Termmultiplikation angewandt werden. Der doppelte Wert des größeren Terms ist dabei immer noch größer als der doppelte Wert des kleineren Terms. Die Ungleichheit bleibt bestehen.

$$\frac{1}{2}x > 3$$
$$2 \cdot \frac{1}{2}x > 3 \cdot 2$$
$$x > 6$$
$$\underline{\underline{L = \{x|x > 6\}}}$$

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $3x < 9$.

Lösung

4. Termdivision

Durch die Multiplikation mit $\frac{1}{3}$, was der Division durch 3 entspricht, erhalten wir eine äquivalente Gleichung, denn der linksseitige Term ist immer noch kleiner als der rechtsseitige.

$$3x < 9$$
$$\frac{1}{3} \cdot 3x < 9$$
$$x < 3$$
$$\underline{\underline{L = \{x|x < 3\}}}$$

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $x - 2 > 3x - 6$.

Lösung

Bei dieser Ungleichung kommt man erst durch mehrere Umformungen zur Lösungsmenge.

Durch die Termaddition (+ 6) sowie die Termsubtraktion (– x) ergibt sich die Ungleichung $4 > 2x$.

Dividiert man diese Ungleichung durch 2, so erhält man $2 > x$. Diese Ungleichung kann auch von rechts nach links gelesen werden. Dabei ergibt sich die Ungleichung $x < 2$.

$$x - 2 > 3x - 6$$
$$x - 2 + 6 > 3x - 6 + 6$$
$$x + 4 > 3x$$
$$x - x + 4 > 3x - x$$
$$4 > 2x$$
$$\frac{1}{2} \cdot 4 > \frac{1}{2} \cdot 2x$$
$$2 > x$$
$$\underline{\underline{L = \{x|x < 2\}}}$$

Die Termumformung kann aber auch in anderer Weise durchgeführt werden:

$$x - 2 > 3x - 6$$
$$x - 2 + 2 > 3x - 6 + 2$$
$$x > 3x - 4$$
$$x - 3x > 3x - 3x - 4$$
$$-2x > -4$$

Um die Ungleichung $-2x > -4$ zu vereinfachen, ist die Termmultiplikation sinnvollerweise mit der negativen Zahl $\left(-\frac{1}{2}\right)$ durchzuführen.

Umkehrung des Ungleichheitszeichens bei Multiplikation mit negativen Zahlen (*Inversionsregel*):

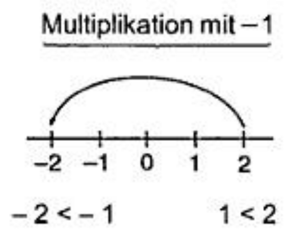
$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2x) < \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-4)$$
$$x < 2$$
$$\underline{\underline{L = \{x \mid x < 2\}}}$$

Ohne das Ungleichheitszeichen umzukehren, würde aber das Ergebnis $x > 2$ herauskommen. Dies wäre jedoch eine falsche und damit keine zur ursprünglichen Aussageform äquivalente Ungleichungsform.

Damit eine äquivalente Aussageform entsteht, ist bei der Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl das Ungleichheitszeichen gleichzeitig umzukehren.

Wir wollen dies an einer einfachen Zahlenungleichung plausibel machen:

$1 < 2$	1 ist kleiner als 2
$1 \cdot (-1) > 2 \cdot (-1)$	Umkehrung der Ungleichheit bei negativen Faktoren
$-1 > -2$	-1 ist größer als -2



Darstellung der Inversionsregel

Für die Lösung von Ungleichungen ergeben sich somit folgende *Äquivalenzsätze*:

Durch Termaddition oder -subtraktion auf beiden Seiten einer Ungleichung erhält man eine äquivalente Gleichung.

Durch Termmultiplikation oder -division mit einer *positiven Zahl* auf beiden Seiten einer Gleichung entsteht eine äquivalente Gleichung.

Bei Termmultiplikation und Termdivision mit einer *negativen Zahl oder einem negativen Term* entsteht nur dann eine äquivalente Ungleichung, wenn gleichzeitig das Ungleichheitszeichen umgekehrt wird (*Inversionsregel*).

Zusammenfassend erhält man folgende Umformungsregeln:

1. Ungleichungen lassen sich durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit einem positiven Term wie Gleichungen umformen.
2. Beim Multiplizieren und Dividieren *mit einem negativen Term* muss das Ungleichheitszeichen umgekehrt werden (*Inversionsregel*).

13.3 Einfache lineare Ungleichungen

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung 3 (x – 1) > 7x + 5.

Lösung

Klammer ausmultiplizieren	$3(x-1) > 7x + 5.$
x-Glieder auf die linke Seite bringen (Termaddition) und zusammenfassen	$3x - 3 > 7x + 5$
	$-4x - 3 > 5$
Zahlenterm auf die rechte Seite bringen (Termaddition) und zusammenfassen	$-4x > 8$
	$x < -2$
Termdivision unter Beachtung der Inversionsregel	
Alle Zahlen, die kleiner als (– 2) sind, gehören zur Lösungsmenge.	$\underline{\underline{L = \{x \mid x < -2\}}}$

Beispiel

Bestimmen Sie aus der Grundmenge G = $\mathbb{N}^*$ die Lösungsmenge der Ungleichung

$$2(x + 5) + 3 > 7(x + 1) - 3x.$$

Lösung

Klammern ausmultiplizieren und Terme zusammenfassen	$2(x + 5) + 3 > 7(x + 1) - 3x$
	$2x + 10 + 3 > 7x + 7 - 3x$
Äquivalenzumformungen durchführen	$-2x > -6$
	$x < 3$
Da nur die natürlichen Zahlen zur Grundmenge gehören, kommen als Zahlen, die kleiner als 3 sind, nur die Zahlen 1 und 2 in Frage.	$\underline{\underline{L = \{1; 2\}}}$

13.4 Bruchungleichungen

Ungleichungen mit Bruchtermen, bei denen die Lösungsvariable im Nenner vorkommt, bezeichnet man als Bruchungleichungen. Da bei Bruchtermen der Nenner nicht Null werden darf, müssen wir wie bei Bruchgleichungen mit Hilfe der Definitionsmenge solche Werte ausschließen, die den Nenner zu Null werden lassen.

Beispiel

Bestimmen Sie für die Ungleichung

$$\frac{5}{x+1} < 1$$

die Definitions- und Lösungsmenge aus der Grundmenge G = $\mathbb{Q}$.

Lösung

1. Methode

Um die Ungleichung bruchfrei zu machen, werden beide Seiten der Ungleichung mit dem Hauptnenner (hier mit dem Faktor $(x + 1)$) multipliziert.

Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Multiplikator > 0 (positiv) – Ungleichheitszeichen bleibt gleich

2. Fall: Multiplikator < 0 (negativ) – Ungleichheitszeichen wird umgekehrt.

Lösungsgang

Bestimmung der Definitionsmenge D

Da für $x = -1$ der Nenner Null werden würde, ist der Bruchterm und damit die Ungleichung für diesen Wert nicht definiert.

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$$

Berechnung der Lösungsmenge L

$$\frac{5}{x+1} < 1$$

***1. Fall:** Multiplikation mit dem Faktor*

$$x + 1 > 0$$

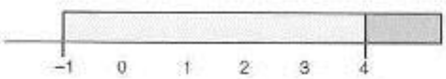
$$\frac{5 \cdot (x+1)}{x+1} < 1 \cdot (x+1) \text{ und } \overbrace{x+1>0}^{\text{Multiplikator}}$$

Da beide Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sein müssen, wollen wir beide Ungleichungen gleichzeitig nach x auflösen und durch das Zeichen $\wedge$ (und) verknüpfen.

$$5 < x + 1 \quad \wedge \quad x + 1 > 0$$

$$4 < x \quad \wedge \quad x > -1$$

Das Ergebnis wollen wir an der Zahlengeraden veranschaulichen.



Da beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein müssen, folgt daraus (vgl. Zahlengerade):

$$\underline{\underline{x > 4}}$$

***2. Fall:** Multiplikation mit dem Faktor*

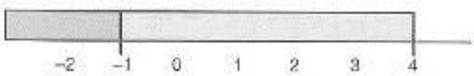
$$x + 1 < 0$$

Bei der Multiplikation mit einem negativen Faktor ist das Ungleichheitszeichen entsprechend der Inversionsregel umzukehren.

$$5 > x + 1 \quad \wedge \quad \overbrace{x+1<0}^{\text{Multiplikator}}$$

$$x < 4 \quad \wedge \quad x < -1$$

Auch dieses Ergebnis wollen wir an der Zahlengeraden veranschaulichen.



Da beides gleichzeitig erfüllt sein muss, folgt daraus

$$\underline{\underline{x < -1}}$$

Wir erkennen aus den Teillösungen, dass zwei Zahlenbereiche zur Lösungsmenge gehören, nämlich alle rationalen Zahlen, die größer als 4 oder ($\vee$) alle rationalen Zahlen, die kleiner als (-1) sind.

Damit erhält man als Lösungsmenge

$$\underline{\underline{L = \{x \mid x > 4 \vee x < -1\}_{\mathbb{Q}}}}$$

2. Methode

Man formt die Ungleichung äquivalent so um, dass rechts Null steht. Durch entsprechendes Erweitern und Zusammenfassen wird die linke Seite der Ungleichung so umgewandelt, dass nur noch ein einziger Bruchterm übrigbleibt.

Nun werden Zähler und Nenner getrennt betrachtet. Ein Bruch ist z. B. kleiner Null (< 0), wenn der Zähler negativ (< 0) und der Nenner positiv (> 0) ist. Entsprechendes gilt für den umgekehrten Fall.

Lösungsgang

a) Bestimmung der Definitionsmenge D $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

b) Umformung der Ungleichung

$$\frac{5}{x+1} < 1$$

Alle Terme werden durch Äquivalenzumformung auf die linke Seite der Ungleichung gebracht.

$$\frac{5}{x+1} - 1 < 0$$

Erweitern mit dem Hauptnenner

$$\frac{5}{x+1} - \frac{1(x+1)}{x+1} < 0$$

Zusammenfassen der Bruchterme

$$\frac{5-(x+1)}{x+1} < 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} < 0$$

c) Fallunterscheidungen

1. Ein Bruchterm ist negativ, wenn der Zähler negativ und der Nenner positiv ist.

Zähler Nenner

$$4 - x < 0 \wedge x + 1 > 0$$

$$x > 4 \wedge x > -1$$

$$\boxed{x > 4}$$

2. Ein Bruchterm ist negativ, wenn der Zähler positiv und der Nenner negativ ist.

Zähler Nenner

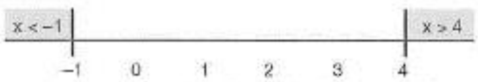
$$4 - x > 0 \wedge x + 1 < 0$$

$$x < 4 \wedge x < -1$$

$$\boxed{x < -1}$$

d) Formulierung der Lösungsmenge L

$$\underline{\underline{L = \{x \mid x > 4 \vee x < -1\}_{\mathbb{Q}}}}$$



Graphische Darstellung

Beispiel

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge von $\frac{x+3}{x} > \frac{x}{x-3}$ mit G = $\mathbb{Q}$.

Lösung

Lösungsgang nach der 2. Methode

a) Definitionsmenge

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 3\}$$

b) Umformung der Ungleichung

$$\frac{x+3}{x} > \frac{x}{x-3}$$

$$\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-3} > 0$$

$$\frac{(x+3)\cdot(x-3) - x \cdot x}{x\cdot(x-3)} > 0$$

$$\boxed{\frac{-9}{x\ (x-3)} > 0}$$

c) Fallunterscheidungen

In diesem Fall ist der Zähler negativ. Da er keine Variable enthält, kann er sich nicht mehr verändern. Dies bedeutet, dass der Nenner negativ werden muss, damit der Bruchterm positiv bleibt.

Es gibt keine rationale Zahl, die negativ und gleichzeitig größer als 3 ist.

Nenner negativ

(wenn die beiden Faktoren x und (x – 3) ungleiche Vorzeichen haben)

$$x \cdot (x-3) < 0$$

1. $x < 0 \ \wedge \ (x-3) > 0$

   $x < 0 \ \wedge \ x > 3$

   kein Lösungselement

2. $x > 0 \ \wedge \ (x-3) < 0$

   $x > 0 \ \wedge \ x < 3$

d) Lösungsmenge

Alle rationalen Zahlen im Intervall]0; 3[gehören zur Lösungsmenge

$$\boxed{0 < x < 3}$$

$$L = \{x \mid 0 < x < 3\}_{\mathbb{Q}}$$

Graphische Darstellung der Lösungsmenge

Anmerkung:
Die Lösungsmenge lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$L = \left]\, 0; 3 \,\right[_{\mathbb{Q}}$$

$\underbrace{\text{Andere Schreibweise der Lösungsmenge:}}_{\text{abhängig vom Fachbuch}}$ $L = (x; 3)_{Q}$

runde Klammer: Grenze gehört **nicht** dazu

eckige (nach innen gerichtete) Klammer: Grenze gehört dazu

eckige (nach aussen gerichtete) Klammer: Grenze gehört **nicht** dazu

Beispiel

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge von $\frac{3}{x+2} > \frac{4}{x+1}$ mit G = $\mathbb{Q}$.

Lösung

a) Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; -2\}$

b) Umformung der Ungleichung

$$\frac{3}{x+2} > \frac{4}{x+1}$$

$$\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+1} > 0$$

$$\frac{3(x+1) - 4(x+2)}{(x+2)(x+1)} > 0$$

$$\frac{-x-5}{(x+2)(x+1)} > 0$$

$$\boxed{\frac{x+5}{(x+2)\ (x+1)} < 0}$$

c) Fallunterscheidungen

Da bei dem vorliegenden Beispiel nicht nur zwei Fälle zu unterscheiden sind, wollen wir ein Lösungsschema anwenden.

Lösungsschema

Zähler	positiv	negativ
	$x + 5 > 0$	$x + 5 < 0$
	$x > -5$	$x < -5$
Nenner	negativ	positiv
	$(x + 2)(x + 1) < 0$	$(x + 2)(x + 1) > 0$
	1. $x + 2 < 0 \wedge x + 1 > 0$	1. $x + 2 > 0 \wedge x + 1 > 0$
	$x < -2 \wedge x > -1$	$x > -2 \wedge x > -1$
	keine Lösungselemente	$x > -1$
	2. $x + 2 > 0 \wedge x + 1 < 0$	2. $x + 2 < 0 \wedge x + 1 < 0$
	$x > -2 \wedge x < -1$	$x < -2 \wedge x < -1$
	$-2 < x < -1$	$x < -2$
Ergebnis	$-2 < x < -1$	$x < -5$

d) Lösungsmenge $\underline{\underline{L = \{x \mid -2 < x < -1 \vee x < -5\}_{\mathbb{Q}}}}$

13.5 Übungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen.

1. $25-10x \leq 70+5x$ $\qquad (G=\mathbb{R})$

2. $3\cdot(x-5)+2>75-5\cdot(x-5)-13$ $(G=\mathbb{R})$

3. $(2x-3)\cdot(2x+3)<(2x-3)^2$ $(G=\mathbf{R})$

4. $x+6>4x-12$ $(G=\mathbb{N})$

5. $-1 < 2x \quad \wedge \quad 1.5x \le 6 + \frac{x}{2}$ $\qquad (G = \mathbb{Z})$

6. $\frac{7x-2}{7}-\frac{1}{7}<-\frac{4}{7}+\frac{3}{7}x$ $(G=\mathbb{R})$

7. $\frac{5x-20}{x}<3$ $(G=\mathbf{R})$

13.6 Quadratische Ungleichungen

Die Lösungsmenge kann mit Hilfe einer Faktorisierung des quadratischen Polynoms und anschliessender Fallunterscheidung bestimmt werden. Dazu wird die quadratische Ungleichung zuerst auf die Form $Ax^2 + Bx + C > 0$ bzw. $Ax^2 + Bx + C < 0$ gebracht. Danach wird der Term so umgeformt, dass zwei Faktoren F1 und F2 entstehen (Faktorzerlegung).

F1 · F2 > 0 bzw. F1 · F2 < 0	$F1 \cdot F2 > 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} F1 > 0 \quad \wedge \quad F2 > 0 \\ \vee \text{(oder)} \\ F1 < 0 \quad \wedge \quad F2 < 0 \end{cases}$

Ein Produkt ist > 0 wenn beide Faktoren grösser 0 oder beide Faktoren kleiner 0 sind!

Beispiel 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 + 3x - 10 > 0$. (G = **R**)

$D = \mathbb{R}$

$$x^2 + 3x - 10 > 0 \qquad |\text{Faktorzerlegung}$$
$$(x+5)\cdot(x-2) > 0 \qquad |\text{Fallunterscheidung}$$

1. Fall $(+)\cdot(+) \quad \rightarrow \quad$ (beide Faktoren positiv)

$$x + 5 > 0 \quad \wedge \quad x - 2 > 0$$
$$x > -5 \quad \wedge \quad x > 2$$

$$\underline{L_1 = \{x | x > 2\}}$$

2. Fall $(-)\cdot(-) \quad \rightarrow \quad$ (beide Faktoren negativ)

$$x + 5 < 0 \quad \wedge \quad x - 2 < 0$$
$$x < -5 \quad \wedge \quad x < 2$$

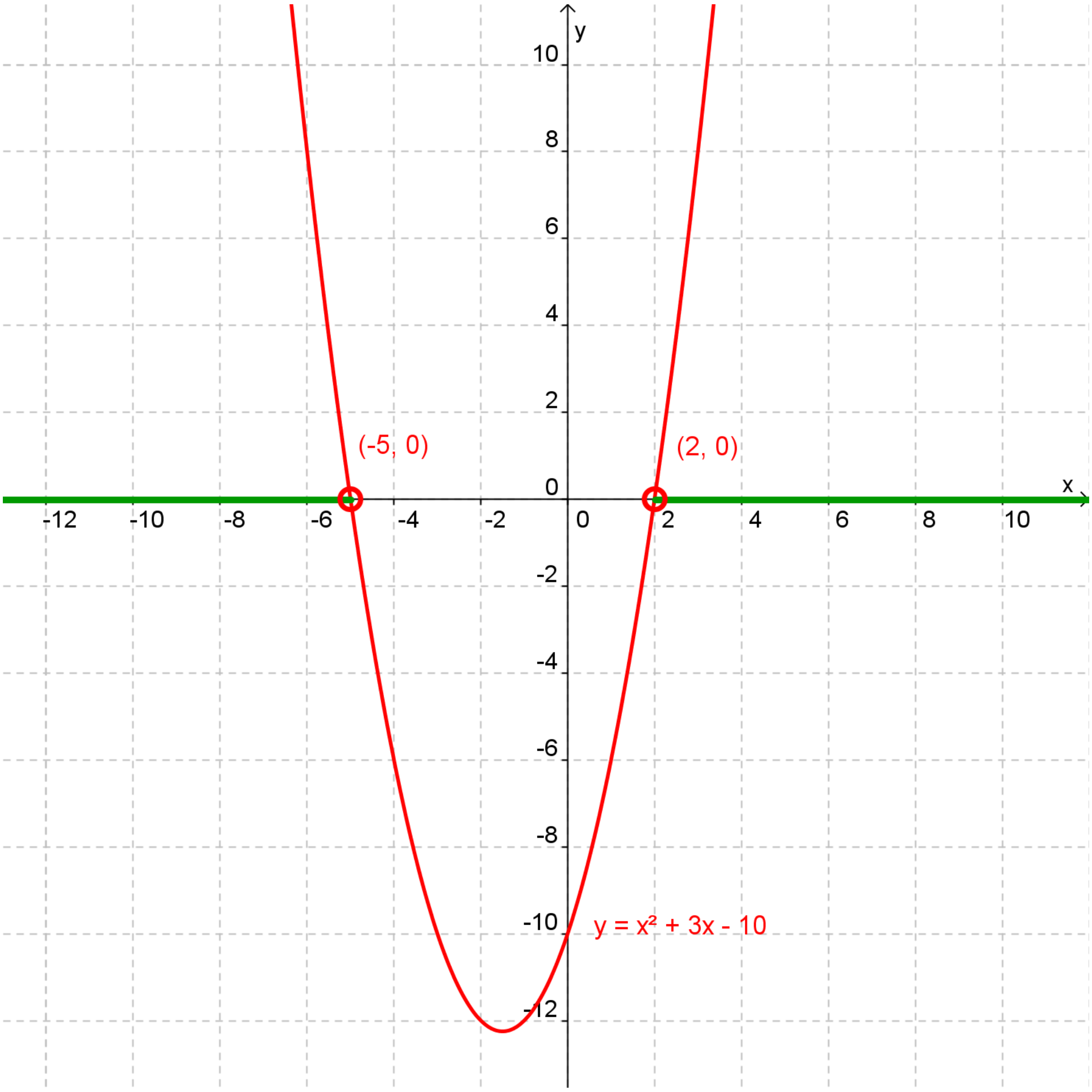
$$\underline{L_2 = \{x | x < -5\}}$$

Lösungsmenge

$$L = L_1 \overbrace{\vee}^{\text{oder}} L_2 = \underline{\underline{\{x | x > 2 \quad \vee \quad x < -5\}}}$$

Grafische Interpretation von Beispiel 1

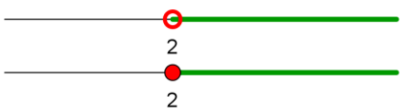
Die linke Seite der Ungleichung $x^2+3x-10>0$ wird als Funktionswert einer Funktion aufgefasst, d. h. $y=x^2+3x-10$. Der Graf dieser Funktion ist eine Parabel (zweiten Grades), die im Koordinatensystem die x-Achse bei den Punkten (–5, 0) und (2; 0) schneidet:



Interpretation: Die Lösungsmenge der Ungleichung $\overbrace{x^2+3x-10}^{y}>0$ entspricht dem grün markierten Bereich auf der x-Achse, in dem die Parabel **oberhalb** der x-Achse liegt!

Anschaulich: Alle x die in y eingesetzt werden, müssen einen positiven Funktionswert ergeben. Deshalb muss die Lösungsmenge im Intervall $]-\infty;-5[$ oder im Intervall $]2;\infty[$ liegen.

Bemerkung:



2 ausgeschlossen

2 eingeschlossen

Beispiel 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $-3x^2 + 3x + 18 < 0$. (G = **R**)

$D = \mathbf{R}$

$-3x^2 + 3x + 18 < 0$	$\vert : (-3) \rightarrow$ Relationszeichen kehren
$x^2 - x - 6 > 0$	$\vert$Faktorzerlegung
$(x-3) \cdot (x+2) > 0$	$\vert$Fallunterscheidung

<u>1. Fall $(+) \cdot (+) \quad \rightarrow \quad$ (beide Faktoren positiv)</u>

$x - 3 > 0 \quad \wedge \quad x + 2 > 0$

$x > 3 \quad \wedge \quad x > -2$

$L_1 = \underline{\{x \vert x > 3\}}$

<u>2. Fall $(-) \cdot (-) \quad \rightarrow \quad$ (beide Faktoren negativ)</u>

$x - 5 < 0 \quad \wedge \quad x + 2 < 0$

$x < 5 \quad \wedge \quad x < -2$

$L_2 = \underline{\{x \vert x < -2\}}$

<u>Lösungsmenge</u>

$L = L_1 \overbrace{\vee}^{\text{oder}} L_2 = \underline{\underline{\{x \vert x > 3 \quad \vee \quad x < -2\}}}$

13.7 Übungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen.

1. $x^2 + x - 12 \geq 0$ $(G = \mathbb{R})$

2. $\dfrac{2x-3}{x-1} < \dfrac{1}{2}$ $(G = \mathbb{R})$

3. $\frac{(5x+5)\cdot x}{3x+x^2-4} > 5$ $(G=\mathbb{R})$ BM-Prüfung Bern

4. $\frac{x+2}{3} \geq \frac{1}{x}$ $(G = \mathbb{R})$ BM-Prüfung Uri 2004

5. $\frac{x-1}{x+3} < \frac{x+1}{x-3}$ $(G = \mathbb{R})$ BM-Prüfung Uri 1998

13.8 Übungsprüfung

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen.
Für alle Aufgaben gilt G = **R**.

1. $4-2x \leq 3x+4$

2. $\frac{3x-5}{3} < \frac{2x-1}{2}$

3. $-8 < 5 - 0.5x \leq 0$

Zeichnen Sie den Grafen der Lösungsmenge auf.

4. $\dfrac{x+2}{(x-1)\cdot(x+1)} > 0$

Zeichnen Sie den Grafen der Lösungsmenge auf.

5. $\frac{4+x}{3+2x} > \frac{1}{2}$

13.9 Grafisches Lösen linearer Ungleichungen

Eine **lineare Ungleichung** mit einer Lösungsvariable x lässt sich durch äquivalente Umformungen stets in folgende Form bringen:

$$\begin{array}{lll} Ax+B\leq 0 & \text{bzw.} & Ax+B<0 \\ (Ax+B\geq 0 & \text{bzw.} & Ax+B>0) \end{array}$$

Die linke Seite der Ungleichung wird als Funktionswert einer Funktion (lineare Funktion) aufgefasst und kann somit als Graf im Koordinatensystem eingezeichnet werden.

Beispiel

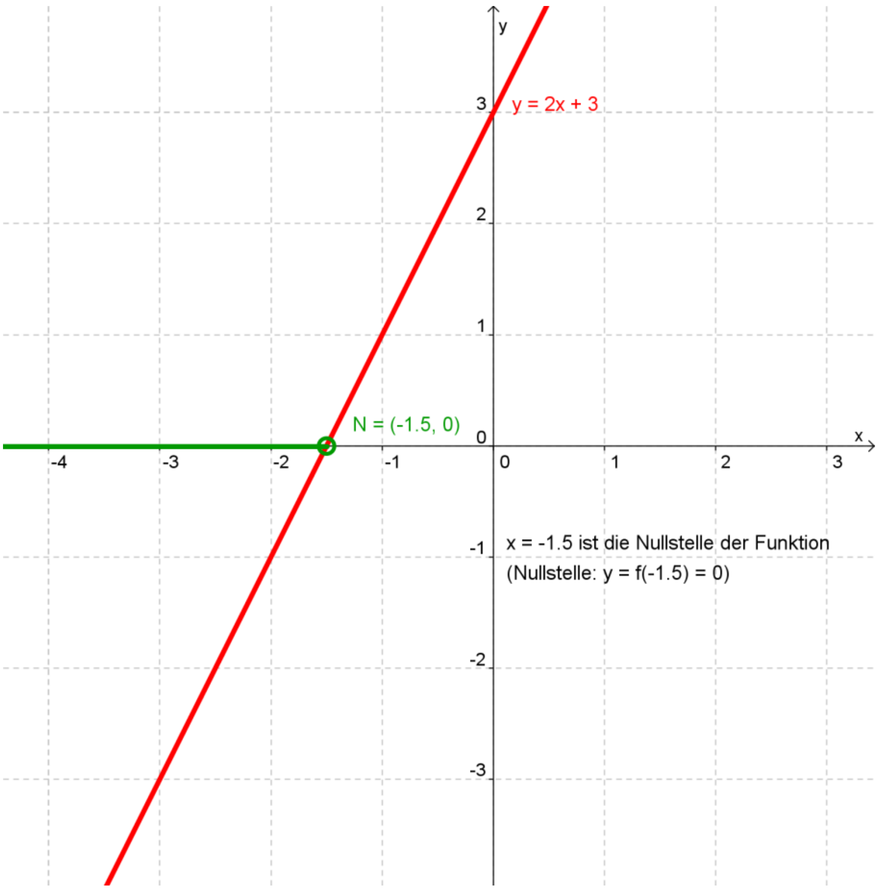
Bestimmen Sie grafisch die Lösungsmenge der Ungleichung $2x+5<2$. (G = **R**)

$2x+5<2 \qquad |-2$

$2x+3<0$

zugehörige (lineare) Funktion: $y=f(x)=2x+3$

Lösung:



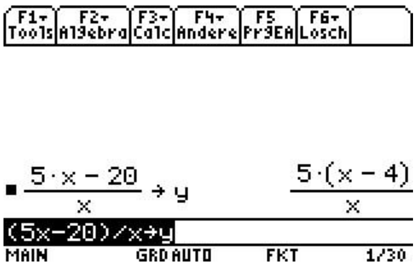
Alle x die in y eingesetzt werden und einen negativen Funktionswert ($y<0$) ergeben, sind Lösungen der Ungleichung. Somit: $\underline{\underline{L=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-1.5\}}}$.

13.10 Ungleichungen mit dem TI kontrollieren

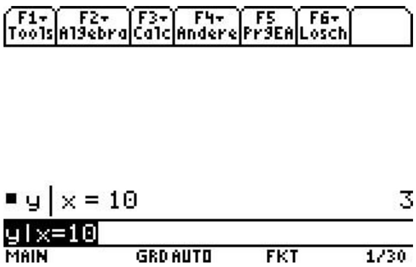
Bei der **Kontrolle von Ungleichungen** muss der gleiche Term mit **verschiedenen x-Werten** getestet werden. Damit das mühsame Eintippen nicht ständig wiederholt werden muss, kann der Term einmal eingetippt und abgespeichert werden. Danach kann der Term mit verschiedenen Werten beliebig oft (und sehr schnell) berechnet werden.

Beispiel: $\frac{5x-20}{x} < 3$ mit $\underline{\underline{L = \{x \in R | 0 < x < 10\}}}$ (Aufgabe 7 von Übung 14.5)

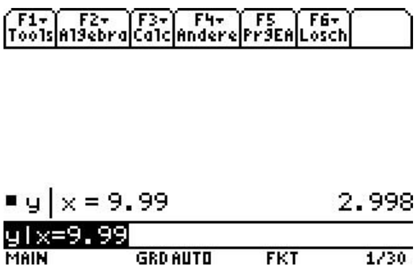
Eingabe: [(][5][X][−][2][0][)][÷][X][STO▸][Y][ENTER] (der Term auf der linken Seite wird unter y abgespeichert)



Kontrolle: Der Term wird für x = 10 wie folgt berechnet:
[Y][|][X][=][1][0][ENTER]
links von Ziffer 7



Für weitere Kontrollen muss nur der x-Wert geändert werden.
z. B. für x = 9.99:



Achtung: Variable kann für neue Berechnungen überschrieben werden.
Oder mit [2nd][VAR-LINK] kann die Variable auch gelöscht werden.

13.11 Betragsgleichungen

Gleichungen, in denen die Unbekannte in Beträgen vorkommt, heissen Betragsgleichungen. Beim Auflösen des Betrages müssen Fallunterscheidungen vorgenommen werden. Ist T(x) ein Term mit der Variablen x, so gilt:

$$|T(x)| = \begin{cases} T(x) & \text{für } T(x) \geq 0 \\ -T(x) & \text{für } T(x) < 0 \end{cases}$$

Beispiele: $|6| = 6$
$|-6| = -(-6) = 6$

Beispiel 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Betragsgleichung $|4x| = 12$. (G = **R**)

$D = \mathbb{R}$

1. Fall $|+| \quad \rightarrow \quad (x \geq 0)$

$4x = 12 \qquad |:4$

$x = 3$ Da die Lösung im Intervall $\underbrace{[0;\infty[}_{x\geq 0}$ liegt, gehört sie zur Lösungsmenge.

$L_1 = \underline{\{3\}}$

2. Fall $|-| \quad \rightarrow \quad (x < 0)$

$-4x = 12 \qquad |:(-4)$

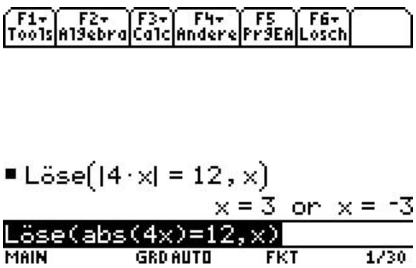
$x = -3$ Da die Lösung im Intervall $\underbrace{]-\infty;0[}_{x<0}$ liegt, gehört sie zur Lösungsmenge.

$L_2 = \underline{\{-3\}}$

Lösungsmenge

$L = L_1 \vee L_2 = \underline{\underline{\{3,-3\}}}$

Kontrolle durch Einsetzen der Lösungen in die **ursprüngliche Betragsgleichung** oder mit TI:



Beispiel 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Betragsgleichung $|x-1|=5$. (G = **R**)

$D=\mathbf{R}$

1. Fall $|+| \rightarrow (x-1\geq 0 \rightarrow x\geq 1)$

$x-1=5 \qquad |+1$

$x=6$ Da die Lösung im Intervall $\underbrace{[1;\infty[}_{x\geq 1}$ liegt, gehört sie zur Lösungsmenge.

$L_1=\underline{\{6\}}$

2. Fall $|-| \rightarrow (x-1<0 \rightarrow x<1)$

$-(x-1)=5$

$-x+1=5 \qquad |\text{TU}$

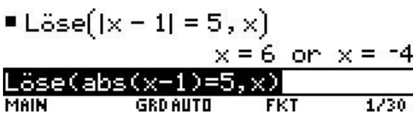
$x=-4$ Da die Lösung im Intervall $\underbrace{]-\infty;1[}_{x<1}$ liegt, gehört sie zur Lösungsmenge.

$L_2=\underline{\{-4\}}$

Lösungsmenge

$L=L_1\vee L_2=\underline{\underline{\{6,-4\}}}$

Kontrolle durch Einsetzen der Lösungen in die **ursprüngliche Betragsgleichung** oder mit TI:



Beispiel 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Betragsgleichung $|2x-3| = 4x-7$. (G = **R**)

$D = \mathbb{R}$

1. Fall $|+|$ $\rightarrow$ $\left(2x-3 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq \frac{3}{2}\right)$

$2x-3 = 4x-7 \qquad |-2x \quad |+7$

$4 = 2x \qquad |:2$

$x = 2$ Da die Lösung im Intervall $\underbrace{[3/2;\infty[}_{x\geq\frac{3}{2}}$ liegt, gehört sie zur Lösungsmenge.

$L_1 = \underline{\{2\}}$

2. Fall $|-|$ $\rightarrow$ $\left(2x-3 < 0 \;\rightarrow\; x < \frac{3}{2}\right)$

$-(2x-3) = 4x-7$

$-2x+3 = 4x-7 \qquad |+2x \quad |+7$

$10 = 6x \qquad |:6$

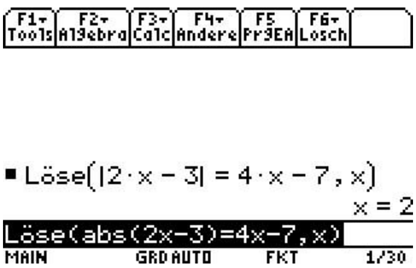
$x = \frac{5}{3}$ Da die Lösung **nicht** im Intervall $\underbrace{]-\infty;3/2[}_{x<\frac{3}{2}}$ liegt, gehört sie **nicht** zur Lösungsmenge.

$L_2 = \underline{\{\ \}}$

Lösungsmenge

$L = L_1 \vee L_2 = \underline{\underline{\{2\}}}$

Kontrolle durch Einsetzen der Lösungen in die **ursprüngliche Betragsgleichung** oder mit TI:



13.12 Übungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsgleichungen.

1. $|x| - 1 = 1$ $(G = \mathbb{R})$

1. Methode (ohne Festlegung von Intervallen)

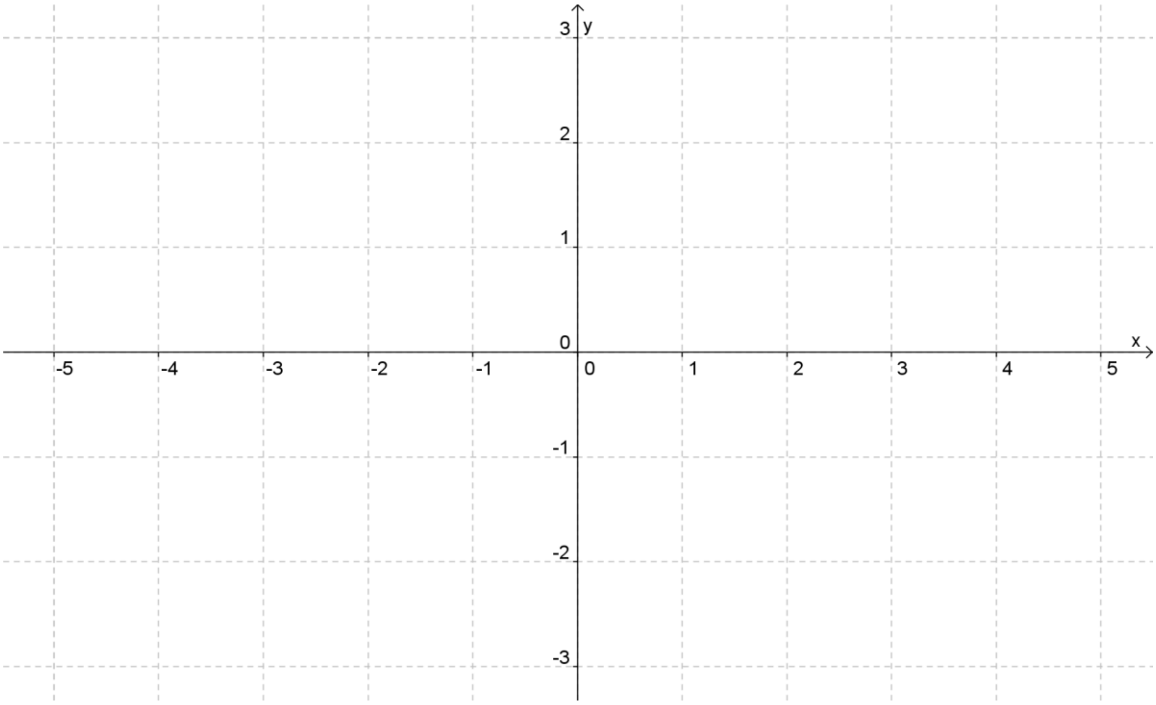
2. Methode (mit Festlegung von Intervallen)

Kontrolle:

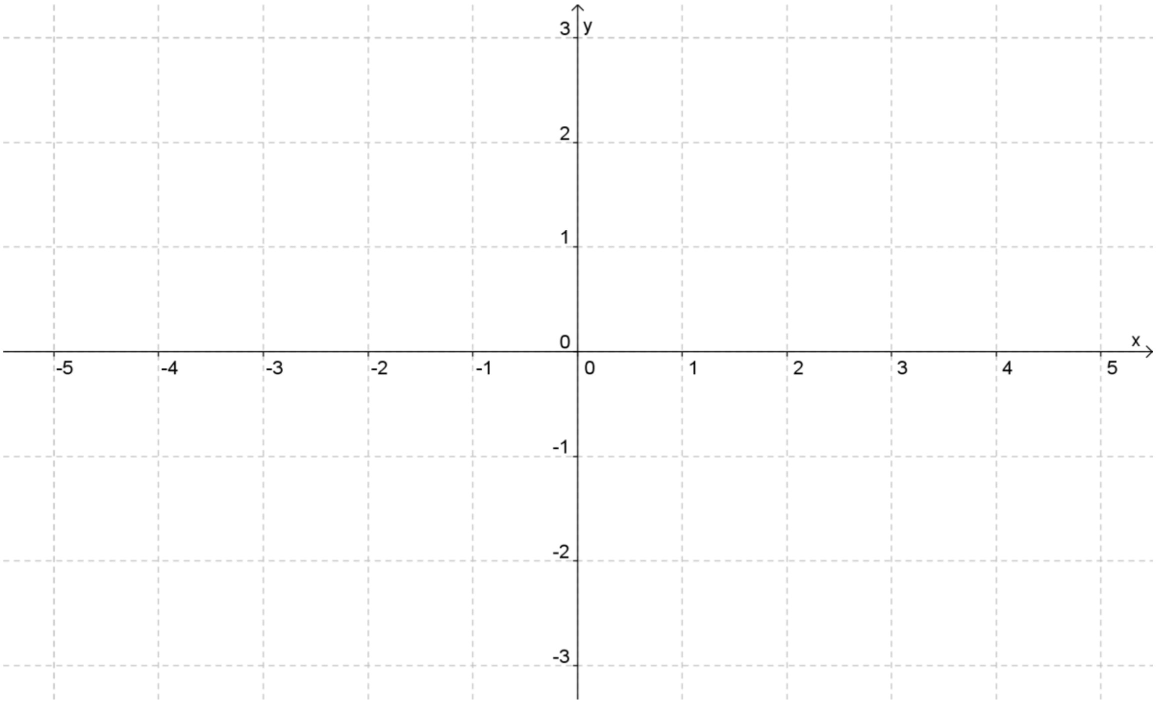
2. $|x-1|=1$ $(G=\mathbb{R})$

Grafische Darstellung der Lösungsmenge von Aufgabe 2

Variante 1: $\underbrace{|x-1|}_{y_1} = \underbrace{1}_{y_2}$



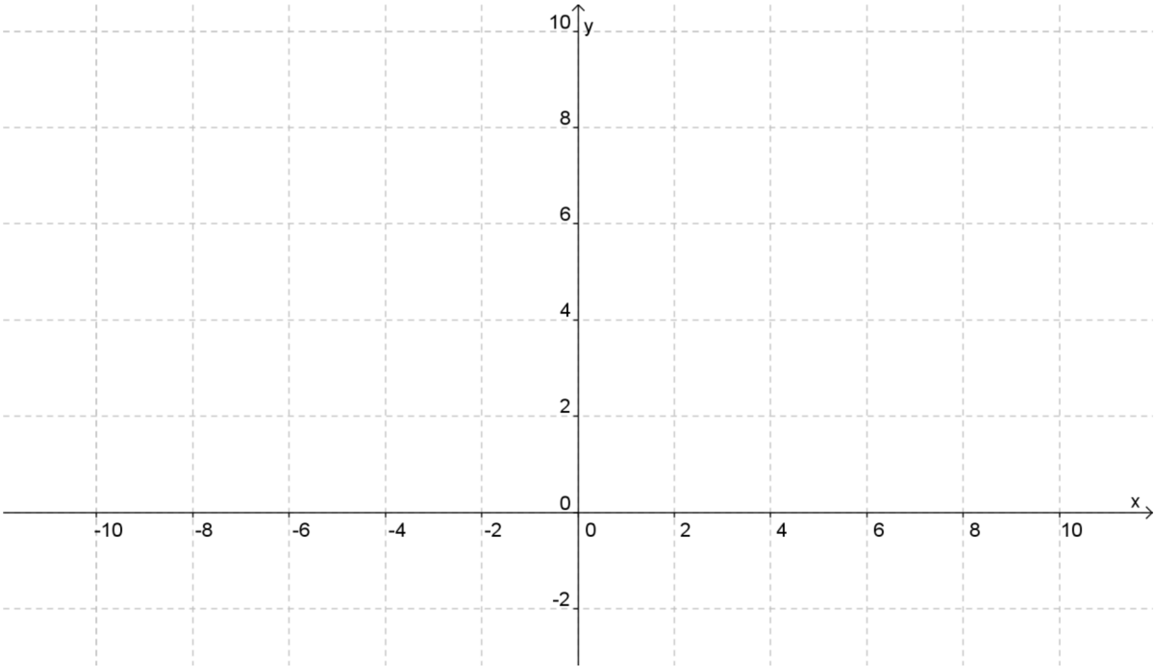
Variante 2: $\underbrace{|x-1|-1}_{y_1} = \underbrace{0}_{y_2} \quad \rightarrow \quad y_1 = |x-1|-1 \quad \begin{cases} y_1 = x-1-1 = x-2 & \text{für } x \geq 1 \\ y_1 = -(x-1)-1 = -x & \text{für } x < 1 \end{cases}$



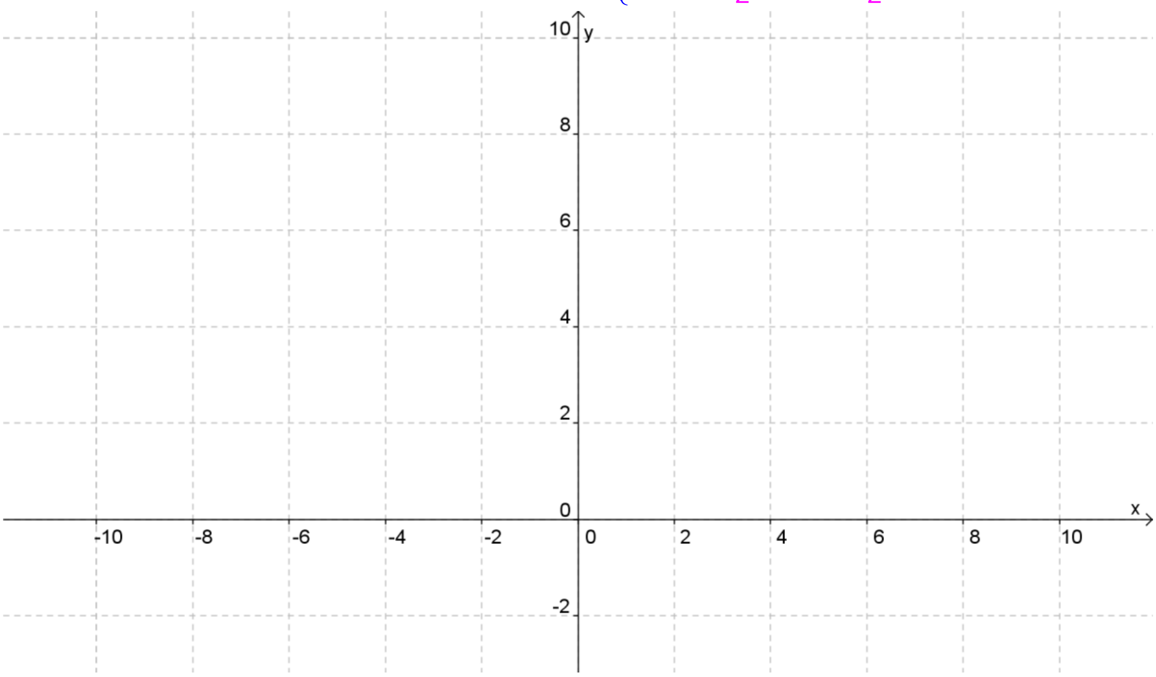
3. $|x| = 4 - \frac{x}{2}$ $(G = \mathbb{R})$

Grafische Darstellung der Lösungsmenge von Aufgabe 3

Variante 1: $\underbrace{|x|}_{y_1} = \underbrace{4 - \frac{x}{2}}_{y_2}$



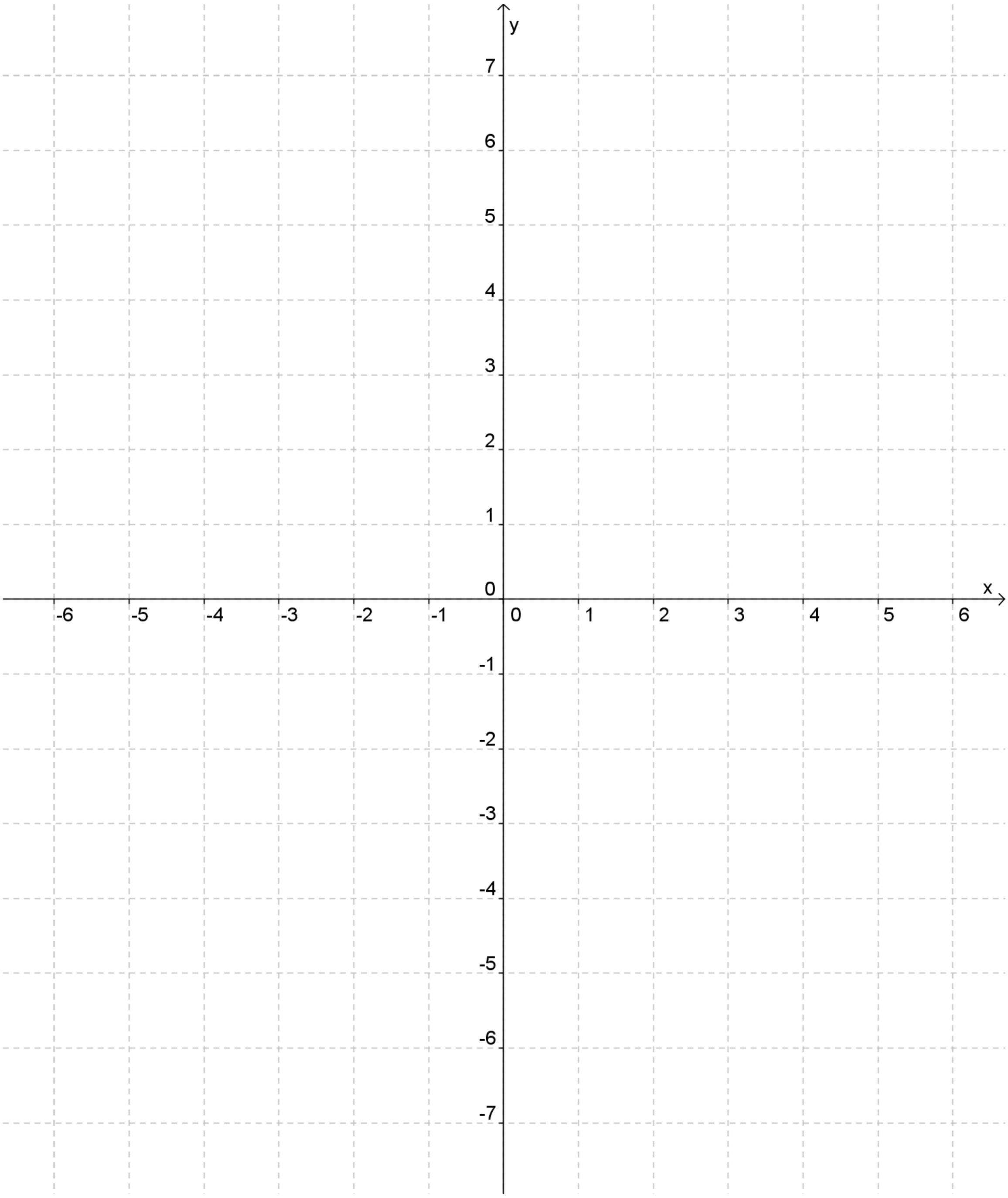
Variante 2: $\underbrace{0}_{y_1} = \underbrace{4 - \frac{x}{2} - |x|}_{y_2} \quad \rightarrow \quad y_2 = 4 - \frac{x}{2} - |x| \quad \begin{cases} y_2 = 4 - \frac{x}{2} - x = -\frac{3}{2}x + 4 & \text{für } x \geq 0 \\ y_2 = 4 - \frac{x}{2} - (-x) = \frac{1}{2}x + 4 & \text{für } x < 0 \end{cases}$



4. $\left|x-1\right|+\left|x-2\right|=5$ $\left(G=\mathbb{R}\right)$

Grafische Darstellung der Lösungsmenge von Aufgabe 4

$$\underbrace{\underbrace{|x-1|}_{y_1} + \underbrace{|x-2|}_{y_2}}_{y_3} = \underbrace{5}_{y_4}$$



13.13 Betragsungleichungen

Wird in einer Betragsgleichung das Gleichheitszeichen durch " ≤", "<", "≥" bzw. ">" ersetzt, entsteht eine Betragsungleichung. Betragsungleichungen können entsprechend den bereits behandelten Regeln (Betragsgleichungen bzw. Ungleichungen) gelöst werden. Allgemein sind die Lösungsmengen von Betragsungleichungen Vereinigungen von Intervallen.

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Betragsungleichung $|x-5|>4$. ($G = \mathbb{R}$)

$D = \mathbb{R}$

$\underline{\text{1. Fall } |+| \quad \rightarrow \quad (x-5 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 5)}$

$x-5>4 \qquad |+4$

$x>9$

$L_1 = \{x | x \geq 5 \quad \wedge \quad x>9\} = \underline{\{x | x>9\}}$

$\underline{\text{2. Fall } |-| \quad \rightarrow \quad (x-5<0 \quad \rightarrow \quad x<5)}$

$-(x-5)>4 \qquad |\text{Klammer auflösen}$

$-x+5>4 \qquad |-5$

$-x>-1 \qquad |:(-1)$

$x<1$

$L_2 = \{x | x<5 \quad \wedge \quad x<1\} = \underline{\{x | x<1\}}$

Lösungsmenge

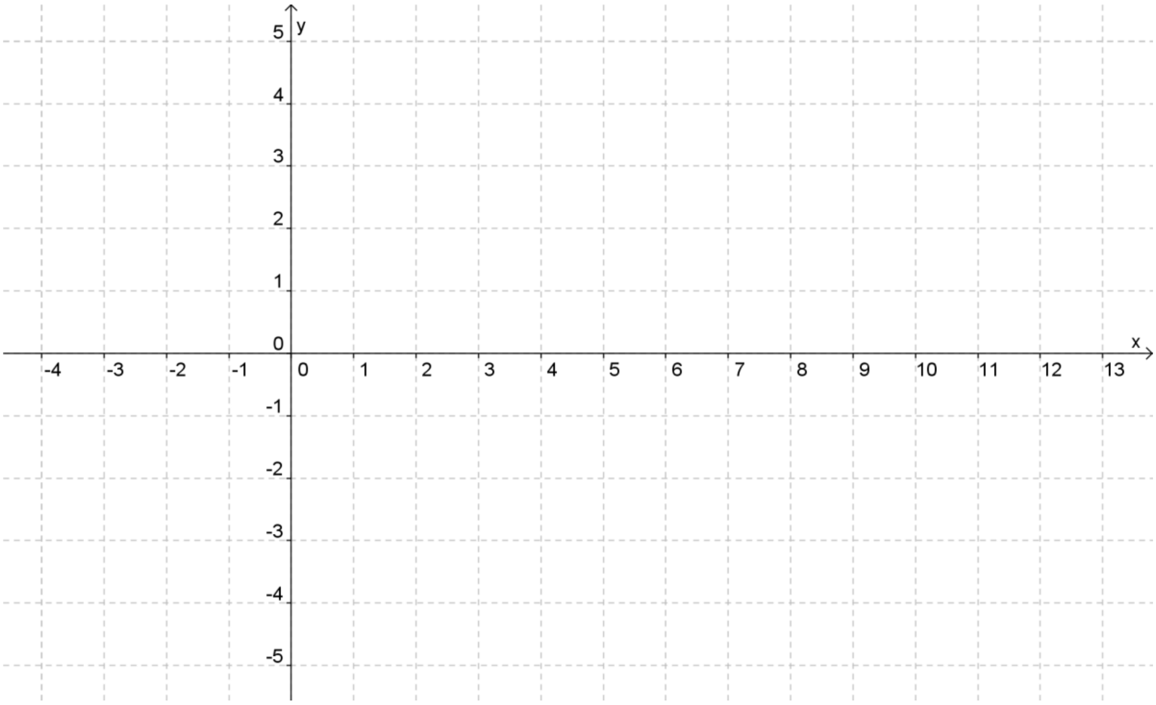
$L = L_1 \vee L_2 = \underline{\underline{\{x | x>9 \quad \vee \quad x<1\}}}$

Kontrolle

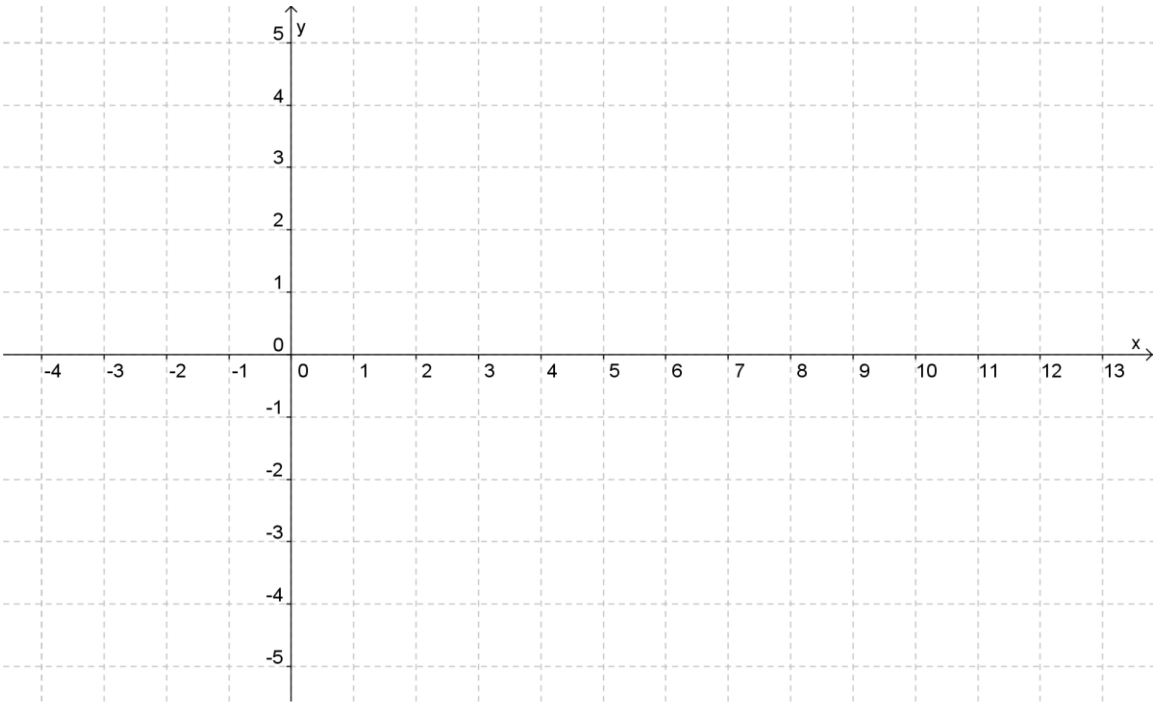
$T(0)$:	$\lvert 0-5 \rvert >4 \rightarrow$	$5>4$	(w)	korrekt!
$T(1)$:	$\lvert 1-5 \rvert >4 \rightarrow$	$4>4$	(f)	korrekt!
$T(9)$:	$\lvert 9-5 \rvert >4 \rightarrow$	$4>4$	(f)	korrekt!
$T(10)$:	$\lvert 10-5 \rvert >4 \rightarrow$	$5>4$	(w)	korrekt!

Grafische Darstellung der Lösungsmenge des Beispiels

Variante 1: $\underbrace{|x-5|}_{y_1} > \underbrace{4}_{y_2}$



Variante 2: $\underbrace{|x-5|-4}_{y_1} > \underbrace{0}_{y_2} \quad \rightarrow \quad y_1 = |x-5|-4 \quad \begin{cases} y_{1+} = x-5-4 = x-9 & \text{für } x \geq 5 \\ y_{1-} = -x+5-4 = -x+1 & \text{für } x < 5 \end{cases}$



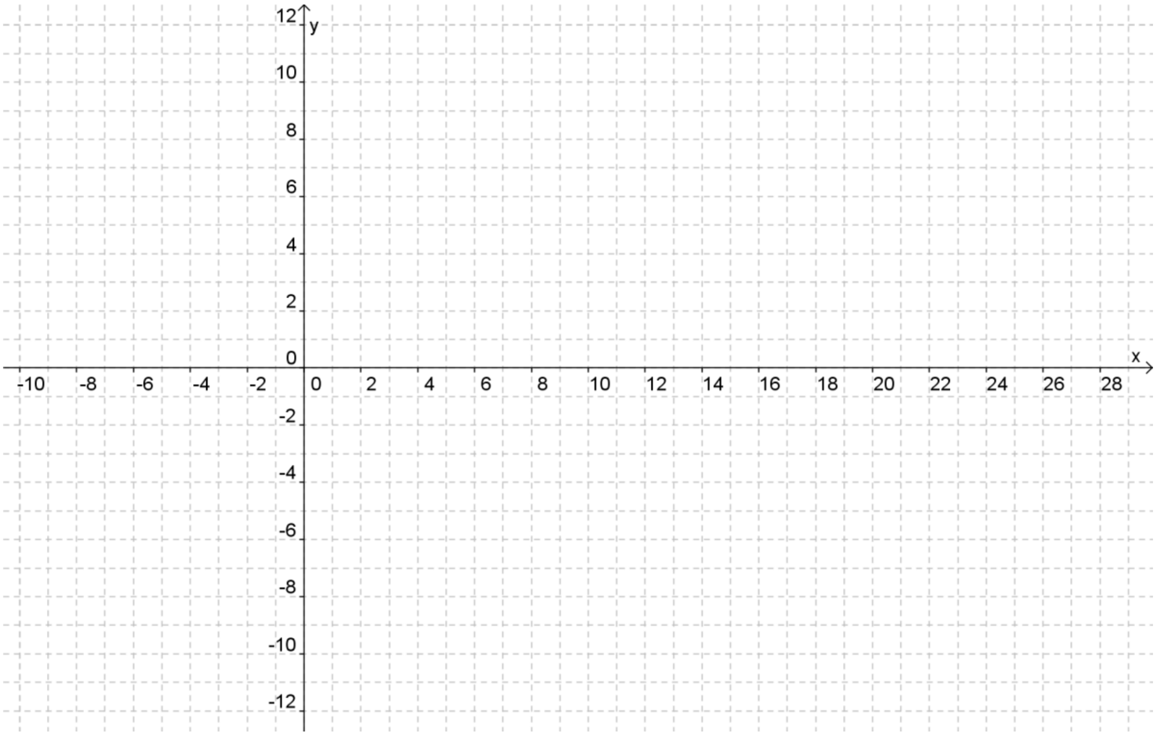
13.14 Übungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsungleichungen.

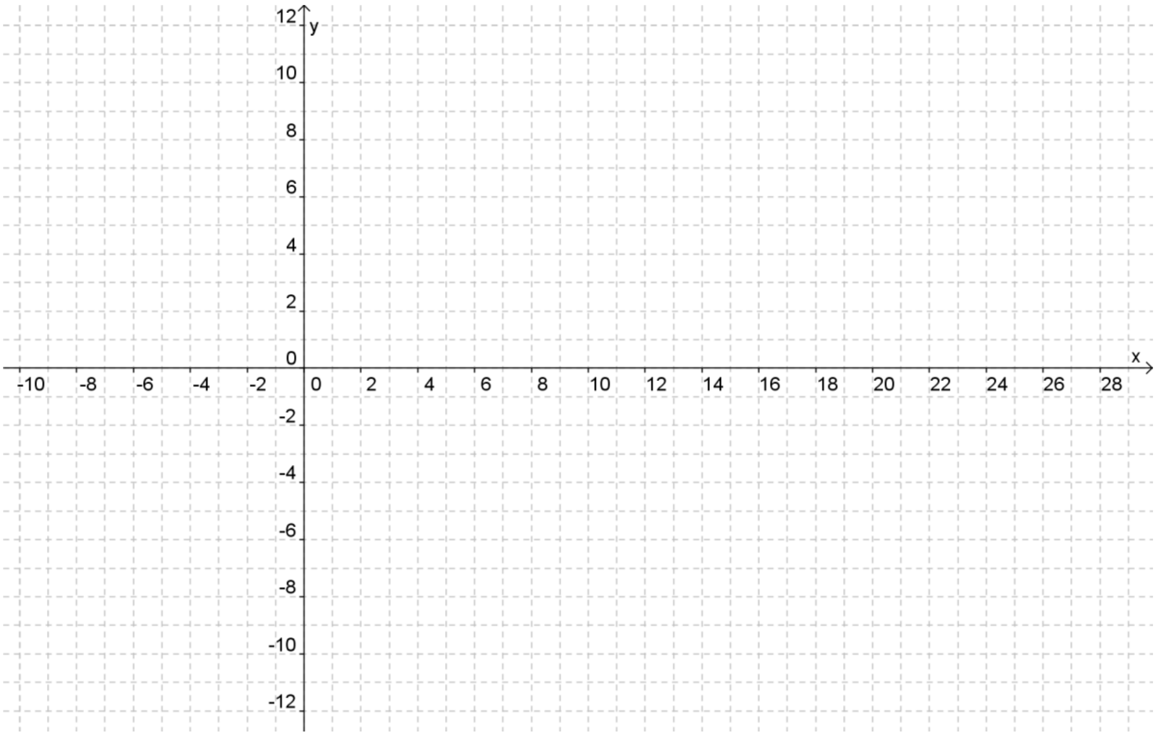
1. $|x-7|<4$ $(G=\mathbb{R})$

Grafische Darstellung der Lösungsmenge von Aufgabe 1

Variante 1: $\underbrace{|x-7|}_{y_1} < \underbrace{4}_{y_2}$



Variante 2: $\underbrace{|x-7|-4}_{y_1} < \underbrace{0}_{y_2} \quad \rightarrow \quad y_1 = |x-7|-4 \quad \begin{cases} y_{1+} = x-7-4 = x-11 & \text{für } x \geq 7 \\ y_{1-} = -x+7-4 = -x+3 & \text{für } x < 7 \end{cases}$



2. $\left|\frac{x-3}{x+5}\right| > 6$ $(G = \mathbb{R})$

3. $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ $(G = \mathbb{R})$

13.15 Lineare Ungleichungssysteme

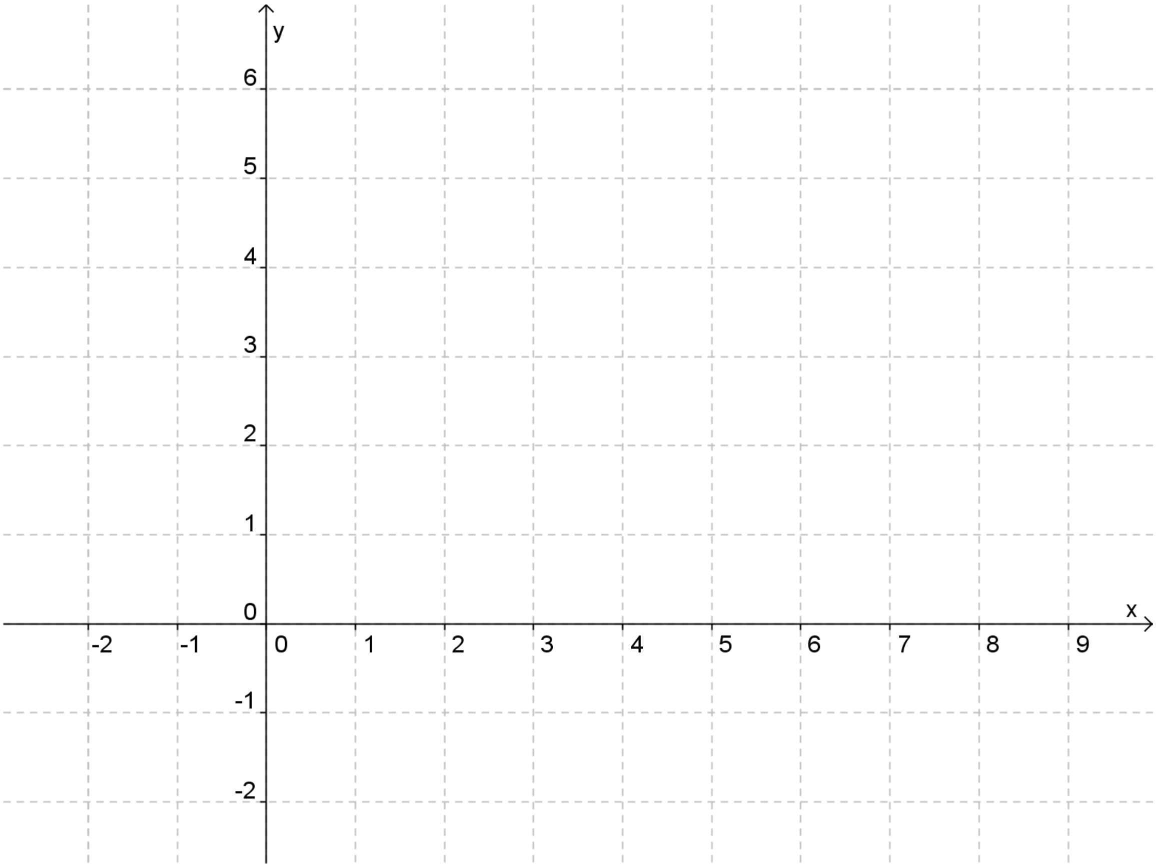
Beispiel 1 (Frommenwiler, Aufgabe 891a)

Schraffieren Sie das Gebiet, das durch die folgenden Ungleichungen bestimmt ist.
Es gilt G = $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$-2 \le x \le 8$ (1)

$3 \le y \le 5$ (2)

Vereinbarung: ausgezogene Linie → Randgerade gehört zur Lösungsmenge!
gestrichelte Linie → Randgerade gehört **nicht** zur Lösungsmenge!

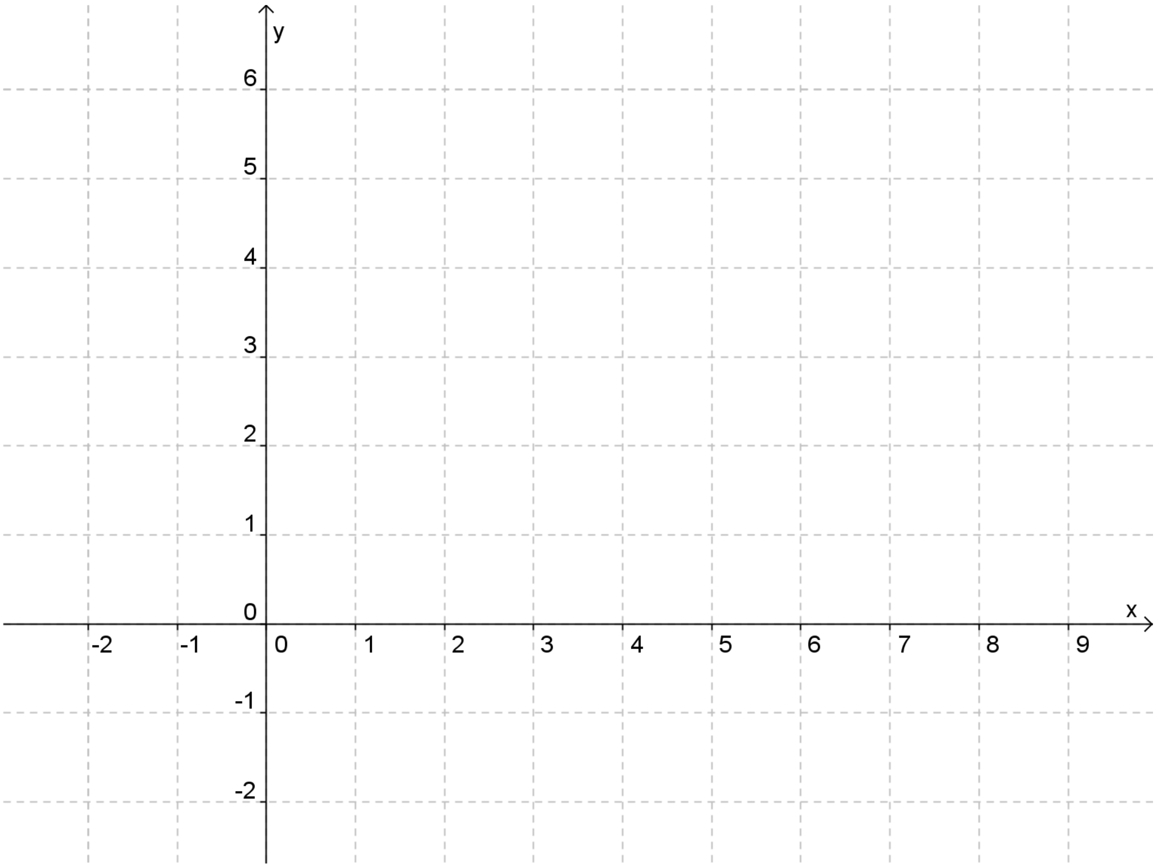


Beispiel 2 (Frommenwiler, Aufgabe 891b)

Schraffieren Sie das Gebiet, das durch die folgenden Ungleichungen bestimmt ist.
Es gilt G = **R** x **R**.

$0 \leq x \leq 6$ (1)

$0 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + 5$ (2)



Beispiel 3 (Frommenwiler, Aufgabe 892a)

Schraffieren Sie das Gebiet, das durch die folgenden Ungleichungen bestimmt ist.
Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses Gebietes. Es gilt G = **R** x **R**.

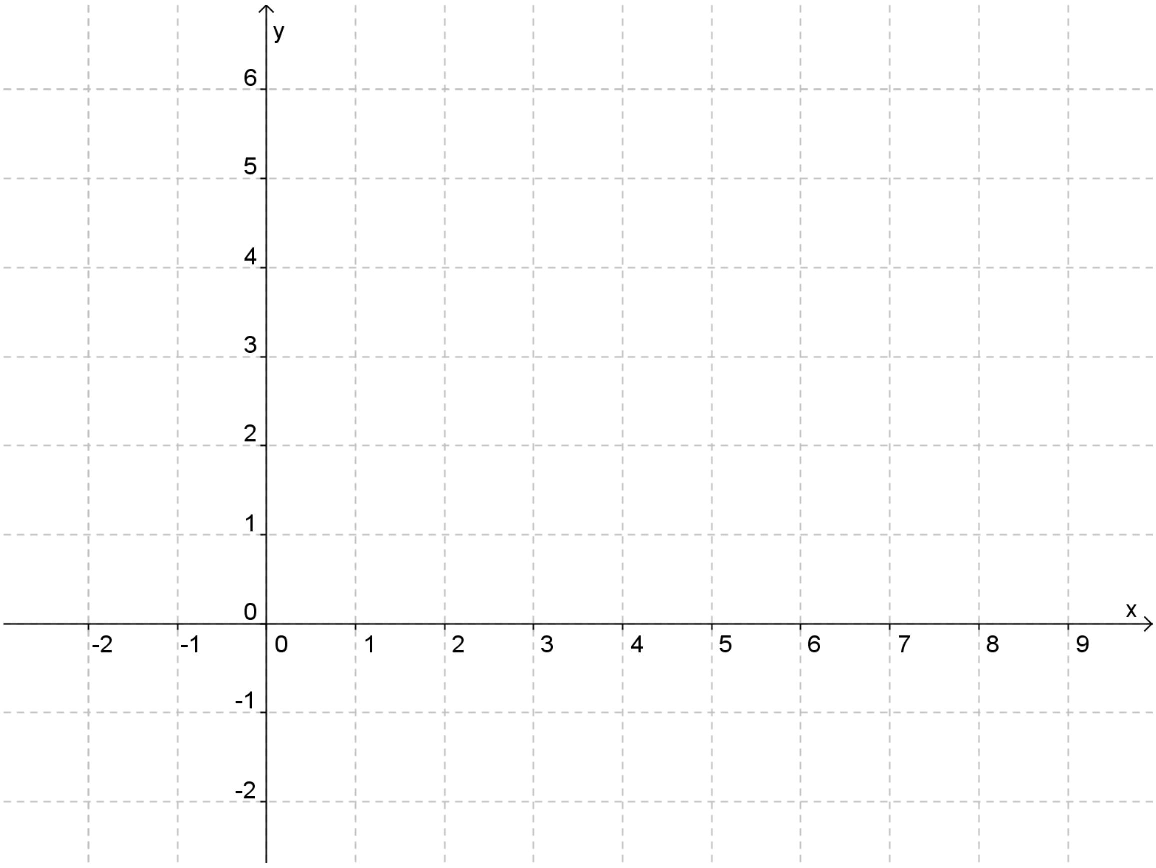
$x \geq 0$ (1)

$y \geq 0$ (2)

$y \leq \frac{2}{3}x + 2$ (3)

$y \geq -\frac{2}{3}x + 4$ (4)

$y \geq \frac{4}{3}x - 2$ (5)



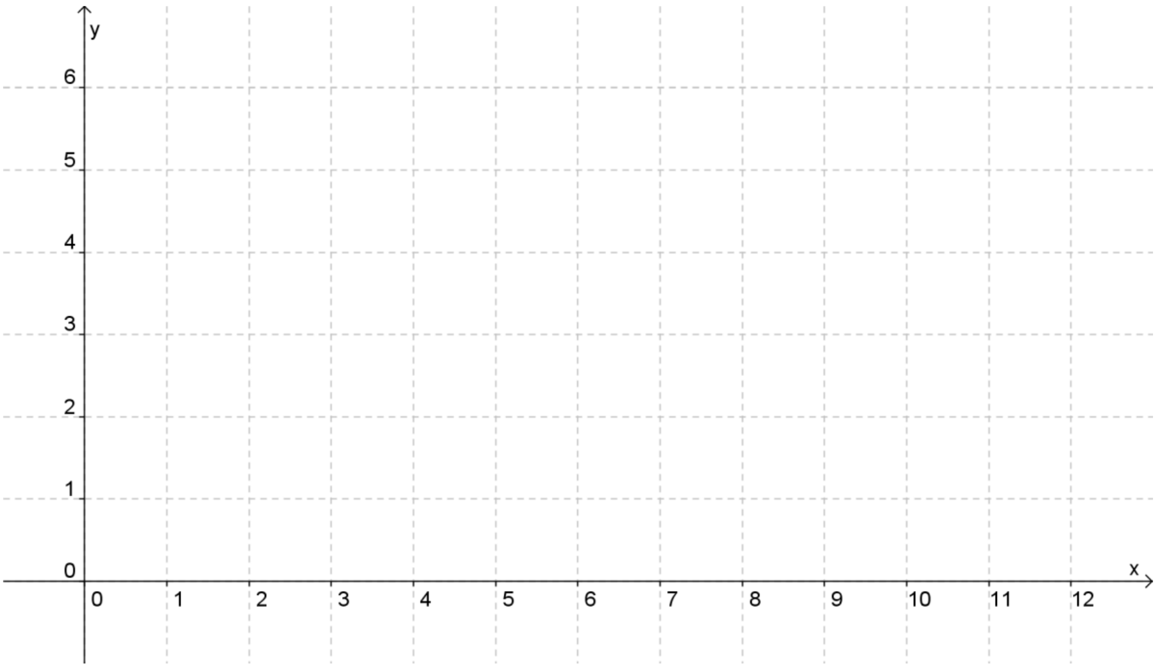
Beispiel 4 (Frommenwiler, Aufgabe 902)

Damit eine Halle optimal beleuchtet werden kann, sind mindestens 6 Beleuchtungskörper notwendig. Bei Verwendung von 250-Watt-Leuchten und 500-Watt-Leuchten darf der stündliche Verbrauch nicht mehr als 2.5 kWh betragen.
Wie viele Installationen sind möglich?

Zuordnung der Variablen und Festlegung der Definitionsmenge:

Ungleichungssystem aufstellen (Nebenbedingungen, Einschränkungen, Restriktionen):

Ungleichungen ins Koordinatensystem einzeichnen:



Lösung:

13.16 Lineare Optimierung

In unserer Wirtschaft und Technik treten Probleme auf, die mit Hilfe geeigneter Ungleichungssysteme gelöst werden können. Solche Probleme sind zum Beispiel:

a. Wie kann die Kapazität von Maschinen so eingesetzt werden, dass der Gewinn **möglichst gross** wird?
b. Wie müssen Transportmittel eingesetzt werden, damit die anfallenden **Kosten so gering wie möglich** bleiben?
c. Wie viel Waren von welcher Sorte müssen eingekauft werden, damit bei gegebenem Verkaufspreis ein optimaler Gewinn erzielt werden kann?

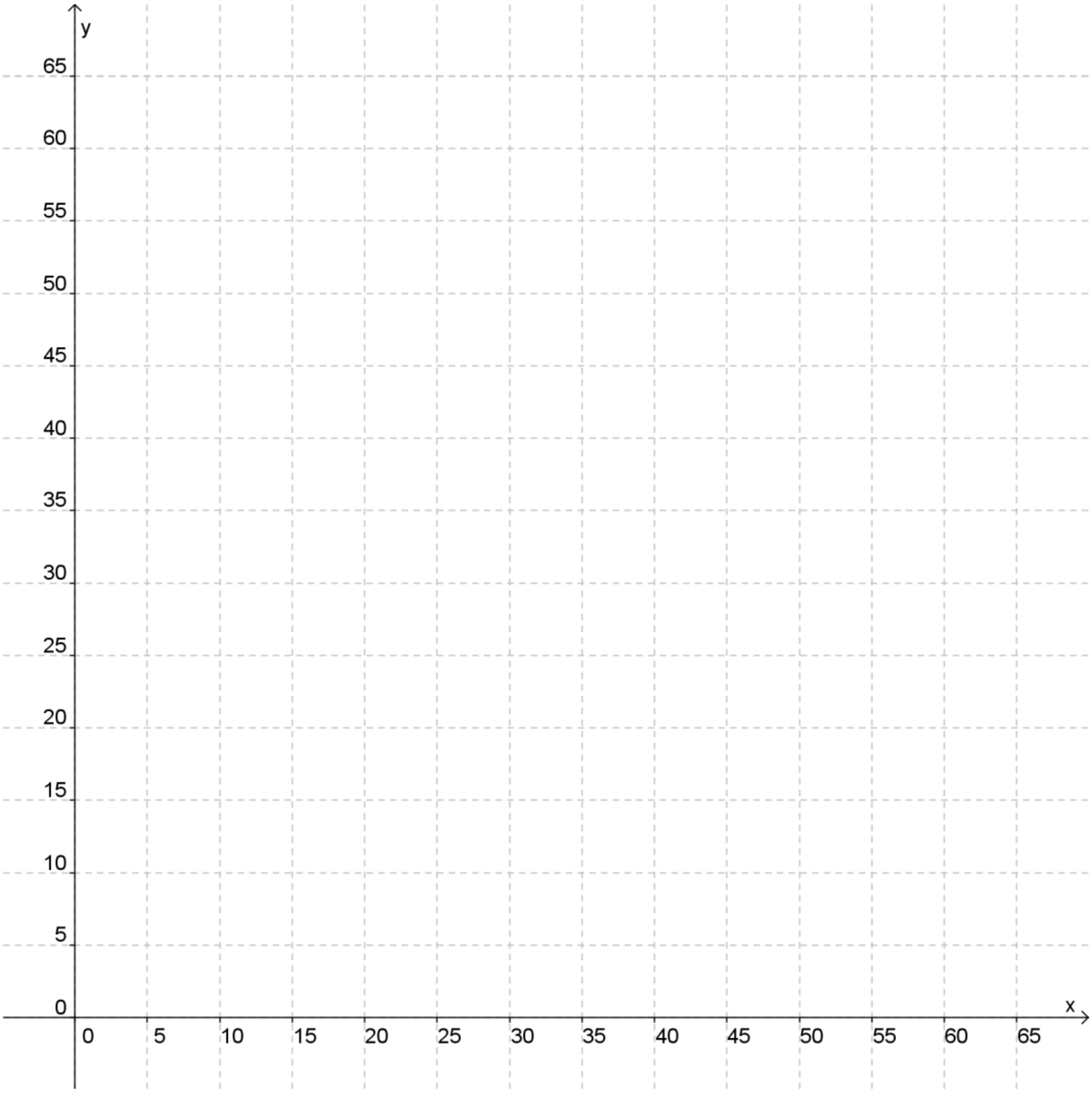
Zur Lösung solcher Probleme verbindet man genau wie bei der Aufstellung von Textgleichungen die vorgegebenen Bedingungen mit den Variablen x und y in Form von Ungleichungen. Durch die Aufgabenstellung wird nach einer sogenannten **Zielfunktionsgleichung** $z = ax + by$ gefragt, die so klein wie möglich (z. B. Kosten) oder so gross wie möglich (z. B. Gewinn) werden soll. Die Zielfunktion z ist also immer die Grösse, welche optimiert werden soll.

Lösungsschema zum linearen Optimieren mit zwei Lösungsvariablen

1. Zuordnung der Variablen und Festlegung der Definitionsmenge.
2. Die Aussagen des Textes in Form von Ungleichungen darstellen.
   Achtung: Definitionsmenge nicht vergessen! Aus $D = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ folgt: $x \geq 0$ und $y \geq 0$
3. Die Ungleichungen werden in einem Koordinatensystem grafisch dargestellt. Die Fläche, die von den Geraden berandet wird, nennt man Planungspolygon (Planungsvieleck).
4. Für das zu optimierende Problem (Minimum bzw. Maximum) wird eine Funktion aufgestellt. Diese Funktion heisst Zielfunktion (z_{min} bzw. z_{max}) und ist eine Gerade.
5. Steigung der Zielfunktion einzeichnen:
   Die Steigung der Zielfunktion z ist bekannt und kann in das Planungsvieleck eingezeichnet werden (z. B. für $z = 0$ verläuft diese Hilfsgerade durch den Nullpunkt).
6. Nun wird die Hilfsgerade parallel in dem Planungsvieleck verschoben, dass sie durch den äussersten Eckpunkt oder der äussersten Kante verläuft. **Bei einem Maximum muss der y-Achsabschnitt maximal bei einem Minimum entsprechend minimal sein!**
7. Die x- bzw. y-Koordinaten dieses Eckpunktes, eingesetzt in die Zielfunktion, ergeben den optimalen Wert für die Zielfunktion. Da das Herauslesen aus der Grafik zu ungenau ist, wird der Schnittpunkt berechnet.
8. Falls die Gerade der Zielfunktion mit einer Kante des Planungsvielecks zusammenfällt, gibt es unendlich viele Lösungen, die durch den Abschnitt der betreffenden Gerade beschrieben werden.
9. Für den Fall, dass die Nebenbedingungen von drei Entscheidungsvariablen abhängen, ergibt sich die Lösung als Schnittmenge von Ebenen, deren grafische Darstellungen entsprechend schwierig ist.

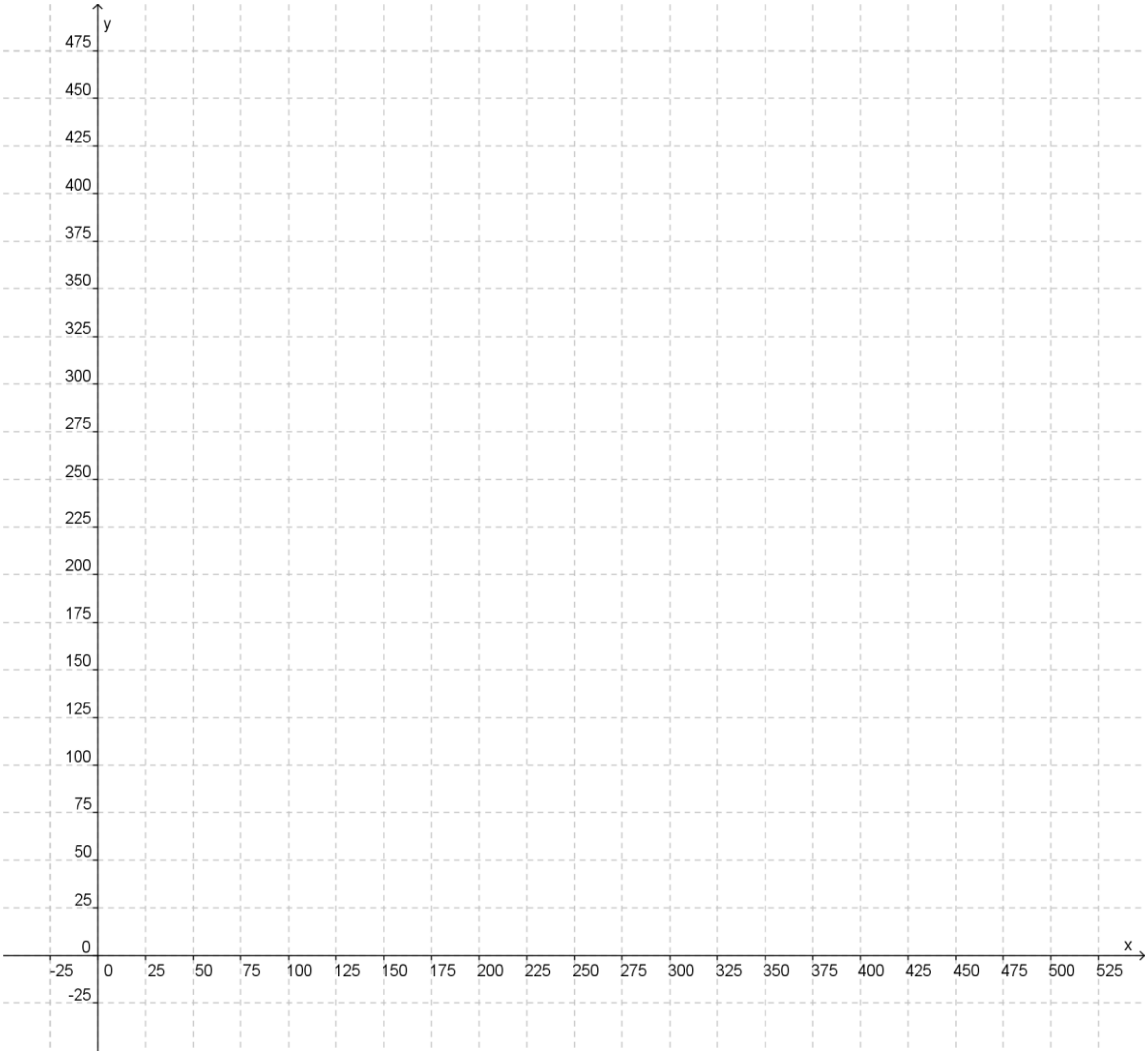
Beispiel 1

Ein EDV-Fachgeschäft bietet Monitore mit einer Bilddiagonalen von 17 sowie mit einer von 21 Zoll an. Gemäss Vorgaben sollen von den 21 Zoll-Modellen höchstens 20 Stück mehr als von den 17 Zoll-Modellen angeschafft werden. Von den 17 Zoll-Modellen sollen höchstens 40 Stück, von beiden Modellen zusammen höchstens 60 Stück gekauft werden. Der Gewinn für ein 17 Zoll-Modell beträgt CHF 40.–, für ein 21 Zoll-Modell CHF 50.–.
Bei welchen Stückzahlen ist der Gewinn am grössten **und** wie gross ist er?


y
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
x
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65

Beispiel 2 (Frommenwiler, Aufgabe 909)

Aus Reis und magerem Schweinefleisch soll ein Eintopf zubereitet werden. Pro Person werden 450 g Eintopf gerechnet, wobei nicht mehr als 300 g Schweinefleisch beigegeben werden darf. Für einen ausgewogenen Geschmack soll der Reisanteil gewichtsmässig höchstens 75 % des Schweinefleischanteils betragen.
1 kg Schweinefleisch enthält 7'362 kJ, 1 kg Reis 15'447 kJ.
Wie muss dosiert werden, damit das Essen möglichst energiereich sein soll?


y
475
450
425
400
375
350
325
300
275
250
225
200
175
150
125
100
75
50
25
0
-25
x
-25 0 25 50 75 100 125 150 175 200 225 250 275 300 325 350 375 400 425 450 475 500 525