# 14 Kurzeinführung Quadratische Gleichungen

## 14.1 Problemstellung 1

Der Flächeninhalt eines Quadrates beträgt 64 $cm^2$. Berechnen Sie die Seitenlänge a.

*Lösungsansatz*

Geg:

Ges:

Lösung:

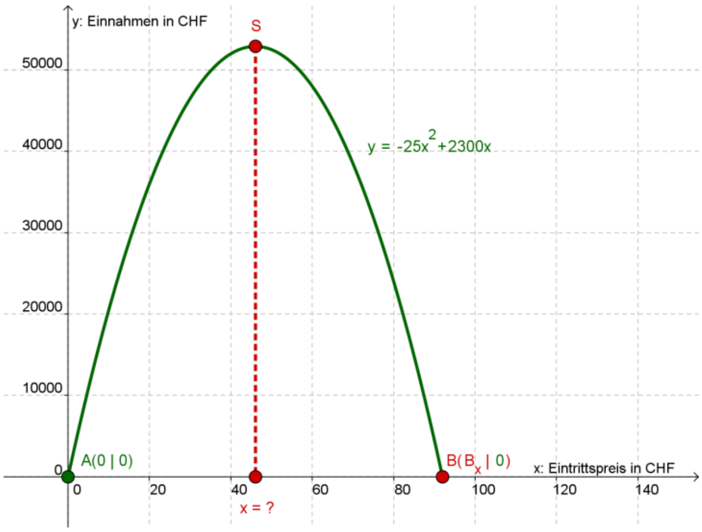
## 14.2 Problemstellung 2

Die Event AG organisiert Partys im KKL. Durch die Erhöhung der Eintrittspreise möchte die Event AG ihre Einnahmen verbessern. Sie lässt daher eine Umfrage durchführen, die feststellt, dass die Einnahmen in Abhängigkeit des Eintrittspreises wie folgt zusammenhängen:

$y = -25x^2 + 2'300x$ (**siehe Graph**)

x: Eintrittspreis in CHF

y: Einnahmen in CHF




Bei welchem Eintrittspreis sind die Einnahmen am grössten?

*Lösungsansatz*

Geg:

Ges:

Lösung:

## 14.3 Problemstellung 3

Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 77 $cm^2$. Die Länge beträgt 4 cm mehr als die Breite. Berechnen Sie die Länge und die Breite des Rechtecks.

*Lösungsansatz*

Geg:

Ges:

Lösung:

## 14.4 Einführung und Begriffe

Gleichungen, in denen die Unbekannte in der **zweiten Potenz** vorkommt, heissen quadratische Gleichungen oder **Gleichungen zweiten Grades**.

Beispiele: $x^2 = 4$, $t^2 = -3t$, $y^2 - 2y = y + 4$, $5z^2 - 3z + 1 = 2z^2 - 4$, usw.

Jede quadratische Gleichung kann durch elementare Umformungen auf die Form

$$\underset{\text{quadratischer Term}}{Ax^2} + \underset{\text{linearer Term}}{Bx} + \underset{\text{Konstante (Absolutglied)}}{C} = 0 \qquad A \neq 0$$

ABC-Form, Grundform

mit reellen Zahlen A, B, C gebracht werden. Ist A = 0, entfällt der quadratische Term und die Gleichung wird zu einer linearen Gleichung $Bx + C = 0$. Da diese bereits behandelt wurden, wird in diesem Kapitel stets $A \neq 0$ vorausgesetzt. Weil $A \neq 0$ ist, kann mit A dividiert werden. Es entsteht die Normalform einer quadratischen Gleichung.

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0 \qquad A \neq 0$$

Normalform

| | | | |
|---|---|---|---|
| z. B. | $2x^2 + 8x + 6 = 0$ | $\vert :2$ | **G**rund**f**orm, abgekürzt **GF** |
| | $x^2 + 4x + 3 = 0$ | | Normalform |

Man unterscheidet weiter zwei Typen:

$$Ax^2 + C = 0 \qquad A \neq 0, \color{red}{B = 0}$$

reinquadratische Gleichung (linearer Term fehlt)

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad A \neq 0$$

gemischtquadratische Gleichung

| | | |
|---|---|---|
| z. B. | $x^2 - 9 = 0$ | reinquadratische Gleichung |
| | $5x^2 + 7x - 4 = 0$ | gemischtquadratische Gleichung |

Einige spezielle Fälle von quadratischen Gleichungen konnten wir bereits ohne Lösungsformel lösen. Diese Spezialfälle werden auf den nächsten Seiten nochmals kurz aufgeführt.

## 14.5 Reinquadratische Gleichung: $Ax^2 + C = 0$ (siehe Problemstellung 1)

Der einfachste Typ einer quadratischen Gleichung entsteht, wenn der lineare Term fehlt.

| | | |
|---|---|---|
| $Ax^2 + C = 0$ | $A \neq 0, B = 0$ | GF reinquadratische Gleichung |

Diese reinquadratische Gleichung lässt sich wie folgt umformen:

$$x^2 = -\frac{C}{A} = u$$

Je nachdem, ob die Konstante $u \in \mathbf{R}$ grösser als Null, gleich Null oder kleiner als Null ist, ergeben sich unterschiedliche Lösungen:

$$u > 0: \quad L = \left\{+\sqrt{u}; -\sqrt{u}\right\}$$
$$u = 0: \quad L = \{0\}$$
$$u < 0: \quad L = \{\ \}$$

## 14.6 Gemischtquadratische Gleichungen ohne Konstante: $Ax^2 + Bx = 0$ (siehe Problemstellung 2)

Auch die gemischtquadratische Gleichung ohne Konstante (C = 0) kann man ganz einfach lösen. Dazu wird die Gleichung umgeformt und faktorisiert:

| | | |
|---|---|---|
| $Ax^2 + Bx = 0$ | $A \neq 0, C = 0$ | (Konstante C fehlt) |

$$Ax^2 + Bx = 0 \qquad |:A$$
$$x^2 + \frac{B}{A}x = 0 \qquad |x \text{ ausklammern}$$
$$x \cdot \left(x + \frac{B}{A}\right) = 0$$

Die Lösungen ergeben sich aus der Eigenschaft, dass ein Produkt zweier Faktoren nur Null sein kann, wenn (mindestens) ein Faktor gleich Null ist. Daher können die Lösungen direkt abgelesen werden:

$$x_1 = 0 \text{ oder } x_2 + \frac{B}{A} = 0, \text{ somit: } \underline{\underline{L = \left\{0; -\frac{B}{A}\right\}}}$$

## 14.7 Gemischtquadratische Gleichungen mit Konstante (siehe Problemstellung 3)

Die gemischtquadratische Gleichung mit Konstante kann manchmal mit etwas Geschick oder Erfahrung faktorisiert werden.

| | | |
|---|---|---|
| $Ax^2 + Bx + C = 0$ | $A \neq 0$ | Grundform |

Die Lösung ergibt sich, wenn die Gleichung in folgende Form gebracht werden kann:

$$(x - u) \cdot (x - v) = 0$$

Die Lösungen ergeben sich aus der Eigenschaft, dass ein Produkt zweier Faktoren nur Null sein kann, wenn (mindestens) ein Faktor gleich Null ist. Die Lösungen lassen sich wie im letzten Kapitel direkt ablesen.

$$L = \underline{\underline{\{u; v\}}}$$

### Hinweise

- Leider ist nicht jede gemischtquadratische Gleichung mit Konstante ganzzahlig faktorisierbar. Im nächsten Abschnitt werden Sie ein Verfahren kennenlernen, das die allgemeine Lösung von gemischtquadratischen Gleichungen ermöglicht. Das Verfahren heisst quadratische Ergänzung.
- Bei gemischtquadratischen Gleichungen **ohne** Konstante ($Ax^2 + Bx = 0$) darf nicht durch die Lösungsvariable x dividiert werden, da sonst die Lösung $x = 0$ verloren geht.

## 14.8 Lösungsformel und Einfluss der Diskriminante

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (A \neq 0)$$

ABC-Formel

Der Ausdruck **unter** der Wurzel $D = B^2 - 4AC$ heisst Diskriminante (lat. discriminare: trennen, unterscheiden) und bestimmt die Anzahl der Lösungen:

| | | |
|---|---|---|
| $D > 0$: | zwei reelle Lösungen | $L = \{x_1; x_2\}$ |
| $D = 0$: | eine reelle Lösung $(x_1 = x_2 = x)$ | $L = \{x\}$ |
| $D < 0$: | keine reelle Lösung | $L = \{\ \}$ |

**Hinweise**

– Diskriminante heisst die zur Unterscheidung dienende Grösse. Sie unterscheidet die Anzahl Lösungen der quadratischen Gleichung.
– Im Fall $D < 0$ gibt es keine reelle Lösungen, da die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl innerhalb der reellen Zahlen **R** nicht definiert ist.
– Die Lösungsformel auf **reinquadratische** und **gemischtquadratische Gleichungen ohne Konstante** anzuwenden ist **wenig sinnvoll**, da diese schneller durch Radizieren bzw. durch Faktorisieren gelöst werden können.

## 14.9 Übungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen mit der Lösungsformel.
Für alle Aufgaben gilt G = **R**.

1. $6x^2 + x - 15 = 0$

2. $3p^2 + 4p = (p-5)^2$

3. $(5x+2)^2 + 46x = 146x^2 + 13$

## 14.10 Überblick über die allgemeine Lösungsformel

Die allgemeine Lösungsformel ist für die Lösung aller quadratischen Gleichungen anwendbar, wie folgende Aufstellung zeigt:

| Gemischtquadratische Gleichung mit Konstante | Eingesetzt in Lösungsformel | Lösungen $x_1$ bzw. $x_2$ |
|---|---|---|
| $Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad A, B, C \neq 0$ | $x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ | $x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ <br> $x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ |

| Gemischtquadratische Gleichung ohne Konstante | Eingesetzt in Lösungsformel | Lösungen $x_1$ bzw. $x_2$ |
|---|---|---|
| $Ax^2 + Bx = 0 \qquad A, B \neq 0; \quad C = 0$ | $x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 0}}{2A} = \frac{-B \pm B}{2A}$ | $x_1 = \frac{-B + B}{2A} = 0$ <br> $x_2 = \frac{-B - B}{2A} = \frac{-2B}{2A} = -\frac{B}{A}$ |

| Reinquadratische Gleichung ohne linearen Term | Eingesetzt in Lösungsformel | Lösungen $x_1$ bzw. $x_2$ |
|---|---|---|
| $Ax^2 + C = 0 \qquad A, C \neq 0; \quad B = 0$ | $x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4AC}}{2A} = \frac{\pm\sqrt{-AC}}{A} = \frac{\pm\sqrt{-AC}}{\sqrt{A^2}} = \pm\sqrt{-\frac{C}{A}}$ | $x_1 = +\sqrt{-\frac{C}{A}}$ <br> $x_2 = -\sqrt{-\frac{C}{A}}$ |

**Hinweis:** Die Lösungsformel auf **reinquadratische** und **gemischtquadratische Gleichungen ohne Konstante** anzuwenden ist **wenig sinnvoll**, da diese schneller durch Radizieren bzw. durch Faktorisieren gelöst werden können.