14 Quadratische Gleichungen

14.1 Einführung und Begriffe

Gleichungen, in denen die Unbekannte in der **zweiten Potenz** vorkommt, heissen quadratische Gleichungen oder **Gleichungen zweiten Grades**.

Beispiele: $x^2 = 4$, $t^2 = -3t$, $y^2 - 2y = y + 4$, $5z^2 - 3z + 1 = 2z^2 - 4$, usw.

Jede quadratische Gleichung kann durch elementare Umformungen auf die Form

$\underset{\text{quadratischer Term}}{Ax^2} + \underset{\text{linearer Term}}{Bx} + \underset{\text{Konstante (Absolutglied)}}{C} = 0 \qquad A \neq 0$	ABC-Form, Grundform

mit reellen Zahlen A, B, C gebracht werden. Ist A = 0, entfällt der quadratische Term und die Gleichung wird zu einer linearen Gleichung $Bx + C = 0$. Da diese bereits behandelt wurden, wird in diesem Kapitel stets $A \neq 0$ vorausgesetzt. Weil $A \neq 0$ ist, kann mit A dividiert werden. Es entsteht die Normalform einer quadratischen Gleichung.

$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0 \qquad A \neq 0$	Normalform

z. B. $2x^2 + 8x + 6 = 0 \quad |:2$ — **G**rund**f**orm, abgekürzt **GF**

$x^2 + 4x + 3 = 0$ — Normalform

Man unterscheidet weiter zwei Typen:

$Ax^2 + C = 0 \qquad A \neq 0, B = 0$	reinquadratische Gleichung (linearer Term fehlt)
$Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad A \neq 0$	gemischtquadratische Gleichung

z. B. $x^2 - 9 = 0$ — reinquadratische Gleichung

$5x^2 + 7x - 4 = 0$ — gemischtquadratische Gleichung

Einige spezielle Fälle von quadratischen Gleichungen konnten wir bereits ohne Lösungsformel lösen. Diese Spezialfälle werden auf den nächsten Seiten nochmals kurz aufgeführt.

14.2 Reinquadratische Gleichung: $Ax^2 + C = 0$

Der einfachste Typ einer quadratischen Gleichung entsteht, wenn der lineare Term fehlt.

$Ax^2 + C = 0$	$A \neq 0, B = 0$	GF reinquadratische Gleichung

Diese reinquadratische Gleichung lässt sich wie folgt umformen:

$$x^2 = -\frac{C}{A} = u$$

Je nachdem, ob die Konstante $u \in \mathbf{R}$ grösser als Null, gleich Null oder kleiner als Null ist, ergeben sich unterschiedliche Lösungen:

$u > 0: \quad L = \{+\sqrt{u}; -\sqrt{u}\}$

$u = 0: \quad L = \{0\}$

$u < 0: \quad L = \{\ \}$

Beispiele

1.
$$\begin{aligned} 3x^2 - 27 &= 0 && \mid +27 \\ 3x^2 &= 27 && \mid :3 \\ x^2 &= 9 && \mid \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \underline{\pm\sqrt{9}} \end{aligned}$$

somit: $L = \underline{\underline{\{-3; 3\}}}$ $\quad \mid x_1 \neq x_2$

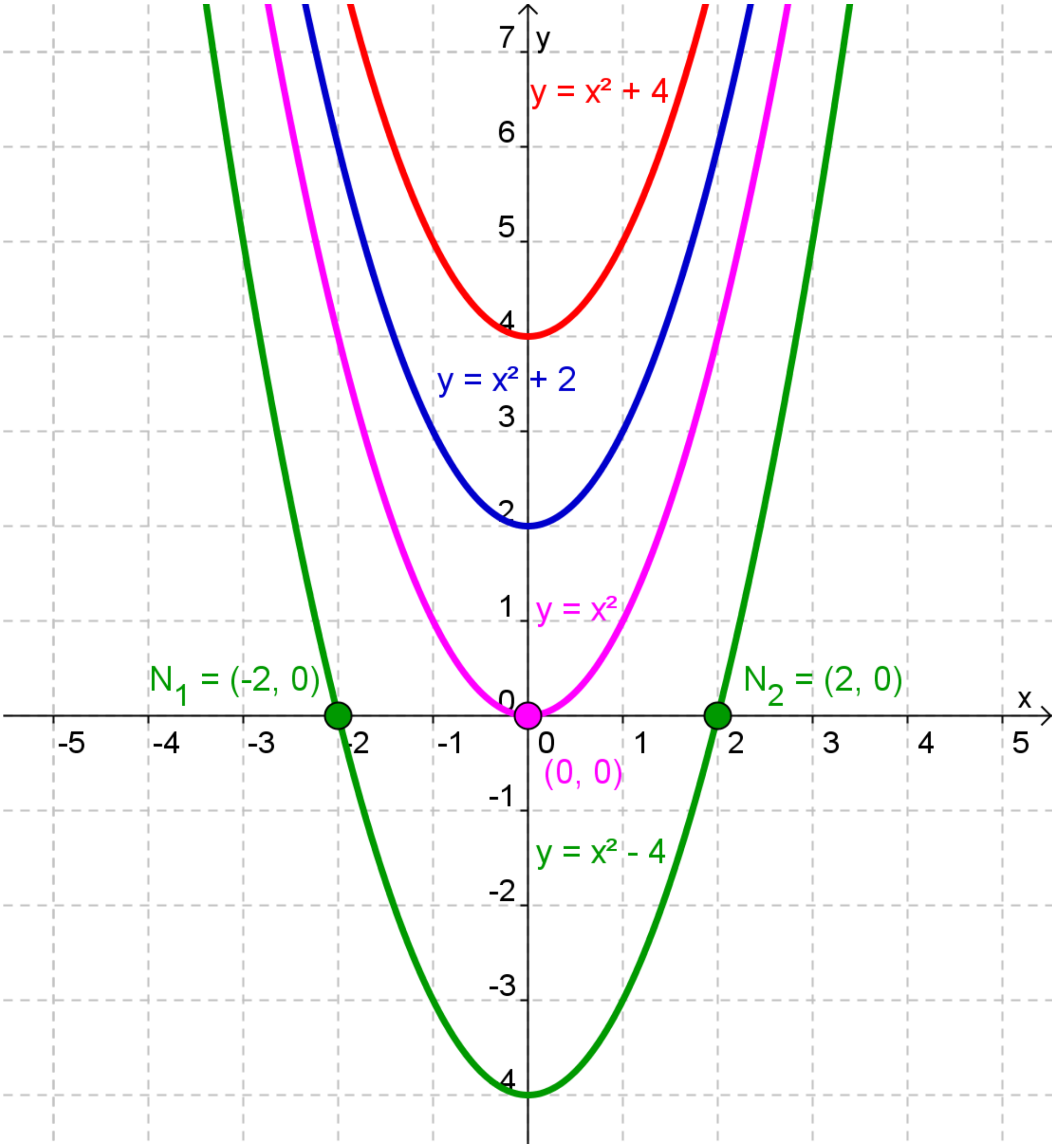
2.
$$\begin{aligned} 3(x^2 - 9) &= -27 && \mid \text{ausklammern} \\ 3x^2 - 27 &= -27 && \mid +27 \text{ und } :3 \\ x^2 &= 0 && \mid \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \underline{\pm\sqrt{0}} \end{aligned}$$

somit: $L = \underline{\underline{\{0\}}}$ $\quad \mid x_1 = x_2 = 0$

3.
$$\begin{aligned} 3x^2 + 27 &= 0 && \mid -27 \\ 3x^2 &= -27 && \mid :3 \\ x^2 &= -9 && \mid \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{-9} && \text{nicht definiert} \end{aligned}$$

somit: $L = \underline{\underline{\{\ \}}}$

Grafische Interpretation



Zusammenhang **quadratische Funktion** und **quadratische Gleichung**:

quadratische Funktion:	$y = x^2 - 4$
	$\updownarrow$
quadratische Gleichung:	$0 = x^2 - 4$

somit:

Die Nullstellen N_1 und N_2 ($y = 0$) der quadratischen Funktion entsprechen den Lösungen der quadratischen Gleichung! Anschaulich klar, wenn zum Beispiel bei der Funktion $y = x^2 - 4$ der y-Wert mit Null ersetzt wird, erhält man die quadratische Gleichung.

14.3 Gemischtquadratische Gleichungen ohne Konstante: $Ax^2 + Bx = 0$

Auch die gemischtquadratische Gleichung ohne Konstante (C = 0) kann man ganz einfach lösen. Dazu wird die Gleichung umgeformt und faktorisiert:

$$\boxed{Ax^2 + Bx = 0 \qquad A \neq 0,\ C = 0}$$

(Konstante C fehlt)

$$Ax^2 + Bx = 0 \qquad |:A$$

$$x^2 + \frac{B}{A}x = 0 \qquad |\text{x ausklammern}$$

$$x \cdot \left(x + \frac{B}{A}\right) = 0$$

Die Lösungen ergeben sich aus der Eigenschaft, dass ein Produkt zweier Faktoren nur Null sein kann, wenn (mindestens) ein Faktor gleich Null ist. Daher können die Lösungen direkt abgelesen werden:

$$x_1 = 0 \text{ oder } x_2 + \frac{B}{A} = 0, \text{ somit: } L = \underline{\underline{\left\{0; -\frac{B}{A}\right\}}}$$

Beispiele

1. $2x^2 + 5x = 0 \qquad |\text{x ausklammern}$

Achtung: $\underbrace{\text{nicht mit x dividieren!}}_{\text{x=0 würde verschwinden!}}$

$$\underset{0}{x} \cdot \underbrace{(2x + 5)}_{0} = 0$$

$$x = \underline{0} \quad \underset{\text{oder}}{\vee} \quad 2x + 5 = 0 \;\rightarrow\; 2x = -5 \;\rightarrow\; x = \underline{-2.5}$$

somit: $L = \underline{\underline{\{0; -2.5\}}}$

2. $3x^2 = 87x \qquad |-87x$

Achtung: $\underbrace{\text{nicht mit x dividieren!}}_{\text{x=0 würde verschwinden!}}$

$$3x^2 - 87x = 0 \qquad |:3$$

$$x^2 - 29x = 0 \qquad |\text{x ausklammern}$$

$$\underset{0}{x} \cdot \underbrace{(x - 29)}_{0} = 0$$

$$x = \underline{0} \quad \underset{\text{oder}}{\vee} \quad x = \underline{29}$$

somit: $L = \underline{\underline{\{0; 29\}}}$

14.4 Gemischtquadratische Gleichungen mit Konstante

Die gemischtquadratische Gleichung mit Konstante kann manchmal mit etwas Geschick oder Erfahrung faktorisiert werden.

$$\boxed{Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad A \neq 0}$$

Grundform

Die Lösung ergibt sich, wenn die Gleichung in folgende Form gebracht werden kann:

$$(x-u)\cdot(x-v) = 0$$

Die Lösungen ergeben sich aus der Eigenschaft, dass ein Produkt zweier Faktoren nur Null sein kann, wenn (mindestens) ein Faktor gleich Null ist. Die Lösungen lassen sich wie im letzten Kapitel direkt ablesen.

$$L = \underline{\underline{\{u; v\}}}$$

Beispiele

1.
$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= 15 && |-15 \\ x^2 + 2x - 15 &= 0 && |\text{faktorisieren} \\ \underbrace{(x+5)}_{0}\cdot\underbrace{(x-3)}_{0} &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \underline{-5} \quad \underset{\text{oder}}{\vee} \quad x = \underline{3}$$

somit: $L = \underline{\underline{\{-5; 3\}}}$

2.
$$\begin{aligned} 3x^2 + 18x - 21 &= 0 && |:3 \\ x^2 + 6x - 7 &= 0 && |\text{faktorisieren} \\ \underbrace{(x+7)}_{0}\cdot\underbrace{(x-1)}_{0} &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \underline{-7} \quad \underset{\text{oder}}{\vee} \quad x = \underline{1}$$

somit: $L = \underline{\underline{\{-7; 2\}}}$

Hinweise

- Leider ist nicht jede gemischtquadratische Gleichung mit Konstante ganzzahlig faktorisierbar. Im nächsten Abschnitt werden Sie ein Verfahren kennenlernen, das die allgemeine Lösung von gemischtquadratischen Gleichungen ermöglicht. Das Verfahren heisst quadratische Ergänzung.

- Bei gemischtquadratischen Gleichungen **ohne** Konstante ($Ax^2 + Bx = 0$) darf nicht durch die Lösungsvariable x dividiert werden, da sonst die Lösung x = 0 verloren geht.

14.5 Überblick über die Begriffe im Zusammenhang mit quadratischen Gleichungen

Begriff	Bemerkungen	Zahlenbeispiel	Allgemeine Form
ABC-Form od. Grundform (GF)	Jede quadr. Gleichung kann durch elementare Umformungen in diese Form gebracht werden! Können **nur in günstigen Fällen** ohne Formel gelöst werden!	$2x^2+8x+6=0$	$\underbrace{Ax^2}_{\text{quadratischer Term}} + \underbrace{Bx}_{\text{linearer Term}} + \underbrace{C}_{\text{Konstante (Absolutglied)}} = 0 \qquad A \neq 0$
Normalform (NF)	Faktor vor dem quadr. Term ist 1.	$x^2+4x+3=0$	$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0 \qquad A \neq 0$
Reinquadratische Gleichungen	Linearer Term fehlt, **können ohne Formel gelöst werden!**	$x^2-9=0 \quad \vert +9$ $x^2=9 \quad \vert \sqrt{\ }$ $x_{1,2}=\underline{\underline{\pm 3}}$	$Ax^2+C=0 \qquad A \neq 0, B=0$
Gemischtquadratische Gleichungen **ohne Konstante**	Konstante fehlt, **können ohne Formel gelöst werden!**	$2x^2+5x=0 \quad \vert x$ ausklammern $\underset{0}{x} \cdot \underbrace{(2x+5)}_{0}=0 \quad \vert$ Faktoren Null setzen $\underline{\underline{x_1=0 \vee x_2=-\frac{5}{2}}}$	$Ax^2+Bx=0 \qquad A \neq 0, C=0$

14.6 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
261 (a, b, d, e, f, i, j)	93	Kontrolle mit TI üben
262 (alle)	93	Kontrolle mit TI üben
264 (a, b, c, e, f, g, h)	94	Kontrolle mit TI üben
265 (alle)	95	Kontrolle mit TI üben
266 (alle)	95	Kontrolle mit TI üben
267 (alle)	96	Kontrolle mit TI üben
268 (alle)	96	Kontrolle mit TI üben
269 (a, c, d)	96	Kontrolle mit TI üben
270 (a, b, g, j)	96	Kontrolle mit TI üben
271 (a, b, c, e)	96	Kontrolle mit TI üben
272 (a, c, d, f)	97	Kontrolle mit TI üben
273 (a, c, e, i)	97	Kontrolle mit TI üben

14.7 Quadratische Ergänzung

Gemischtquadratische Gleichungen mit Konstante können nicht immer ganzzahlig faktorisiert werden! Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung kann jede quadratische Gleichung faktorisiert und damit gelöst werden. Das Ziel der quadratischen Ergänzung ist:

Aus quadratischem und linearem Anteil ein Binom bilden (Produkt).

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $2x^2+8x+6=0$

1. **Grundform in Normalform bringen (Division durch A)**

$2x^2+8x+6=0 \qquad |:2$

$x^2+4x+3=0 \qquad |\text{Normalform}$

2. **Konstante $+3$ auf rechte Seite bringen**

$x^2+4x+3=0 \qquad |-3$

$\underbrace{x^2+4x}_{\text{Teil eines Binoms}} = -3$

3. **Binom bilden (Rezept: Quadrat der Hälfte des linearen Gliedes addieren)**

$\underbrace{x^2+4x+\underbrace{\left(\frac{+4}{2}\right)^2}_{\text{quadr. Ergänzung}}}_{\text{Binom entsteht}} = -3+\underbrace{\left(\frac{+4}{2}\right)^2}_{\text{quadr. Ergänzung}} \qquad |$rechte **und** linke Seite quadr. ergänzen

Merke: Die quadr. Ergänzung ist immer positiv $\rightarrow$ wegen 2. Potenz (quadrieren)!

$\underbrace{(x+2)^2}_{\text{Binom}} = -3+2^2 \qquad |$**Achtung:** Binom immer kontrollieren!

$(x+2)^2=1 \qquad |\sqrt{}$

$x_{1,2}+2=\pm\sqrt{1} \qquad |-2$

$x_{1,2} = \underline{-2\pm 1}$

$L=\underline{\underline{\{-1;-3\}}} \qquad |$Probe: Einsetzen in **ursprüngliche** Gleichung

Theorie quadratische Ergänzung

Beispiel: $\underbrace{x^2 + 4x}_{\text{Teil eines Binoms}} \quad + ?$ |quadr. und lineares Glied bekannt

Binomtyp: $\left(x^2 + 2ax + a^2\right) = (x+a)(x+a)$ |Koeffizientenvergleich

somit: $2a = 4$

$$\underline{a = \frac{4}{2}}$$

$$x^2 + 4x + \left(\frac{+4}{2}\right)^2 = x^2 + 4x + 2^2 = \underbrace{(x+2)^2}_{\text{Binom}}$$

Durch die quadratische Ergänzung «verschwindet» der lineare Anteil im Produkt (Binom).

Hinweise

– Ist der Koeffizient A des quadratischen Gliedes $Ax^2 + Bx + C = 0$ von Eins verschieden, so muss die Gleichung zuerst durch A dividiert werden.

– Wie bei den reinquadratischen Gleichungen, kann eine quadratische Gleichung auch **nur eine** oder sogar **keine Lösung** haben. Daran ändert auch das Verfahren der quadratischen Ergänzung nichts!

– Sorgfältiges Arbeiten und gute Arbeitstechnik (Kontrolle des Binoms, quadratische Ergänzung mit Farben hervorheben, etc.) helfen Flüchtigkeitsfehler zu vermeiden!

14.8 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
274 (alle)	97	Kontrolle mit TI üben

14.9 Lösungsformeln für quadratische Gleichungen

Wenn die quadratische Ergänzung auf die **Normalform** $x^2 + px + q = 0$ angewendet wird, erhält man die pq-Lösungsformel.

Zahlenlösung

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \qquad |-3$$

$$x^2 + 4x = -3 \qquad |+\left(\frac{4}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 \qquad |\text{Binom}$$

$$\underbrace{(x+2)^2}_{\text{Binom}} = -3 + 4 = 1 \qquad |\sqrt{}$$

$$x_{1,2} + 2 = \pm\sqrt{1} \qquad |-2$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 1$$

$$L = \{-1; -3\}$$

Allgemeine Lösung

$$x^2 + px + q = 0 \qquad |-q$$

$$x^2 + px = -q \qquad |+\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \qquad |\text{Binom}$$

$$\underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}_{\text{Binom}} = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \qquad |\sqrt{}$$

$$x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad \left|-\frac{p}{2}\right.$$

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Kennt man die beliebigen, aber festen Parameter p und q, so kann man durch Einsetzen in die Lösungsformel die Lösungen berechnen!

Wenn die quadratische Ergänzung auf die **Grundform** $Ax^2 + Bx + C = 0$ angewendet wird, erhält man die ABC-Lösungsformel.

Zahlenlösung

$$2x^2+8x+6=0 \qquad |:2$$

$$x^2+4x+3=0 \qquad |-3$$

$$x^2+4x=-3 \qquad \left|+\left(\frac{4}{2}\right)^2\right.$$

$$x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2=-3+\left(\frac{4}{2}\right)^2 \qquad |\text{Binom}$$

$$\underbrace{(x+2)^2}_{\text{Binom}}=-3+4$$

$$(x+2)^2=1 \qquad |\sqrt{\ }$$

$$x_{1,2}+2=\pm\sqrt{1} \qquad |-2$$

$$x_{1,2}=-2\pm 1$$

$$L=\underline{\underline{\{-1;-3\}}}$$

Allgemeine Lösung

$$Ax^2+Bx+C=0 \qquad |:A$$

$$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0 \qquad \left|-\frac{C}{A}\right.$$

$$x^2+\frac{B}{A}x=-\frac{C}{A} \qquad \left|+\left(\frac{B}{2A}\right)^2\right.$$

$$x^2+\frac{B}{A}x+\left(\frac{B}{2A}\right)^2=-\frac{C}{A}+\left(\frac{B}{2A}\right)^2 \qquad |\text{Binom}$$

$$\underbrace{\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2}_{\text{Binom}}=-\frac{C}{A}+\frac{B^2}{4A^2}$$

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2=-\frac{C}{A}\cdot\frac{4A}{4A}+\frac{B^2}{4A^2} \qquad |\text{gleichn.}$$

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2=\frac{B^2-4AC}{4A^2} \qquad |\sqrt{\ }$$

$$x_{1,2}+\frac{B}{2A}=\pm\sqrt{\frac{B^2-4AC}{4A^2}} \qquad \left|-\frac{B}{2A}\right.$$

$$x_{1,2}=-\frac{B}{2A}\pm\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}}$$

Kennt man die beliebigen, aber festen Parameter A, B und C, so kann man durch Einsetzen in die Lösungsformel die Lösungen berechnen!

Zusammenfassung und Einfluss der Diskriminante

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (A \neq 0)$$

ABC-Formel

Der Ausdruck **unter** der Wurzel $D = B^2 - 4AC$ heisst Diskriminante (lat. discriminare: trennen, unterscheiden) und bestimmt die Anzahl der Lösungen:

$D > 0$:	zwei reelle Lösungen	$L = \{x_1; x_2\}$
$D = 0$:	eine reelle Lösung $(x_1 = x_2 = x)$	$L = \{x\}$
$D < 0$:	keine reelle Lösung	$L = \{\ \}$

Hinweise

- Diskriminante heisst die zur Unterscheidung dienende Grösse. Sie unterscheidet die Anzahl Lösungen der quadratischen Gleichung.
- Im Fall D < 0 gibt es keine reelle Lösungen, da die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl innerhalb der reellen Zahlen **R** nicht definiert ist.
- Die Lösungsformel auf **reinquadratische** und **gemischtquadratische Gleichungen ohne Konstante** anzuwenden ist **wenig sinnvoll**, da diese schneller durch Radizieren bzw. durch Faktorisieren gelöst werden können.

14.10 Übungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen mit der Lösungsformel.
Für alle Aufgaben gilt G = **R**.

1. $6x^2 + x - 15 = 0$

$D = \mathbb{R}, \qquad A = 6, \quad B = 1, \quad C = -15$

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-15)}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{12} = \underline{\frac{-1 \pm 19}{12}}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 19}{12} = \underline{\frac{3}{2}} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-1 - 19}{12} = \underline{-\frac{5}{3}}$$

Kontrolle:

$$\underbrace{6\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}_{0} - 15 = 0 \qquad (w)$$

$$\underbrace{6\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right) - 15}_{0} = 0 \qquad (w)$$

somit:

$$\underline{\underline{L = \left\{-\frac{5}{3}; \frac{3}{2}\right\}}}$$

2. $3p^2 + 4p = (p-5)^2$

$D = \mathbb{R}$

$3p^2 + 4p = p^2 - 10p + 25$ |in GF umformen

$2p^2 + 14p - 25 = 0$ |$A = 2, \quad B = 14, \quad C = -25$

$$p_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-25)}}{2 \cdot 2} = \frac{-14 \pm \sqrt{396}}{4}$$

$$p_1 = \frac{-14 + \sqrt{396}}{4} = \underline{1.4749} \quad \vee \quad p_2 = \frac{-14 - \sqrt{396}}{4} = \underline{-8.4749}$$

Kontrolle: $\underbrace{3 \cdot 1.4749^2 + 4 \cdot 1.4749}_{12.4261} = \underbrace{(1.4749 - 5)^2}_{12.4261}$ (w)

$\underbrace{3 \cdot (-8.4749)^2 + 4 \cdot (-8.4749)}_{181.5739} = \underbrace{(-8.4749 - 5)^2}_{181.5739}$ (w)

somit: $L = \underline{\underline{\{-8.4749; 1.4749\}}}$

3. $(5x+2)^2 + 46x = 146x^2 + 13$

$D = \mathbb{R}$

$25x^2 + 20x + 4 + 46x = 146x^2 + 13$ |in GF umformen

$0 = 121x^2 - 66x + 9$ |faktorisieren

$0 = (11x - 3)^2$ |$x_1 = x_2 = \frac{3}{11}$

mit Lösungsformel: $A = 121, \quad B = -66, \quad C = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{66 \pm \sqrt{(-66)^2 - 4 \cdot 121 \cdot 9}}{2 \cdot 121} = \frac{66 \pm 0}{2 \cdot 121} = \frac{66}{2 \cdot 121} = \underline{\frac{3}{11}}$$

Kontrolle: $\underbrace{\left(5 \cdot \frac{3}{11} + 2\right)^2 + 46 \cdot \frac{3}{11}}_{23.8595} = \underbrace{146 \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^2 + 13}_{23.8595}$ (w)

somit: $L = \underline{\underline{\left\{\frac{3}{11}\right\}}}$

4. $3b^2 + 4 = 5b$

Hinweis: Wegen solchen Aufgaben schreiben wir die Lösungsformel mit Grossbuchstaben. Die Verwechslungsmöglichkeiten mit b können so verhindert werden!

$D = \mathbf{R}$

$3b^2 - 5b + 4 = 0 \qquad |A = 3, \quad B = -5, \quad C = 4$

$$b_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{6}$$

$D < 0 \quad \rightarrow \quad L = \underline{\underline{\{\ \}}}$

5. Für welche Werte des Parameters k hat die Gleichung $a^2 - 3a + k = 0$ genau eine Lösung?

$D = \mathbf{R}$

$A = 1, \quad B = -3, \quad C = k$

$a_1 = a_2 \quad \rightarrow \quad D = B^2 - 4AC = 0$

eingesetzt: $\quad (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 0$

$9 = 4k$

$k = \underline{\frac{9}{4}}$

Kontrolle: $\quad a^2 - 3a + \frac{4}{9} = 0$

$$a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{9}{4}}}{2} = \frac{3 \pm 0}{2} = \underline{\frac{3}{2}}$$

somit: $\quad$ für $\underline{\underline{k = \frac{9}{4}}}$ hat die Gleichung genau eine Lösung!

14.11 Überblick über die allgemeine Lösungsformel

Die allgemeine Lösungsformel ist für die Lösung aller quadratischen Gleichungen anwendbar, wie folgende Aufstellung zeigt:

Gemischtquadratische Gleichung mit Konstante	Eingesetzt in Lösungsformel	Lösungen x_1 bzw. x_2
$Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad A, B, C \neq 0$	$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$	$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ $x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$

Gemischtquadratische Gleichung ohne Konstante	Eingesetzt in Lösungsformel	Lösungen x_1 bzw. x_2
$Ax^2 + Bx = 0 \qquad A, B \neq 0; \quad C = 0$	$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 0}}{2A} = \frac{-B \pm B}{2A}$	$x_1 = \frac{-B + B}{2A} = 0$ $x_2 = \frac{-B - B}{2A} = \frac{-2B}{2A} = -\frac{B}{A}$

Reinquadratische Gleichung ohne linearen Term	Eingesetzt in Lösungsformel	Lösungen x_1 bzw. x_2
$Ax^2 + C = 0 \qquad A, C \neq 0; \quad B = 0$	$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4AC}}{2A} = \frac{\pm\sqrt{-AC}}{A} = \frac{\pm\sqrt{-AC}}{\sqrt{A^2}} = \pm\sqrt{-\frac{C}{A}}$	$x_1 = +\sqrt{-\frac{C}{A}}$ $x_2 = -\sqrt{-\frac{C}{A}}$

Hinweis: Die Lösungsformel auf **reinquadratische** und **gemischtquadratische Gleichungen ohne Konstante** anzuwenden ist **wenig sinnvoll**, da diese schneller durch Radizieren bzw. durch Faktorisieren gelöst werden können.

14.12 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
275 (c, f, h, k, l)	97	Kontrolle mit TI üben
277 (a, c, e)	98	Kontrolle mit TI üben
278 (a, d)	98	Kontrolle mit TI üben
279 (a, c, g)	99	Kontrolle mit TI üben
280 (a, c, d)	99	Kontrolle mit TI üben
281 (a, b, c, e, g)	99	Kontrolle mit TI üben
282 (a, e)	99	Kontrolle mit TI üben
283 (a, c, d)	100	Kontrolle mit TI üben
284 (b)	100	Kontrolle mit TI üben
288	100	Kontrolle mit TI üben
295	101	Kontrolle mit TI üben
309	103	Kontrolle mit TI üben

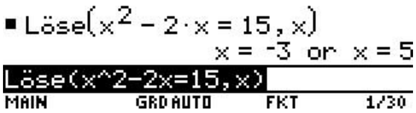
14.13 Quadratische Gleichungen mit dem TI lösen

Mit der Taste $\boxed{\text{F2}}$ und 1:Löse() lassen sich viele Gleichungen lösen. Die Funktion Löse() zeigt aber den Lösungsweg nicht an. Es kann sogar vorkommen, dass die Funktion falsche Resultate anzeigt.

Lösen Sie die folgenden Gleichungen mit der Funktion Löse() nach x auf.
Für alle Aufgaben gilt G = **R**.

Beispiel 1 $x^2 - 2x = 15$ $D = \mathbb{R}$

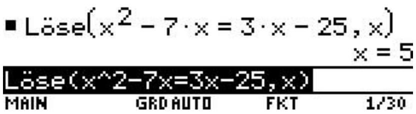
Eingabe:



Ergebnis: $x_1 = \underline{-3} \quad \vee \quad x_2 = \underline{5} \quad \rightarrow \quad L = \underline{\underline{\{-3; 5\}}}$ (Diskriminante > 0)

Beispiel 2 $x^2 - 7x = 3x - 25$ $D = \mathbb{R}$

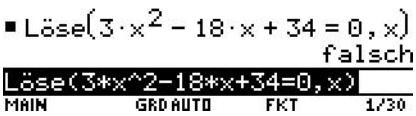
Eingabe:



Ergebnis: $x_1 = x_2 = x = \underline{5} \quad \rightarrow \quad L = \underline{\underline{\{5\}}}$ (Diskriminante = 0)

Beispiel 3 $3x^2 - 18x + 34 = 0$ $D = \mathbb{R}$

Eingabe:



Ergebnis: $L = \underline{\underline{\{\ \}}}$ (Diskriminante < 0)

Wird die **quadratische Gleichung** in eine **quadratische Funktion** umgeformt, können die Lösungen der quadratischen Gleichung über die Nullstellen berechnet werden.

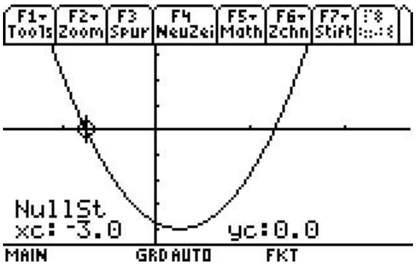
Beispiel 4 $x^2 - 2x - 15 = 0$ quadr. Gleichung, $D = \mathbb{R}$

$x^2 - 2x - 15 = y$ quadr. Funktion, (0 durch y ersetzen)

Eingabe: [Y=] mit [◆][F1] aktivieren
y1 = [X][^][2][−][2][X][−][1][5][ENTER] eintippen
[GRAPH] mit [◆][F3] zeichnen

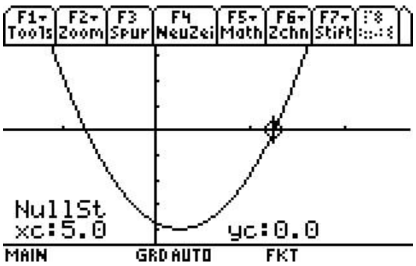
evtl. mit [F2] Ausschnitt vergrössern:
z. B. *ZoomBox*, *Vergröß*, *Verklein*
Tipp: Cursor schneller bewegen: [2nd] und Pfeiltasten ◀▶▲▼

Nullstelle 1: [F5] und *NullSt*, danach untere Grenze und obere Grenze für **die erste Nullstelle** (untere) mit dem Cursor festlegen und *NullSt* ablesen:



Ergebnis: xc: –3.0 yc: 0

Nullstelle 2: [F5] und *NullSt*, danach untere Grenze und obere Grenze für **die zweite Nullstelle** (obere) mit dem Cursor festlegen und *NullSt* ablesen:



Ergebnis: xc: 5.0 yc: 0

Abschluss Mit [HOME] gelangt man zurück zum Hauptbildschirm.

14.14 Der Satz von Vieta

Aus der Lösungsformel ist ersichtlich, dass sich die Lösungen der quadratischen Gleichung nur durch ein Plus- bzw. Minuszeichen unterscheiden. Es ist daher naheliegend, den Zusammenhang zwischen den Lösungen und den Koeffizienten (A, B, C) der Ausgangsgleichung zu untersuchen.

Herleitung des "Satzes von Vieta"

Die quadratische Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ hat die beiden Lösungen:

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B - \sqrt{D}}{2A}$$

Addition der Lösungen

$$x_1 + x_2 = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A} + \frac{-B - \sqrt{D}}{2A} = \frac{-B + \sqrt{D} - B - \sqrt{D}}{2A} = \frac{-2B}{2A} = -\frac{B}{A}$$

ergibt: $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}}$

Multiplikation der Lösungen

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A} \cdot \frac{-B - \sqrt{D}}{2A} = \frac{\overbrace{\left(-B + \sqrt{D}\right)\left(-B - \sqrt{D}\right)}^{\text{Binom}}}{(2A)^2} = \frac{B^2 - D}{4A^2} = \frac{B^2 - \overbrace{\left(B^2 - 4AC\right)}^{D}}{4A^2} =$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{B^2 - B^2 + 4AC}{4A^2} = \frac{4AC}{4A^2} = \frac{C}{A}$$

ergibt: $\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}}$

Vergleicht man diese beiden Ergebnisse mit der **Normalform** der quadratischen Gleichung, so stellt man fest:

Grundform (GF): $Ax^2 + Bx + C = 0$

Normalform (NF): $x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$ sei: $p = \frac{B}{A}$ und $q = \frac{C}{A}$

Normalform (NF): $x^2 + px + q = 0$

Addition der Lösungen: $x_1 + x_2 = -p$

Multiplikation der Lösungen: $x_1 \cdot x_2 = q$

– Der Koeffizient von x des linearen Gliedes ist gleich der **Summe** der **Lösungswerte** mit entgegengesetztem Vorzeichen!

– Die Konstante ist gleich dem **Produkt** der beiden **Lösungswerte**!

Verwendung des Satzes von Vieta

a. Um die Lösungen von quadratischen Gleichungen zu bestimmen (falls es sich um ganzzahlige Lösungen handelt) oder wenn eine Lösung bereits bekannt ist.

b. Zum Aufstellen einer quadratischen Gleichung, deren Lösungen bekannt sind.

c. Zur Kontrolle einer quadratischen Gleichung.

d. Zur Zerlegung von quadratischen Gleichungen.

14.15 Übungen zum Satz von Vieta

1. Wie heisst die quadratische Gleichung mit der Lösungsmenge L = {1; 2}?

Satz von Vieta:

$x_1 + x_2 = -p \quad \rightarrow \quad 1+2=-p \quad \rightarrow \quad p = \underline{-3}$

$x_1 \cdot x_2 = q \quad \rightarrow \quad 1\cdot 2 = q \quad \rightarrow \quad q = \underline{2}$

eingesetzt in Normalform: $x^2 + px + q = 0$

$\underline{\underline{x^2 - 3x + 2 = 0}}$

oder über Binom:

$\underbrace{(x-1)}_{\substack{\text{Faktor}=0,\\ \text{wenn } x_1=1}} \cdot \underbrace{(x-2)}_{\substack{\text{Faktor}=0,\\ \text{wenn } x_2=2}} = \underline{\underline{x^2 - 3x + 2 = 0}}$

2. Zerlegen Sie die Gleichung $x^2 + 3x - 10 = 0$ in ein Produkt.

direkt über Binom:

$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{(x-2)\cdot(x+5) = 0}} \quad \rightarrow \quad L = \underbrace{\{2; -5\}}_{\text{nicht gesucht}}$

indirekt über Satz von Vieta (zuerst Lösungen ermitteln, dann Produkt bilden):

$-p = -3$ und $q = -10$ durch Koeffizientenvergleich

$-p = x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad -3 = x_1 + x_2$

$q = x_1 \cdot x_2 \quad \rightarrow \quad -10 = x_1 \cdot x_2$ durch systematisches Probieren: $x_1 = 2 \quad \vee \quad x_2 = -5$

$1\cdot(-10)$
$(-1)\cdot 10$
$2\cdot(-5)$
$(-2)\cdot 5$

somit: $L = \underbrace{\{2; -5\}}_{\text{nicht gesucht}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{(x-2)\cdot(x+5) = 0}}$

3. Ermitteln Sie die vollständige Lösungsmenge, wenn die Lösung x_1 vorgegeben ist.
 $x^3 - 2x^2 - 5x = -6$ Lösung $x_1 = 1$ ist bekannt!

Geg: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 = \underbrace{(x-1)}_{x_1=1} \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$

Ges: $x_1 = ?, \quad x_2 = ?$

Lösung:

$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = \underline{x^2 - x - 6} = (x - x_2) \cdot (x - x_3)$

$\overset{-}{+}x^3 \overset{+}{-} x^2$

$-x^2 - 5x + 6$

$\overset{+}{-}x^2 \overset{-}{+} x$

$-6x + 6$

$\overset{+}{-}6x \overset{-}{+} 6$

0

$x^2 - x - 6 = 0$ |Faktorzerlegung

$(x-3)(x+2) = 0$

$x_2 = \underline{3} \quad \vee \quad x_3 = \underline{-2}$

somit: $L = \underline{\underline{\{-2; 1; 3\}}}$

14.16 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
313 (a, d)	103	Kontrolle mit TI üben
314 (a, c)	104	Kontrolle mit TI üben
315 (a, d)	104	Kontrolle mit TI üben
316 (a, c)	104	Kontrolle mit TI üben
317 a	104	Kontrolle mit TI üben
320	104	Kontrolle mit TI üben
321 (a, b, f)	104	Kontrolle mit TI üben
322 b	104	Kontrolle mit TI üben