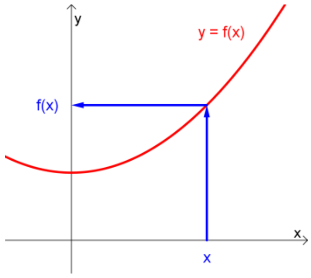
16 Nichtlineare Funktionen

16.1 Wichtiges über mathematische Funktionen

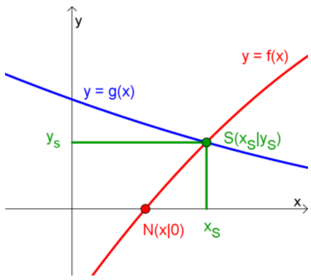
Definition Funktion

Wird durch die Gleichung y = f(x) jedem x des Definitionsbereiches genau ein y des Wertebereiches zugeordnet, nennen wir dies eine Funktion f. In einer Wertetabelle können Zahlenpaare (x|y), welche y = f(x) erfüllen, aufgeschrieben werden. Zeichnen wir alle Punkte P(x|y), deren Koordinatenpaare Lösungen der Gleichung y = f(x) sind, in ein Koordinatensystem, entsteht der Graph von f. Falls kein Definitionsbereich angegeben wird, ist dafür die grösstmögliche Teilmenge der reellen Zahlen zu nehmen, für welche der Term f(x) definiert ist.



Nullstellen (Schnittpunkte)

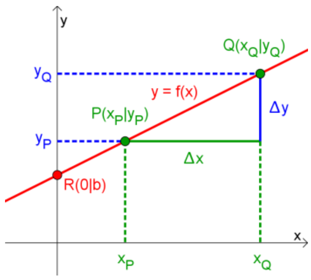
Schneidet der Graph einer Funktion f die x-Achse in einem Punkt N, ist x Lösung der Gleichung f(x) = 0 und x heisst Nullstelle von f. Schneiden sich die Graphen von zwei Funktionen f und g in einem Punkt S, ist x_S Lösung der Gleichung f(x) = g(x). Falls diese Lösungen nicht exakt berechnet werden können, werden sie mit einem Näherungsverfahren auf dem Taschenrechner oder Computer approximativ bestimmt.



Lineare Funktionen (Geraden)

Eine Funktion f mit der Gleichung y = mx + b heisst lineare Funktion. Sie hat als Graph eine Gerade durch den Punkt R(0|b) mit der Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$.

y = mx + b wird oft explizite Geradengleichung genannt. Eine andere Darstellung der Geraden hat die Form Ax + By + C = 0. Sie heisst implizite Geradengleichung und kann, wenn B nicht Null ist, nach y aufgelöst werden. Falls B = 0 und A ≠ 0 ist, erhalten wir eine Parallele zur y-Achse.

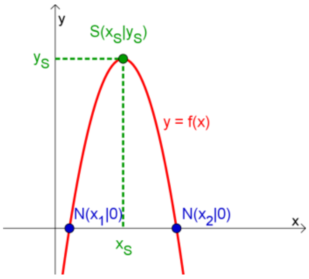


Quadratische Funktionen (Parabel 2. Ordnung)

Eine Funktion f mit der Gleichung $y = Ax^2 + Bx + C$ heisst quadratische Funktion (Parabel 2. Ordnung). Ihr Graph ist symmetrisch zur Geraden $x = -B/2A$ und ist stets eine Parabel.
Für $D = B^2 - 4AC > 0$ hat f zwei Nullstellen x_1 bzw. x_2:

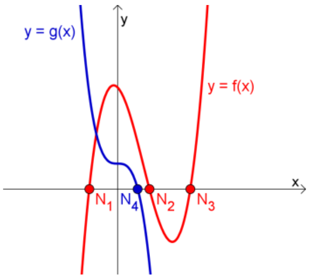
$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{oder} \quad x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

x_1, x_2 sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$.
Eine andere Darstellung für f hat die Form $y = A(x - x_S)^2 + y_S$.
Sie entsteht, wenn die Parabel $y = Ax^2$ parallel verschoben wird, bis ihr Scheitel neu im Punkt $S(x_S|y_S)$ liegt (Scheitelform).



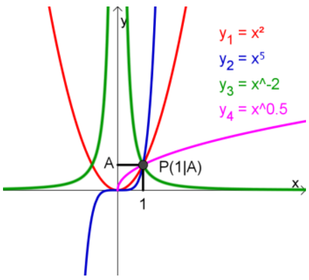
Polynomfunktionen

Eine Funktion f mit der Gleichung $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ $(A \neq 0)$ heisst Polynomfunktion dritten Grades. f hat mindestens eine Nullstelle, je nach Wahl der Koeffizienten A, B, C, D manchmal auch drei Nullstellen und in Spezialfällen zwei Nullstellen. f hat entweder zwei lokale Extremalstellen[1] oder keine und hat immer genau einen Wendepunkt[2].
Analoge Aussagen gelten bei Polynomfunktionen vierten $f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ und höheren Grades. Statt von Polynomfunktionen oder Polynomen spricht man auch von ganzrationalen Funktionen.



Potenzfunktionen

Eine Funktion f mit der Gleichung $f(x) = Ax^n$ heisst Potenzfunktion. Sie verläuft für jede Wahl von n durch den Punkt P(1|A). Die Zeichnung zeigt mit A = 1 die möglichen Verläufe je nach Wert von n. Falls n ganzzahlig und gerade ist, hat der Graph im II. Quadranten eine achsensymmetrische Fortsetzung. Falls n ganzzahlig und ungerade ist, hat der Graph im III. Quadranten eine punktsymmetrische Fortsetzung. Falls n negativ ist, sind die Koordinatenachsen Asymptoten[3]. Falls n ein Bruch ist, ergibt sich eine Wurzelfunktion (nur definiert für $x \geq 0$).

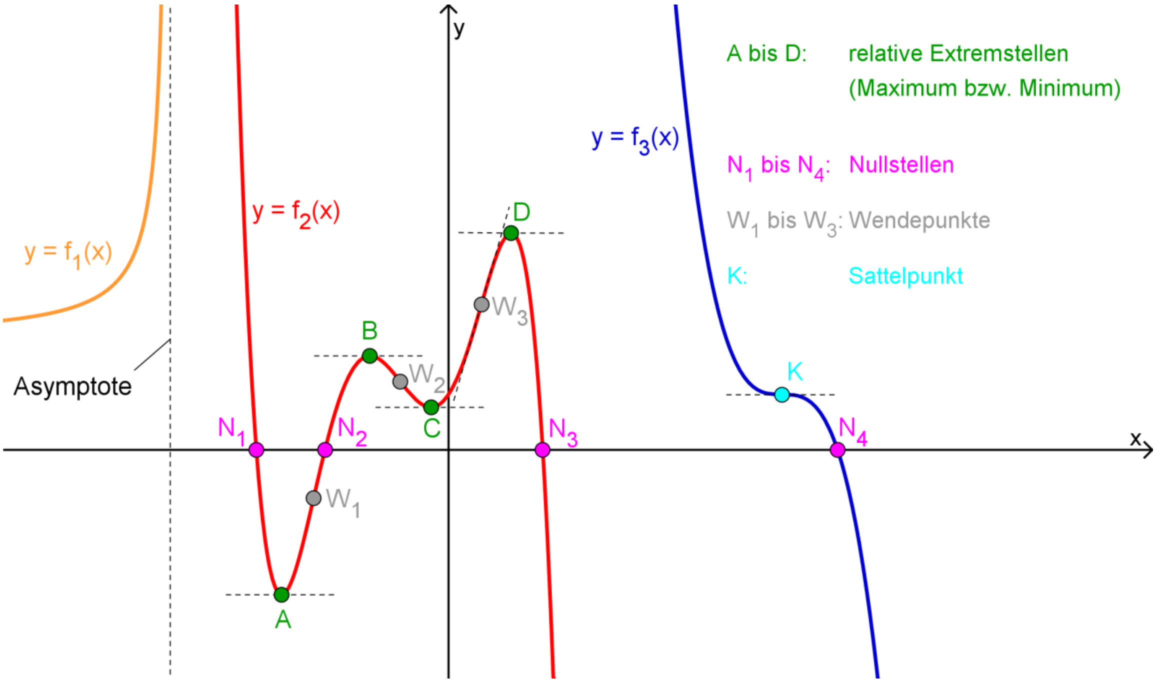


[1] Bezeichnet ein Minimum bzw. Maximum einer Funktion. Globale (oder absolute) Extrema beziehen sich auf den ganzen Definitionsbereich einer Funktion, während lokale (oder relative) Extrema nur in einem (kleinen) Intervall maximal bzw. minimal sind.

[2] Wendepunkt nennt man den Punkt eines Graphen, in dem sich die Kurve von der einen Seite der Tangente auf die andere Seite der Tangente wendet. Die Tangente im Wendepunkt heisst Wendetangente.

[3] Asymptoten sind Geraden oder Kurven, die man als Tangenten von Funktionen im Unendlichen auffassen kann. Der Graph der Funktion nähert sich dieser Asymptote, erreicht sie aber nie! (asymptos ist griechisch und bedeutet «nicht zusammenfallend»)

16.2 Charakteristische Punkte eines Funktionsgraphen



Maximum
Punkt eines Graphen dessen benachbarte Punkte (vorher und nachher) einen kleineren y-Wert aufweisen. Die Tangente an den Graphen verläuft in diesem Punkt parallel zur x-Achse bzw. ihre Steigung ist gleich Null.

Minimum
Punkt eines Graphen dessen benachbarte Punkte einen grösseren y-Wert aufweisen. Die Tangente an den Graphen verläuft in diesem Punkt parallel zur x-Achse bzw. ihre Steigung ist gleich Null.

Wendepunkt
Punkt eines Graphen in dem sich die Kurve von der einen Seite der Tangente auf die andere Seite der Tangente wendet. Die Tangente im Wendepunkt heisst Wendetangente.

Sattelpunkt
Punkt eines Graphen bei dem die Wendetangente parallel zur x-Achse verläuft bzw. ihre Steigung gleich Null ist.

Nullstellen
Jene Stellen einer Funktion, bei denen der Graph die x-Achse schneidet bzw. wo die y-Werte gleich Null sind.

Asymptoten
Sind Geraden oder Kurven, die man als Tangenten von Funktionen im Unendlichen auffassen kann. Der Graph der Funktion nähert sich der Asymptote, erreicht sie aber nie! (asymptos ist griechisch und bedeutet «nicht zusammenfallend»)

16.3 Die Potenzfunktionen

Potenzfunktionen haben die Form $y = x^n$. Der Verlauf des Graphen einer Potenzfunktion ist vor allem abhängig vom Exponenten n.
Man unterscheidet:

Ganzzahlige, positive Exponenten; (n = 2,3,4,5, ...)
Die Graphen sind Parabeln
n = 2,4,6 ... ===> Parabeln gerader Ordnung,
n = 3,5,7 ... ===> Parabeln ungerader Ordnung

Ganzzahlige, negative Exponenten; (n = 1,2,3,4...)
Die Graphen sind Hyperbeln
n = 2,4,6 ... ===> Hyperbeln gerader Ordnung
n = 1,3,5 ... ===> Hyperbeln ungerader Ordnung

Gebrochene Exponenten, d.h. der Exponent ist ein Bruch;
(z.B. $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$ ......)
Es ergeben sich die Wurzelfunktionen

Potenzfunktionen mit ganzzahligen geraden Exponenten

Aufgabe:

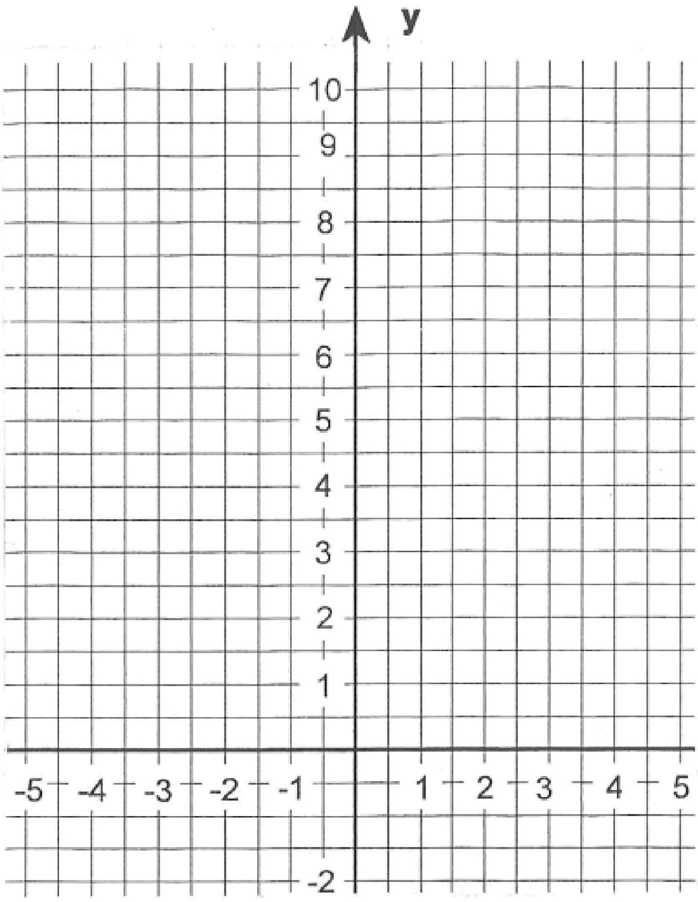
Zeichnen Sie den Graphen für die Potenzfunktion

$\boxed{y = x^2}$

für positive und negative x - Werte.

Es ergibt sich:

- ....
- ....
....
- ....
....



Aufgabe:

Zeichnen Sie den Graphen
für die Potenzfunktion

$\boxed{\quad\quad}$

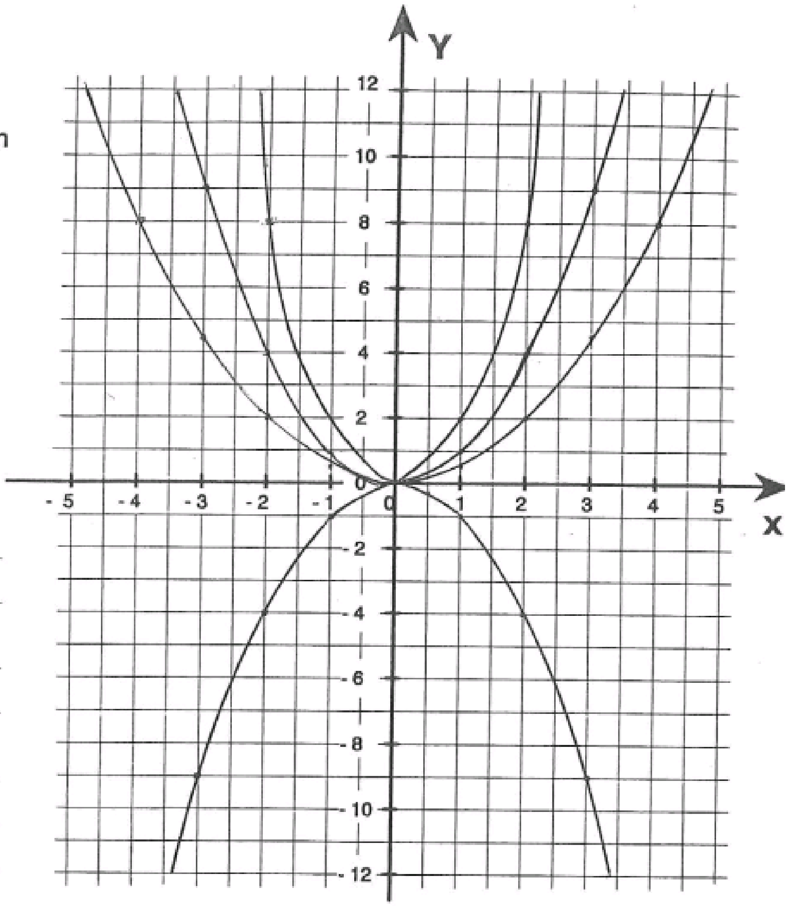
für positive und negative
x - Werte mit:
a = 1; o,5 ; 2; -1

Es ergibt sich:

-

-

-



Aufgabe:

Zeichnen Sie den Graphen
für die Potenzfunktion

$\boxed{\quad\quad}$

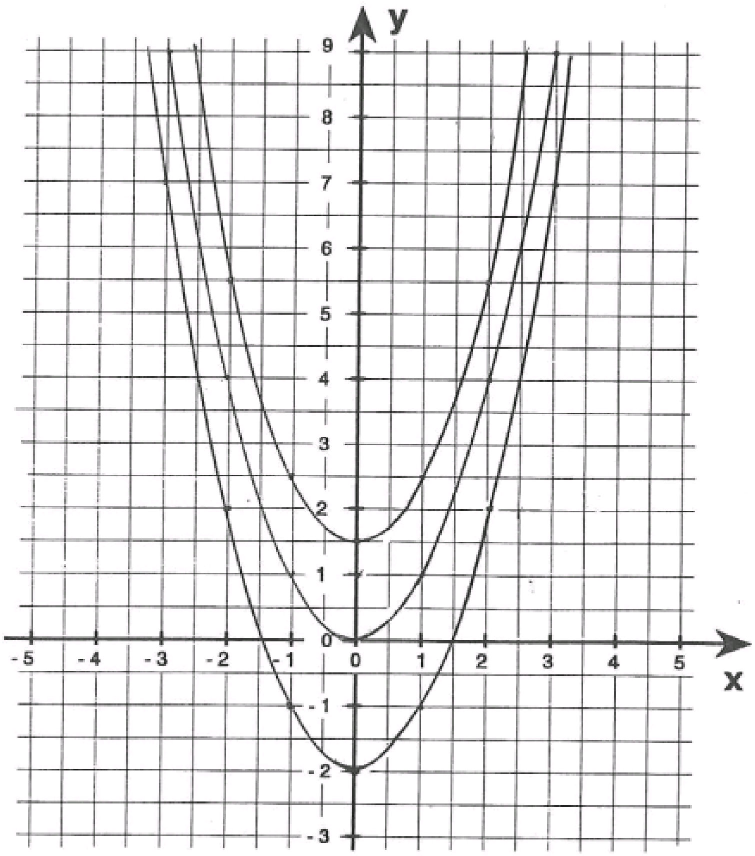
für positive und negative
x - Werte mit:
b = 1,5; 0; - 2

Es ergibt sich:

-

-

-

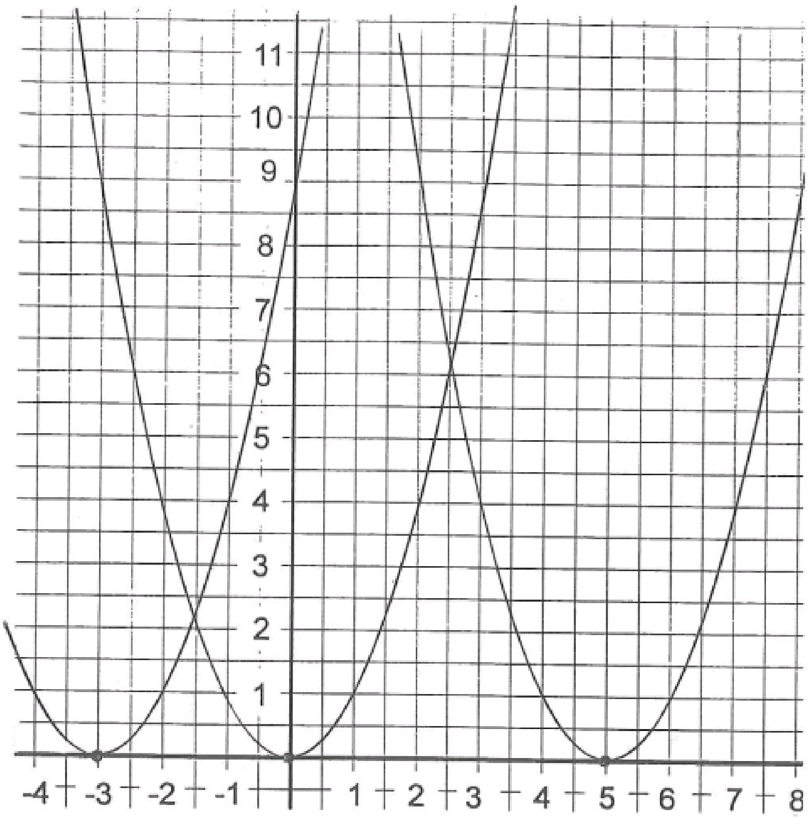


Aufgabe:

Zeichnen Sie den Graphen für die Potenzfunktion

für positive und negative x - Werte mit:
a = - 5; 0; 3

Es ergibt sich:

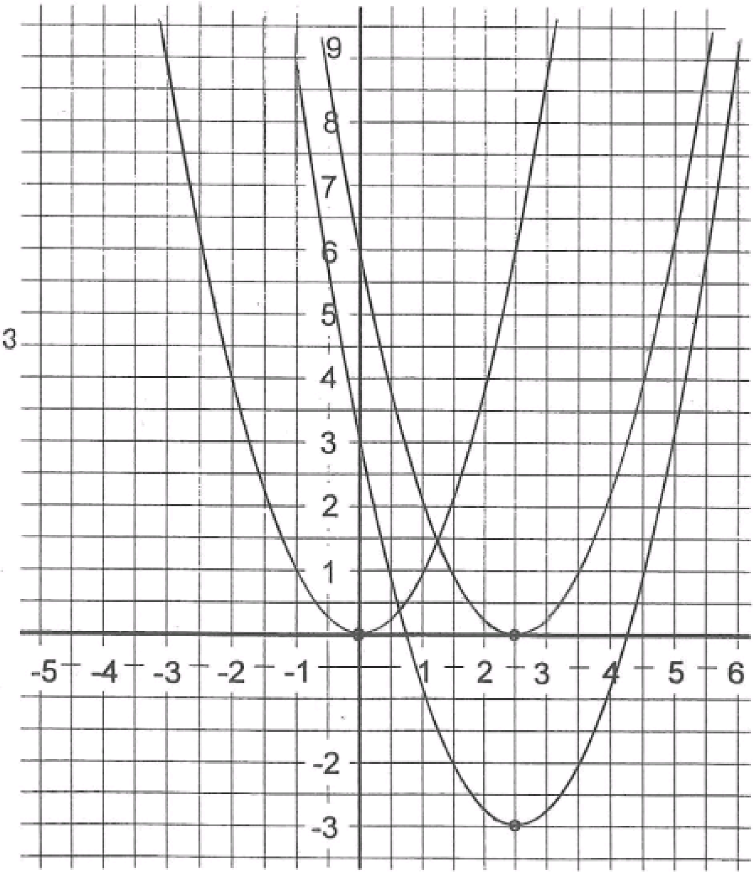


Aufgabe:

Zeichnen Sie den Graphen für die Potenzfunktion

für positive und negative x - Werte mit:
a / b = 0 / 0; - 2,5 / 0; - 2,5 / - 3

Es ergibt sich:



Potenzfunktionen mit ganzzahligen ungeraden Exponenten

Aufgabe:

Zeichnen Sie den Graphen für die Potenzfunktion

$$\boxed{y = x^n}$$

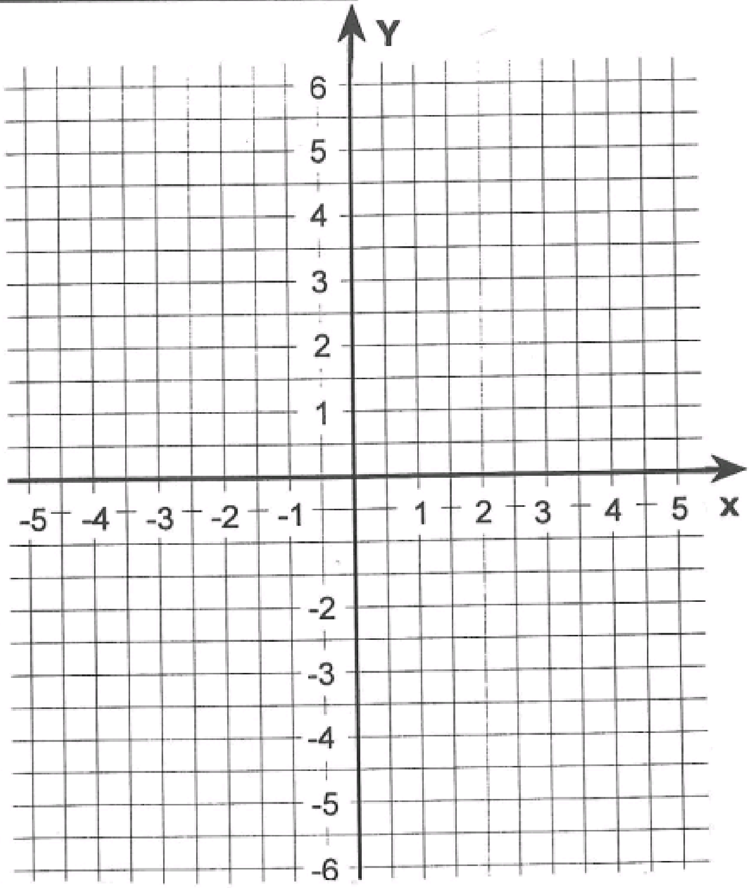
für positive und negative x - Werte mit:
n = 3; 5

Es ergibt sich:

-

-

-



Potenzfunktionen mit ganzzahligen negativen Exponenten

Aufgabe:

Zeichnen Sie den Graphen für die Potenzfunktion

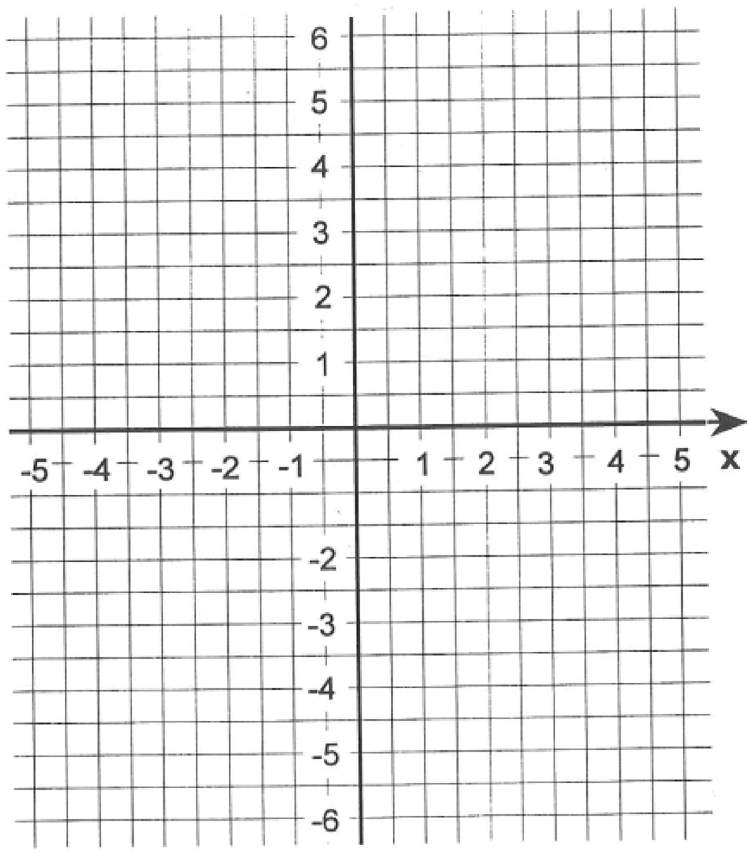
$$\boxed{y = x^{-1} = \frac{1}{x}}$$

für positive und negative x - Werte

Es ergibt sich:

-

-



Potenzfunktionen mit ganzzahligen ungeraden Exponenten

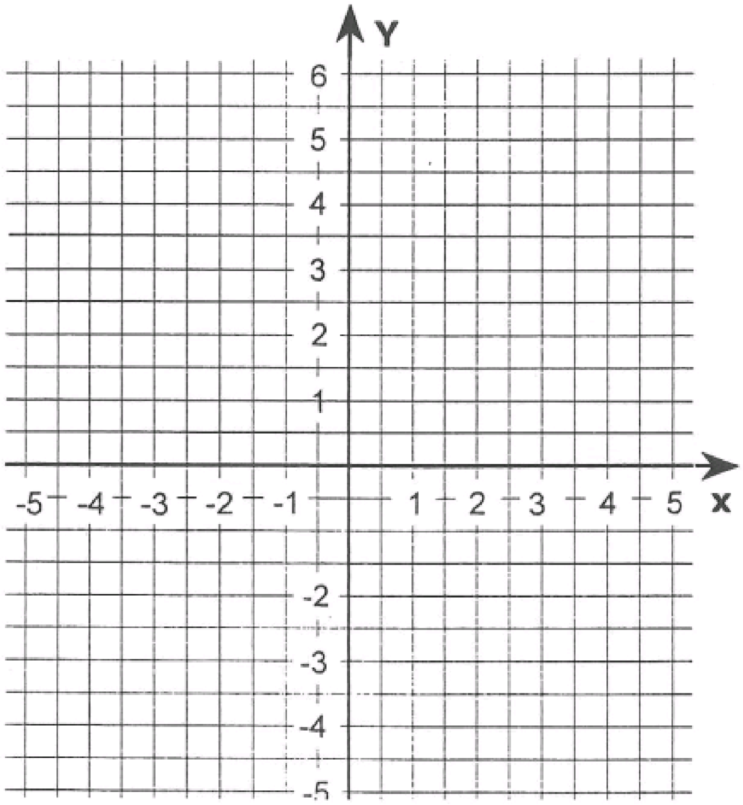
Aufgabe:

Zeichnen Sie den Graphen für die Potenzfunktion

$y = ax^{-1}$

mit positiven und negativen x - Werten und mit a = 1; 2; 0,5; - 1

Es ergibt sich:



-

-

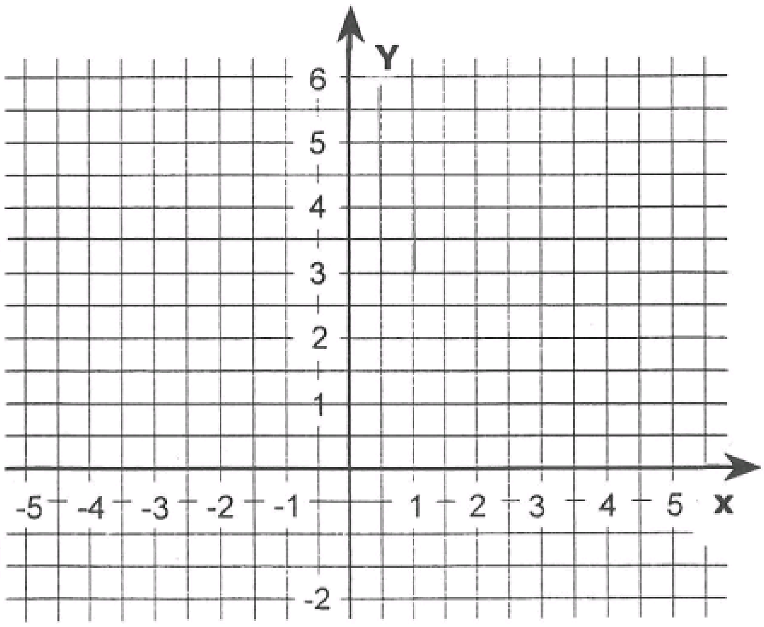
Aufgabe:

Zeichnen Sie den Graphen für die Potenzfunktion

$y = ax^{-2}$

für positive und negative x - Werte und a = 1

Es ergibt sich:



-

Anmerkung

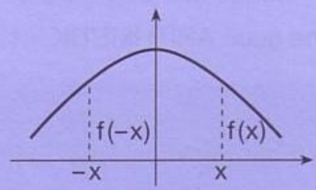
Die Potenzfunktion $y = x^n$ ist nicht mit der Exponentialfunktion $y = a^x$ zu verwechseln. Bei einer *Potenzfunktion* ist der *Exponent fest*, die *Basis* aber *variabel* (daher auch die Bezeichnung). Bei einer *Exponentialfunktion* dagegen ist die Basis a *fest* und der *Exponent variabel*.

Eingescannt (Frommenwiler, Seite 200)

Symmetrie

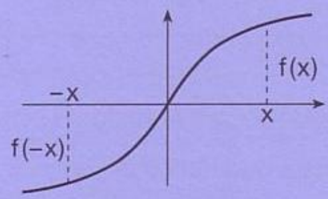
Der Graph einer Funktion f ist *symmetrisch zur y-Achse*, wenn gilt: $\mathbf{f(-x) = f(x)}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.

Eine Funktion mit dieser Eigenschaft nennt man eine **gerade Funktion.**



Der Graph einer Funktion f ist *symmetrisch zum Nullpunkt*, wenn gilt: $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.

Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heisst **ungerade Funktion.**



16.4 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
736 (alle)	197	Kontrolle mit TI üben
737 (alle)	197	Kontrolle mit TI üben
741 (alle)	198	Kontrolle mit TI üben (Graph)

16.5 Exponentialfunktion $y = a^x$

Eigenschaften der Exponentialfunktionen

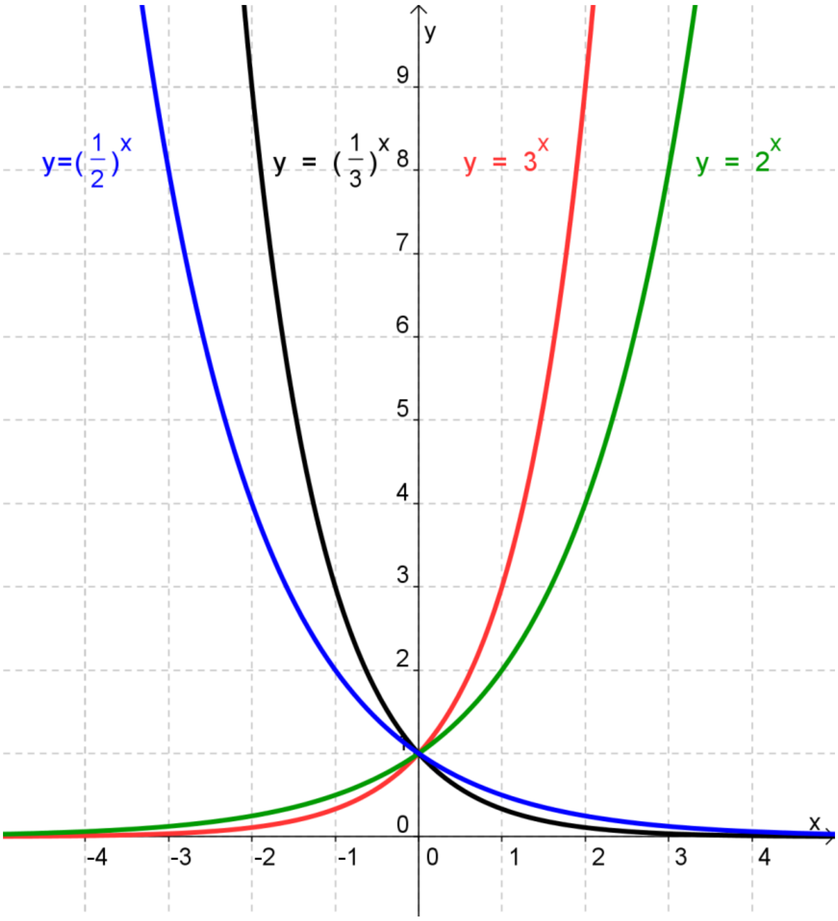
Bei Funktionen vom Typ $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbf{R}^+$, $a \neq 1$ und $x \in \mathbf{R}$ steht die Variable x im Exponenten. Sie heissen demzufolge **Exponentialfunktionen**.
Die Basis a darf nicht negativ sein, da die Funktion dann nicht für alle reellen Zahlen definiert wäre. Zur Erinnerung: Ein rationaler Exponent entspricht dem Wurzelziehen:

Für $a = -2$ ist z. B. $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$ nicht definiert, da der Radikand nicht negativ sein darf!

Hinweis:

Wäre die Basis 0, würde man die Funktionsgleichung y = 0 erhalten (gilt nur für x > 0).
Der zugehörige Graph ist die x-Achse. Für die Basis 1 erhielte man die Gleichung y = 1.
Der Graph ist eine Gerade, die parallel zur x-Achse durch den Punkt (0|1) verläuft.
Diese Fälle wurden bereits bei den linearen Funktionen behandelt.

Graphen der Exponentialfunktionen (Beispiele)



Merke

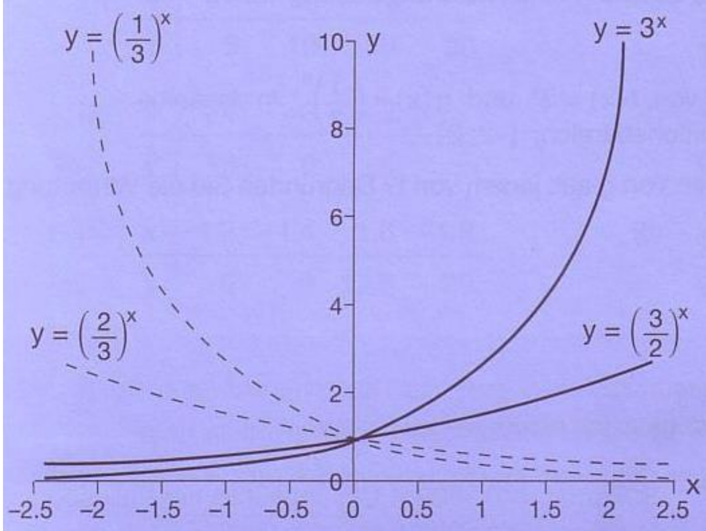
Für die Exponentialfunktionen mit der Gleichung $y = a^x$ mit $a \in \mathbf{R}^+$, $a \neq 1$ und $x \in \mathbf{R}$ gilt:

- Sie besitzen nur positive Funktionswerte.
  Die Graphen verlaufen oberhalb der x-Achse im 1. und 2. Quadranten.
- Alle Graphen haben den Punkt $(0|1)$ gemeinsam.
- Für $a > 1$ steigt der Graph, für $0 < a < 1$ fällt er.
- Alle Graphen nähern sich der x-Achse an, ohne sie je zu erreichen. Die x-Achse ist Asymptote. (Für $a > 1$ nähert sich der Graph dem negativen Teil der x-Achse, für $0 < a < 1$ dem positiven Teil.)
- Es gibt keine Nullstellen.
- Die Graphen zu $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ liegen symmetrisch zur y-Achse.

Eingescannt (Frommenwiler, Seite 215)

Eine Funktion f mit $\mathbf{f(x) = a^x}$ $(a \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq 1)$ heisst **Exponentialfunktion.**

Beispiele: $y = 0.8^{x+1}$, $y = 8 \cdot 2^{3x-4}$, $f(t) = A \cdot e^{kt}$, $f(n) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$



Die Graphen der Funktionen $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ liegen symmetrisch zur y-Achse.

Die x-Achse ist *Asymptote* des Graphen von $y = a^x$.

Anmerkung

Die Exponentialfunktion $y = a^x$ ist nicht mit der Potenzfunktion $y = x^n$ zu verwechseln. Bei einer *Exponentialfunktion* ist die *Basis a fest*, der *Exponent* aber *variabel* (daher auch die Bezeichnung). Bei einer *Potenzfunktion* dagegen ist der *Exponent fest* und die *Basis variabel*.

16.6 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
809	215	
810	215	Tipp: Excel
811	216	Kontrolle mit TI üben (Graph)
812	216	Kontrolle mit TI üben (Graph)

16.7 Wachstum und Zerfall

Lineares Wachstum, Beispiel

Ein Flugzeug fliegt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 850 km/h. Nach 1 Stunde hat es eine Entfernung von 850 km zurückgelegt, nach 2 Stunden 2 · 850 km usw.

Anzahl der Stunden	Berechnung	Entfernung in km
0	850 · 0	0
1	850 · 1	850
2	850 · 2	1'700
3	850 · 3	2'550
4	850 · 4	3'400
x	850 · x	y = f(x) = 850 · x

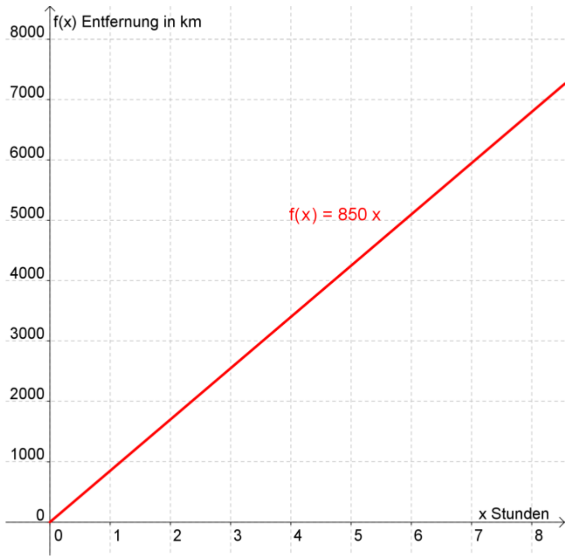
Die Zunahme der Entfernung kann allgemein durch eine lineare Funktion mit folgender Gleichung beschrieben werden:

$f(x) = 850 \cdot x$

Es handelt sich um **lineares Wachstum**.

Mit Hilfe der Funktionsgleichung kann man schnell die nach einer bestimmten Stundenanzahl zurückgelegte Entfernung berechnen. Nach z.B. 14 Stunden hat das Flugzeug 11'900 km zurückgelegt.

$f(14) = 850 \cdot 14 = 11'900$ km



Beim **linearen Wachstum** nimmt eine Grösse in **gleichen Zeiträumen** immer um **denselben** Betrag zu.

Exponentielles Wachstum, Beispiel 1

Eine schnell wachsende Algenart bedeckt 5 m^2 eines Sees. Jede Woche verdoppelt sich ihre Fläche. Nach 1 Woche beträgt die von der Alge bedeckte Fläche 10 m^2, nach 2 Wochen 20 m^2 usw.

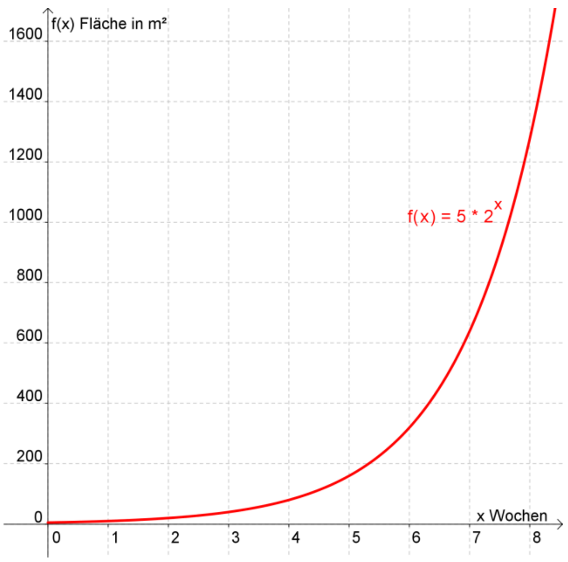
Anzahl der Wochen	Berechnung	bedeckte Fläche in m^2
0	$5 \cdot 2^0 = 5 \cdot 1$	5
1	$5 \cdot 2^1$	10
2	$5 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 2^2$	20
3	$5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 2^3$	40
4	$5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 2^4$	80
5	$5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 2^5$	160
x	$5 \cdot 2^x$	$y = f(x) = 5 \cdot 2^x$

Die Zunahme der Fläche kann allgemein durch eine Exponentialfunktion mit folgender Gleichung beschrieben werden:

$f(x) = 5 \cdot 2^x$

Es handelt sich um **exponentielles Wachstum**. 2 ist der **Wachstumsfaktor**.

Die Funktionsgleichung ermöglicht die schnelle Berechnung der Fläche, die nach einer bestimmen Anzahl von Wochen von der Alge bedeckt wird. Nach z.B. 12 Wochen sind bereits 20'480 m^2 des Sees von der Alge bedeckt.



$f(12) = 5 \cdot 2^{12} = 20'480\ m^2$

Beim **exponentiellen Wachstum** wird eine Grösse in **gleichen Zeiträumen** immer mit **demselben Faktor** vervielfacht. Diesen Faktor nennt man **Wachstumsfaktor**.

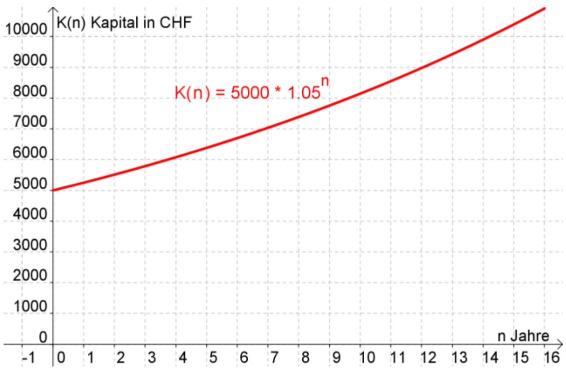
Exponentielles Wachstum, Beispiel 2

Auch bei der Vermehrung eines Kapitals K durch Zinseszins liegt exponentielles Wachstum vor. Auf einem Sparkonto werden CHF 5'000 fest angelegt. Die Bank zahlt pro Jahr 5 % Zinsen. Nach 1 Jahr beträgt das Kapital CHF 5'250, nach 2 Jahren CHF 5'512.50 usw.

Anzahl der Jahre	Berechnung	Kapital in CHF
0	$5'000 \cdot (1 + 5/100)^0 = 5'000 \cdot 1$	5'000
1	$5'000 \cdot (1 + 5/100) = 5'000 \cdot 1.05^1$	5'250
2	$5'000 \cdot 1.05 \cdot 1.05 = 5'000 \cdot 1.05^2$	5'512.50
3	$5'000 \cdot 1.05^3$	5'788.13
4	$5'000 \cdot 1.05^4$	6'077.53
n	$5'000 \cdot 1.05^n$	$K(n) = 5'000 \cdot 1.05^n$

Die Zunahme des Kapitals kann allgemein durch eine Exponentialfunktion mit folgender Gleichung beschrieben werden:

$K(n) = 5'000 \cdot 1.05^n$



Es handelt sich um **exponentielles Wachstum**. Der **Wachstumsfaktor** ist hier 1.05. Es entspricht dem Zinsfaktor q.

Die Funktionsgleichung ermöglicht die schnelle Berechnung des Endkapitals nach einer bestimmten Anzahl Jahren.
Nach z.B. 5 Jahren ist das Kapital auf CHF 6'381.40 angewachsen.

$K(5) = 5'000 \cdot 1.05^5 = 6'381.40$ CHF

Zur Erinnerung, Zinseszinsformel: $\underset{\text{Endkapital nach n Jahren}}{K_n} = \underset{\text{Anfangskapital}}{K_0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{p}{100}\right)}_{\text{Wachstumsfaktor}}^{\overset{\text{Anzahl Jahre}}{n}} = K_0 \cdot q^n$

Exponentieller Zerfall, Beispiel

Ein Auto verliert jedes Jahr an Wert. Nimmt man eine jährliche Wertverminderung von 20 % an, so ist ein Auto, dessen Neupreis bei CHF 20'000 lag, nach 1 Jahr nur noch CHF 16'000 wert, nach 2 Jahren nur noch CHF 12'800 wert usw.

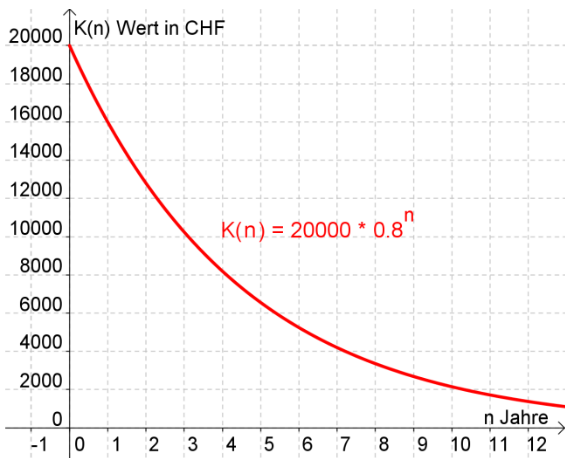
Anzahl der Jahre	Berechnung	Wert in CHF
0	$20'000 \cdot (1 - 20/100)^0 = 20'000 \cdot 1$	20'000
1	$20'000 \cdot (1 - 20/100)^1 = 20'000 \cdot 0.8$	16'000
2	$20'000 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 20'000 \cdot 0.8^2$	12'800
3	$20'000 \cdot 0.8^3$	10'240
4	$20'000 \cdot 0.8^4$	8'192
n	$20'000 \cdot 0.8^n$	$K(n) = 20'000 \cdot 0.8^n$

Die Wertverminderung kann allgemein durch eine Exponentialfunktion mit folgender Gleichung beschrieben werden:

$K(n) = 20'000 \cdot 0.8^n$

Der **Wachstumsfaktor** ist hier 0.8.

Die Funktionsgleichung ermöglicht die schnelle Berechnung des Wertes nach einer bestimmten Anzahl Jahren.
Nach z.B. 5 Jahren ist das Auto nur noch CHF 6'553.60 wert.



$K(5) = 20'000 \cdot 0.8^5 = 6'553.60$ CHF

Auch beim exponentiellen Zerfall wird der Begriff Wachstumsfaktor verwendet.
Der Wachstumsfaktor ist **bei exponentieller Abnahme** immer **< 1**, während er bei **exponentieller Zunahme** immer **> 1** ist. Häufig werden exponentielle Zu- und Abnahmeprozesse einheitlich als Wachstumsprozesse bezeichnet.

Eingescannt (Frommenwiler, Seite 220)

$$\boxed{G(t) = G_0 \cdot a^{t/\tau}}$$

G: Grösse, die exponentiell von der Zeit t abhängt
G_0: Wert der Grösse G im Zeitpunkt $t = 0$
t: Zeit (oder eine andere Grösse)
a: Wachstums- oder Abnahmefaktor bezogen auf die Zeitspanne τ
τ: Zeitspanne, auf die sich a bezieht

Beispiel: Eine Bakterienkultur wachse exponentiell: nach 25 min beträgt der Bestand 500, nach 45 min 1200.

$$\tau = 20\text{ min}\ ,\ a = \frac{1200}{500} = 2.4\ ,\ N_0 = N/a^{t/\tau} = 500/2.4^{25/20} \approx 167$$

Wachstumsfunktion $N = 167 \cdot 2.4^{t/20\text{min}}$

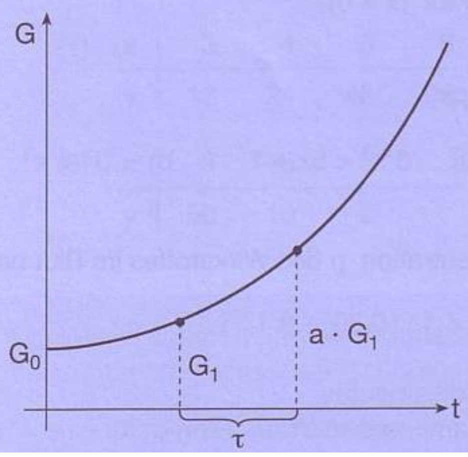
Prozentuale Wachstums- und Abnahmerate

Zur **Wachstumsrate** p % gehört der Wachstumsfaktor $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ und die Wachstumsfunktion $G(t) = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$.

Zur **Abnahmerate** p % gehört der Abnahmefaktor $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ und die Abnahmefunktion $G(t) = G_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)^t$.

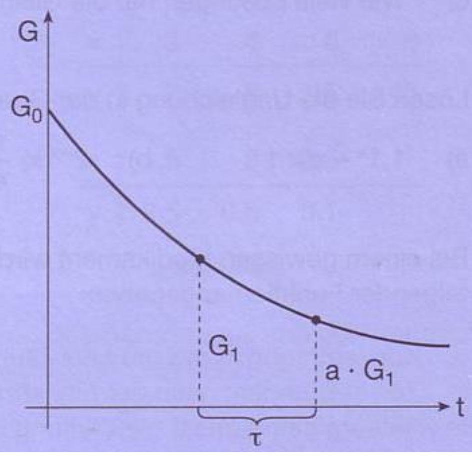
exponentielles Wachstum

$a > 1$



exponentielle Abnahme

$0 < a < 1$



Achtung (siehe http://www.fraengg.ch/klassen/tbmmathematik/geogebra):

Bei der Formel $G(t) = G_0 \cdot a^{\frac{t}{\tau}}$ bezieht sich der Wachstumsfaktor a auf die Zeitspanne τ.
Die Formel $A(t) = A_0 \cdot a^t$ (wobei $A_0 = G_0$, $t = t$ sind, typische Anwendung $\to$ Zinseszins) ist mit der Formel $G(t)$ nur identisch, wenn $\tau = 1$. Somit sind auch die Wachstumsfaktoren a dieser beiden Formeln **nur identisch** wenn $\tau = 1$ ist.
Die Formel $G(t)$ wird verwendet, wenn die Zeitspanne τ ungleich 1 ist!

Eingescannt (Marthaler, Seite 372)

Exponentielle Prozesse

Wachstumsfunktion

Ein exponentielles Wachstum der Grösse $G = G(t)$ hat die Funktionsgleichung:

$$G(t) = G_0 \cdot a^{\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit} \quad a > 1 \tag{25}$$

Abklingfunktion oder Zerfallsfunktion

Ein exponentieller Zerfall läuft nach einer der Funktionsgleichungen:

$$G(t) = G_0 \cdot a^{\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit} \quad 0 < a < 1 \tag{26}$$

$$G(t) = G_0 \cdot a^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{oder} \quad G(t) = G_0 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit} \quad a > 1 \tag{27}$$

Sättigungsfunktion

Eine exponentiell sättigende Grösse entwickelt sich nach der Funktionsgleichung:

$$G(t) = G_0 \cdot (1 - a^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{mit} \quad a > 1 \tag{28}$$

Dabei sind:

- G: Exponentiell von der Zeit abhängige Grösse
- t: Zeit
- G_0: Anfangswert zum Zeitpunkt $t = 0$, oder Sättigungswert
- τ: Zeitkonstante, während der die Grösse G um den Faktor a wächst oder abnimmt
- a: Wachstums- oder Abnahmefaktor bezogen auf die Zeitkonstante τ

Kommentar

- Die Gleichungen (26) und (27) sind äquivalent.
- In manchen Anwendungen wird die Zeit t ersetzt durch eine andere, physikalische Grösse. Die Konstante τ hat immer dieselbe Einheit wie die Grösse im Zähler des Exponenten, so dass der Exponent insgesamt ***einheitslos*** wird.
- Oft wählt man als Basis die Eulersche Zahl $e \approx 2.71828...$
- Teilweise wählt man als Basis die Zahl 2. In diesem Fall heisst die Zeitkonstante $\tau = T_H$ ***Halbwertszeit***, weil in dieser Zeit sich der Wert der Grösse G halbiert. Sehen Sie dazu das nachfolgende Beispiel (3).

16.8 Übungen

BM-Prüfung, Uri 1999

1. Ein Ball fällt aus 10 m Höhe auf den Boden und springt dann mehrmals auf. Nach jedem Aufprall erreicht er 80 % der vorgehenden Höhe.

   a. Wie lautet die Funktionsgleichung h = f(n), wenn n die Anzahl der Sprünge ist?
   b. Nach wie vielen Sprüngen erreicht der Ball erstmals nicht mehr die Höhe von 10 cm?
   c. Stellen Sie die Funktion für $0 \le n \le 12$ graphisch dar.

Lösung

a)

Anz. Sprünge n		h Höhe
0		10 m
1	$0{,}8 \cdot 10$	8 m
2	$0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 10$	6,4 m
3	$0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 10$	5,12 m
4	etc.	

$$\underline{\underline{h = 10 \cdot 0{,}8^n}}$$

b)

$$h = 10 \cdot 0{,}8^n \qquad \underline{D = \mathbb{N}}$$

$$0{,}1 = 10 \cdot 0{,}8^n$$

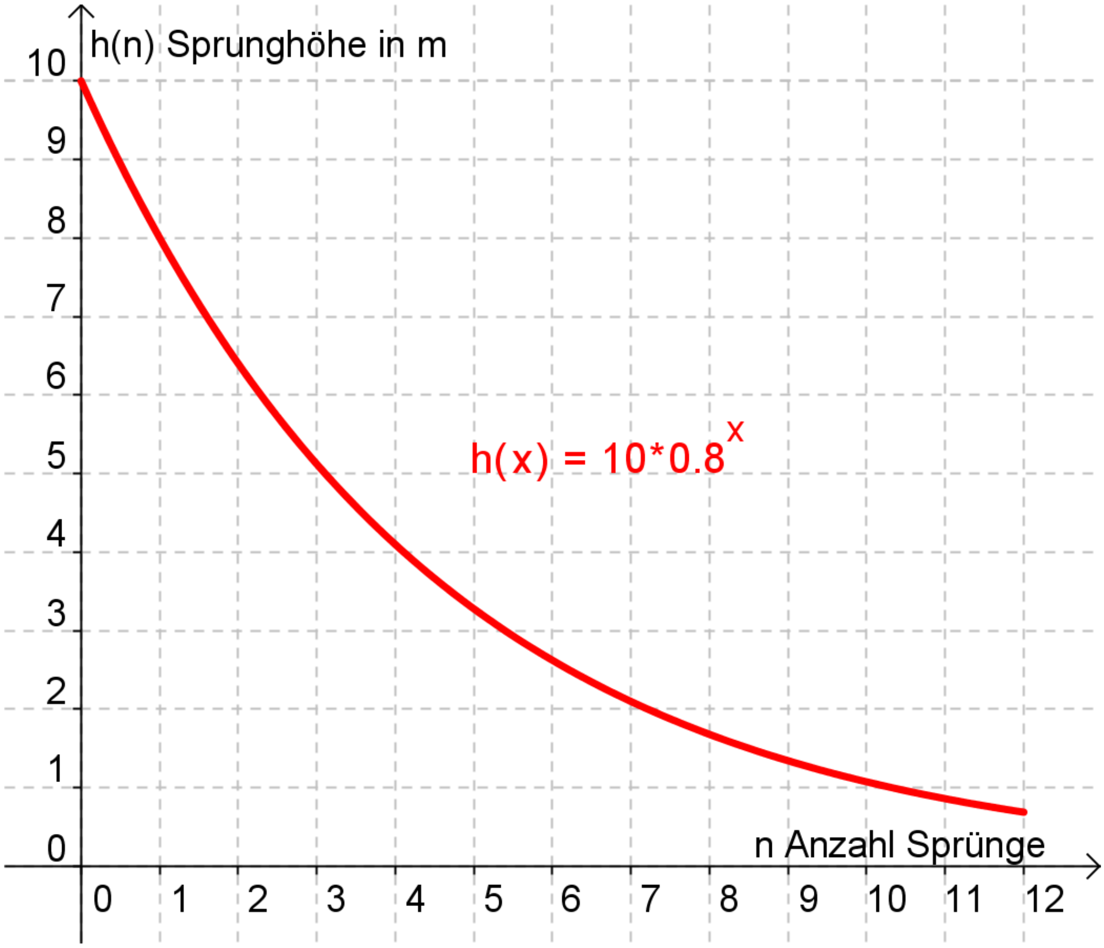
$$0{,}01 = 0{,}8^n \quad | \lg$$

$$\lg 0{,}01 = n \cdot \lg 0{,}8$$

$$n = \frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}8} = 20{,}63$$

Nach <u>21 Sprüngen</u> erreicht der Ball nicht mehr eine Höhe von 10 cm.

Koordinatensystem für Aufgabe 1:



BM-Prüfung, Uri 2000

2. Die chinesische Bevölkerung wächst exponentiell. Anfangs 1995 zählte man in China 1.2 Mrd. Menschen. Anfangs 2010 rechnet man bereits mit 2 Mrd. Einwohnern.
   a. Berechnen Sie, in welchem Jahr in China bei gleichbleibender Wachstumsrate mehr als 2.5 Mrd. Menschen leben.
   b. Stellen Sie die Funktion graphisch dar.

a) $G = G(t) = G_0 \cdot a^t$

$$2 = 1{,}2 \cdot a^{15}$$

$$a^{15} = \frac{2}{1{,}2} = 1{,}\overline{6}$$

$$a = \sqrt[15]{\frac{2}{1{,}2}} = 1{,}03464$$

$$G = 1{,}2 \cdot 1{,}03464^t$$

$$2{,}5 = 1{,}2 \cdot 1{,}03464^t$$

$$1{,}03464^t = \frac{2{,}5}{1{,}2} = 2{,}08\overline{3} \quad | \lg$$

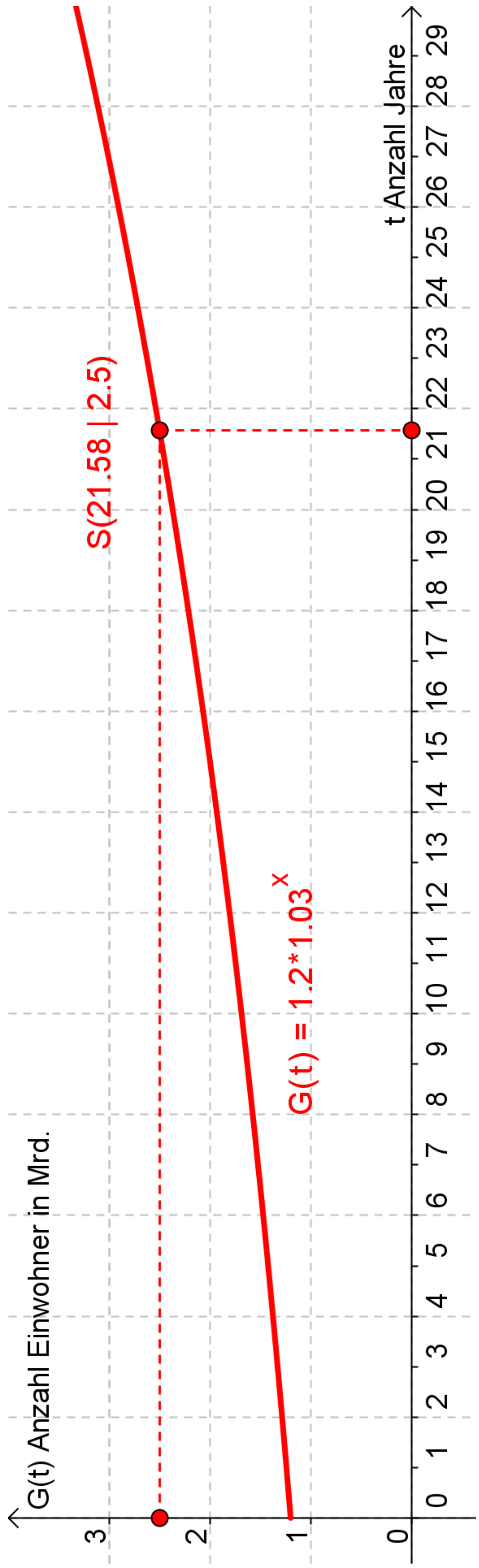
$$t \cdot \lg 1{,}0346 = \lg 2{,}08\overline{3}$$

$$t = \frac{\lg 2{,}08\overline{3}}{\lg 1{,}0346} = 21{,}55$$

Jahreszahl $= 1995 + 21{,}55$
$= 2016{,}55$

Im Jahr $\underline{\underline{2016}}$ (2. Hälfte) leben in China mehr als 2,5 Mrd. Menschen.

Koordinatensystem für Aufgabe 2:



BM-Prüfung, Uri 2006

3. Die Anzahl Keime (n) in der Kuhmilch wachsen näherungsweise exponentiell. Zwei Stunden nach dem Melken enthielt 1 cm^3 Milch 8'000 Keime, nach einer weiteren Stunde waren es 27'000 Keime.
   a. Wie lautet die Funktionsgleichung n = f(t), wenn unmittelbar nach dem Melken die Zeitmessung beginnt?
   b. Wie viele Keime enthält 1 cm^3 Milch nach einem Tag?
   c. Wie viele Keime sind es 10 Minuten nach dem Melken?
   d. Stellen Sie die Funktion graphisch dar.

Geg: $N(2) = N_0 \cdot q^2 = 8'000, \quad N(3) = N_0 \cdot q^3 = 27'000$

Ges: a. $N(t) = N_0 \cdot q^t \quad (N_0 = ? \wedge q = ?)$, b. $N(24) = ?$, c. $N(1/6) = ?$

Lösung:

Ansatz:
$$N_0 \cdot q^2 = 8'000 \qquad (1)$$
$$N_0 \cdot q^3 = 27'000 \qquad (2)$$

aus (1):
$$N_0 = \frac{8'000}{q^2} \qquad (1a)$$

(1a) in (2):
$$\frac{8'000}{q^2} \cdot q^3 = 27'000$$
$$q = \frac{27'000}{8'000} = \frac{27}{8} = \underline{3.38} \qquad (3)$$

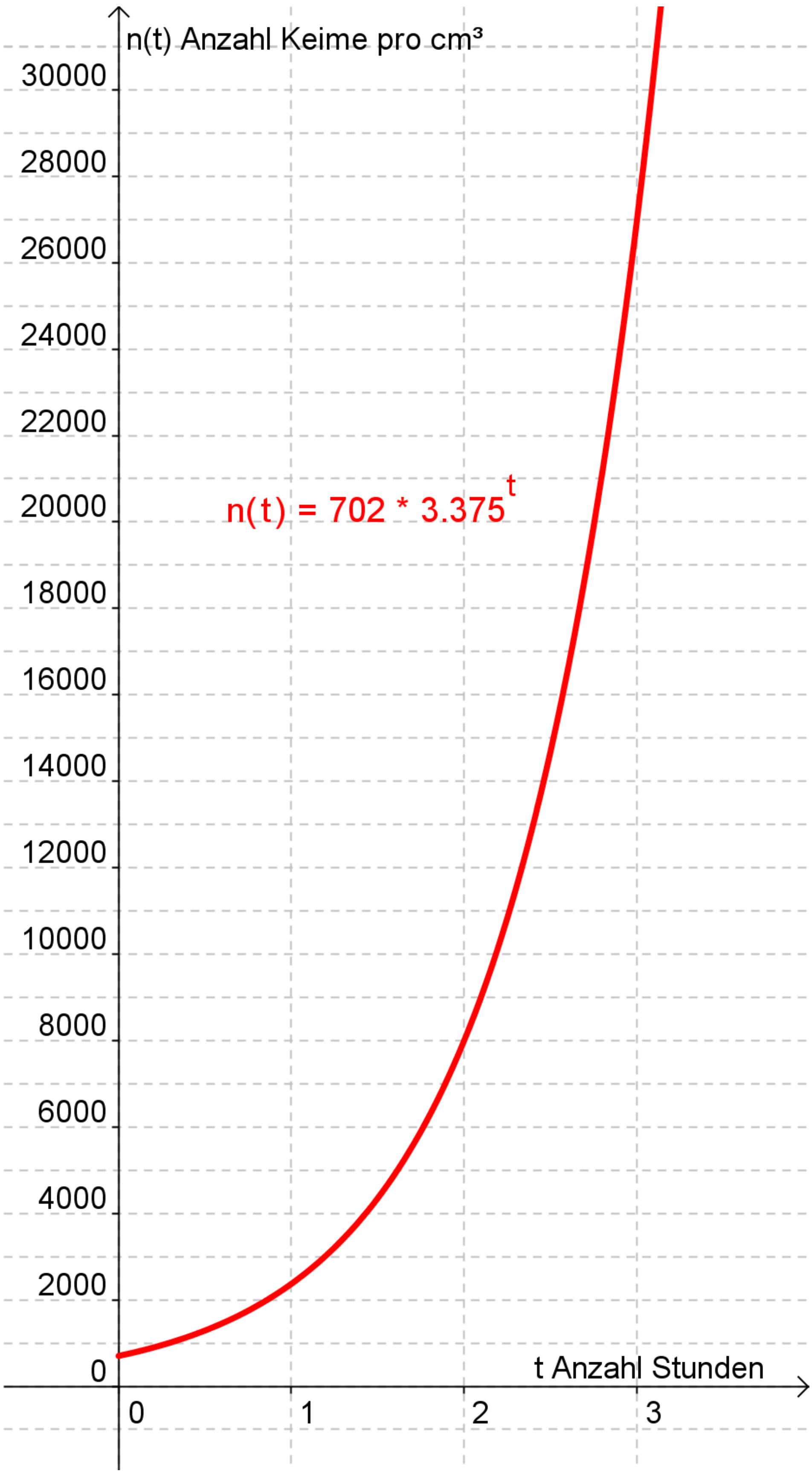
(3) in (1a):
$$N_0 = \frac{8'000}{q^2} = \frac{8'000}{3.38^2} = \underline{702.33} \qquad (4)$$

a.
$$N(t) = \underline{\underline{702.33 \cdot 3.38^t}}$$

b.
$$N(24) = 702.33 \cdot 3.38^{24} = \underline{\underline{3.3505 \cdot 10^{15}}}$$

c.
$$N\left(\frac{1}{6}\right) = 702.33 \cdot 3.38^{1/6} = \underline{\underline{860}}$$

Koordinatensystem für Aufgabe 3:



Quelle unbekannt

4. Am Eröffnungstag eines Streichelzoos befanden sich 93 Meerschweinchen in einem Gehege. Ein Jahr später waren es bereits 115 Meerschweinchen.
   a. Wie viele Meerschweinchen werden es am Tag des 10-jährigen Jubiläums sein, wenn man annimmt, dass der Bestand linear wächst?
   b. Wie viele Meerschweinchen werden es an diesem Tag sein, wenn man ein exponentielles Wachstum annimmt?
   c. Welches «Modell» ist sinnvoller, d.h. lässt sich die Vermehrung der Meerschweinchen eher mit dem linearen oder dem exponentiellen Modell erklären?

geg: $A_0 = 93$; $A_1 = 115$; $n = 10$

Ges: a) $A_{10} = ?$ (linear)

b) $A_{10} = ?$ (exponentiell)

c) welches Modell sinnvoller ?

Lösung

a) $A_{10} = A_0 + (A_1 - A_0) \cdot n =$

$= 93 + (115 - 93) \cdot 10 = \underline{\underline{313}}$

Es hat bei linearer Zunahme nach 10 J. 313 M.

b) $A_{10} = A_0 \cdot q^{10} = 93 \cdot \left(\frac{115}{93}\right)^{10} = \underline{\underline{777,38}}$

$q = \frac{115}{93}$

Es hat bei exponentielle Zunahme 777 Meerschweinchen!

c) exponentiell

Quelle unbekannt

5. Um die Funktion der Bauchspeicheldrüse zu testen, wird ein bestimmter Farbstoff in sie eingespritzt und dessen Ausscheiden gemessen. Eine gesunde Bauchspeicheldrüse scheidet pro Minute 4 % des jeweils noch vorhandenen Farbstoffs aus.
   Bei einer Untersuchung wird einem Patienten 0.2 Gramm des Farbstoffes injiziert. Nach 30 Minuten sind noch 0.09 Gramm des Farbstoffes in seiner Bauchspeicheldrüse vorhanden. Funktioniert seine Bauchspeicheldrüse normal?

Geg: $A_0 = 0{,}2\,g$ $\quad t = 30\,\text{Min}$; $\quad q = 100\% - 4\% = 0{,}96$

$A_{30} = 0{,}09$ (gemessen)

Ges: $A_{30} = ?$ (berechnet)

Lösung

$$A_{30} = A_0 \cdot q^t = 0{,}2g \cdot 0{,}96^{30} = \underline{\underline{0{,}0588\,g}}$$

Nein, die Bauchspeicheldrüse arbeitet nicht normal!!

Quelle unbekannt

6. In einem Forschungslabor wird ein neues Medikament gegen eine Infektionskrankheit entwickelt. Dazu wird unter anderem das Wachstum einer bestimmten Bakterienart experimentell untersucht. Das dargestellte Messprotokoll gibt die Anzahl N der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit t an.

t in Minuten	30	40	50	60	70	80	90
n in 100	17	24	34	48	68	96	136

a. Wie viele Bakterien kann man nach 2h, 3h, 4h und 5h erwarten, wenn man die gleiche Verdopplungszeit annimmt?
b. Auch vor Beginn der Beobachtung verdoppelte sich die Anzahl der Bakterien jeweils in der gleichen Zeit. Wie viele Bakterien befanden sich zu Versuchsbeginn (t = 0) in der Glasschale? Ermitteln Sie die Anzahl der Bakterien 10 min und 30 min vor Versuchsbeginn.

geg: $N_{30} = 17$; $N_{50} = 34$

ges: $N_0 = ?$ $q = ?$ $N_{120} = ?$ $N_{180} = ?$ $N_{240} = ?$ $N_{300} = ?$

$N_0 = ?$ $N_{-10} = ?$ $N_{-30} = ?$

Lösung

(1) $N_{30} = N_0 \cdot q^{30} = 17$

(2) $N_{50} = N_0 \cdot q^{50} = 34$

aus (1): $N_0 = \frac{17}{q^{30}}$ (3)

(3) in (2): $\frac{17}{q^{30}} \cdot q^{50} = 34$

$q^{20} = \frac{34}{17} = 2 \Rightarrow q = \sqrt[20]{2} = \underline{2^{\frac{1}{20}}}$

$q = \sqrt[20]{2}$ in (3)

somit: $N_0 = \frac{17}{(2^{\frac{1}{20}})^{30}} = \frac{17}{2^{\frac{3}{2}}} = \underline{6{,}01} \approx 6$

$N(t) = 6{,}\ldots \cdot (2^{\frac{1}{20}})^t$

$N(120) = 6{,}\ldots \cdot 2^{\frac{1}{20} \cdot 120} = \underline{\underline{384}}$

$N(180) = 3072$

$N(240) = 24'576$

$N(300) = 196'608$

$N(-10) = \underline{4{,}24}$

$N(-30) = \underline{\underline{2{,}12}}$

28

Quelle unbekannt

7. Ein Bakterienstamm kann durch Erhitzung vernichtet werden. Die Abnahme der Individuen folgt näherungsweise dem Gesetz $N(t) = N(0) \cdot 0.8^{t}$ (t in h). Wie viele Bakterien lagen zu Beginn der Beobachtung vor, wenn es nach 2 Stunden noch 960 sind?
   Wann ist der Bakterienstamm abgestorben (d.h. weniger als ein Bakterium vorhanden)?

Geg: $q = 0.8, \quad N(t) = N(0) \cdot 0.8^{t}, \quad N(2) = 960,$

Ges: $N(0) = ?, \quad N(t) = N(0) \cdot 0.8^{t} = 1 \quad \rightarrow \quad t = ?$

Lösung:

Ansatz: $N(2) = N(0) \cdot 0.8^{2} = 960$ | nach N_0 auflösen

eingesetzt: $N(0) = \dfrac{960}{0.8^{2}}$

$N(0) = \underline{1'500}$ | Anfangswert zum Zeitpunkt 0 Stunden

Ansatz für t: $N(t) = N(0) \cdot 0.8^{t} = 1$ | nach t auflösen

eingesetzt: $1'500 \cdot 0.8^{t} = 1$ | : 1'500

$0.8^{t} = \dfrac{1}{1'500}$ | lg( )

$\lg 0.8^{t} = \lg \dfrac{1}{1'500}$ | Potenzregel

$t \cdot \lg 0.8 = \lg \dfrac{1}{1'500}$

$t = \dfrac{\lg \dfrac{1}{1'500}}{\lg 0.8} = \underline{32.77}$

somit: Nach 32.77 h sind weniger als 1 Bakterium vorhanden.

Kaufmännische Berufsmatura 2011

8. Die weltweiten CO_2-Emissionen stiegen in den 7 Jahren von 2000 bis 2007 exponentiell um 3.5 Prozent pro Jahr. Im Jahr 2007 betrug der CO_2-Ausstoss 30'892 Millionen Tonnen. Lösen Sie die beiden folgenden Aufgaben mit geeigneten Gleichungen:

   a. Wie viele Millionen Tonnen CO_2 wurden im Jahr 2000 ausgestossen? Runden Sie das Ergebnis auf eine Stelle nach dem Komma.

   b. In welchem Jahr werden erstmals mehr als 100'000 Millionen Tonnen CO_2 ausgestossen, wenn sich die jährliche Zunahme nicht verändert?

Geg: $p = 3.5\% \;\rightarrow\; q = 1 + \frac{p}{100} = 1.035, \quad A_{2007} = 30'892 \text{ Mio t}$ (Endwert 2007), $t = 7$

$A_t = 100'000 \text{ Mio t}$

Ges: a. $A_{2000} = ?$ (Anfangswert 2000)

b. $t + 2007 = ?$ (Jahr in welchem 100'000 Mio t CO_2 ausgestossen werden)

Lösung:

a. Ansatz: $A_{2007} = A_{2000} \cdot q^7$ $\quad$ |nach A_{2000} auflösen

eingesetzt: $30'892 = A_{2000} \cdot 1.035^7$ $\quad$ $|:1.035^7$

$$\frac{30'892}{1.035^7} = A_{2000}$$

$$A_{2000} = \underline{24'280.8}$$

somit: Im Jahr 2000 wurden 24'280.8 Millionen Tonnen ausgestossen.

b. Ansatz: $A_t = A_{2007} \cdot q^t$ $\quad$ |nach t auflösen

eingesetzt: $100'000 = 30'892 \cdot 1.035^t$ $\quad$ $|: 30'892$

$$\frac{100'000}{30'892} = 1.035^t \quad |\lg(\;)$$

$$\lg\frac{100'000}{30'892} = \lg 1.035^t \quad |\text{Potenzregel}$$

$$\lg\frac{100'000}{30'892} = t \cdot \lg 1.035$$

$$t = \frac{\lg\frac{100'000}{30'892}}{\lg 1.035} = \underline{34.15} = 35$$

somit: Im Jahr 2042 wurden 100'000 Millionen Tonnen ausgestossen.

Quelle unbekannt

9. Eistee kann einen Koffeingehalt von 50 Milligramm pro 0.33 l Dose haben. Bei einem Jugendlichen setzt die Wirkung des Koffeins nach ca. 1 Stunde ein. Der Koffeingehalt im Blut nimmt dann exponentiell mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden ab. Eine Büchse Eistee enthält 50 mg Koffein. Wann sind nur noch 0.01 mg Koffein im Blut vorhanden, wenn der Abbau ca. 1 Stunde nach dem Verzehr beginnt?

Analyse:		Anfangswert a_0	a_3	a_6	usw.	a_t
Zeit in [h]	0	1	4	7	usw.	t + 1
Koffeingehalt in [mg]	50	50	25	12.5	usw.	0.01

Geg: $a_0 = 50\,\text{mg}$ (Anfangswert), $a_3 = 25\,\text{mg}$ (Wert nach 3 h), $a_t = 0.01\,\text{mg}$
Ges: t+1=? (gesuchte Zeit in Stunden)

Lösung:

Ansatz: $a_t = a_0 \cdot q^t$

(1) eingesetzt: $0.01 = 50 \cdot q^t$ $\quad|$q und t unbekannt
(2): $25 = 50 \cdot q^3$

aus (2): $q^3 = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$ $\quad|\sqrt[3]{\;}$
$q = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \underline{0.79}$ $\quad|$Wachstumsfaktor $q = 0.79$

q in (1): $0.01 = 50 \cdot 0.79^t$ $\quad|:50$
$\frac{1}{100 \cdot 50} = 0.79^t$ $\quad|\lg(\;)$
$\lg \frac{1}{5'000} = \lg 0.79^t$ $\quad|$Potenzregel
$\lg \frac{1}{5'000} = t \cdot \lg 0.79$
$t = \frac{\lg \frac{1}{5'000}}{\lg 0.79} = \underline{36.86}$
$t + 1\,\text{h} = \underline{37.86\,\text{h}}$

somit: $\underline{\underline{37.9\text{ h}}}$ nach Einnahme ist nur noch 0.01 mg im Blut vorhanden.

16.9 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
831	221	Kontrolle mit TI üben (Graph)
832	221	Kontrolle mit TI üben (Graph)
836	222	Kontrolle mit TI üben (Graph)
840	223	Kontrolle mit TI üben (Graph)
841	223	Kontrolle mit TI üben (Graph)
843	224	Kontrolle mit TI üben (Graph)
844	224	Gl.-System mit TI lösen
850	226	Kontrolle mit TI üben
851	226	Kontrolle mit TI üben
852	226	Kontrolle mit TI üben

16.10 Praktische Anwendung der Umkehrfunktion

Beispiel 1, Notenberechnung

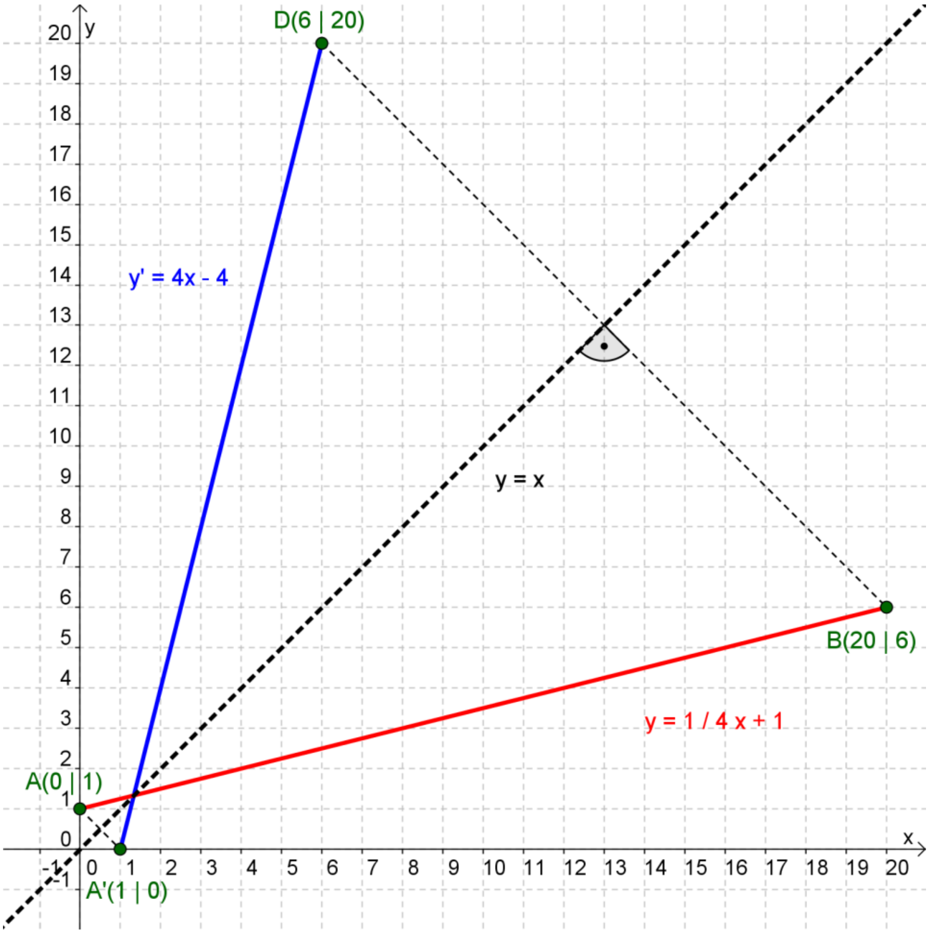
Der Zusammenhang von Punkten und Noten wird durch eine lineare Funktion f(x) = mx + b erfasst, wobei m = 5/max. Punktzahl und b = 1 (0 Punkte ergibt die Note 1) entspricht.

Beispiel, y = f(x) = 0.25x + 1 (maximale Punktzahl 20):

x (Punkte)	0	1	2	3	· · ·	17	18	19	20
y (Note)	1	1.25	1.5	1.75	· · ·	5.25	5.5	5.75	6

Oft ist für Lernende die Fragestellung von Interesse: Wie viele Punkte werden für die Note 4 benötigt? Trägt man die Note auf der x-Achse ab und die Punkte auf der y-Achse, so entsteht der Graph der Umkehrfunktion f^{-1}.

x (Note)	1	1.25	1.5	1.75	· · ·	5.25	5.5	5.75	6
y^{-1} (Punkte)	0	1	2	3	· · ·	17	18	19	20



Entstehung siehe: http://www.fraengg.ch/klassen/tbmmathematik/geogebra

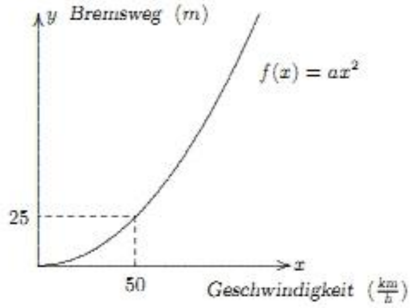
Der Graph der Umkehrfunktion entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden. Der Funktionsterm von f^{-1} ergibt sich durch Auflösen nach x und anschliessendem Vertauschen von x und y.

Beispiel 2, Bremsweg

Der Zusammenhang von Geschwindigkeit und Bremsweg wird näherungsweise durch eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2$ erfasst, wobei a experimentell ermittelt werden muss.

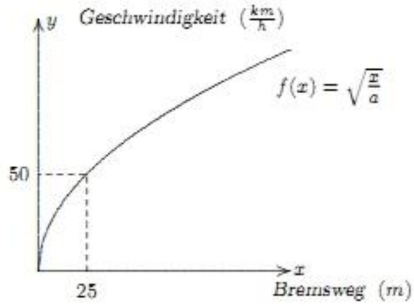
Beispiel: $a = \frac{1}{100}$

x	50	100	150
$f(x)$	25	100	225



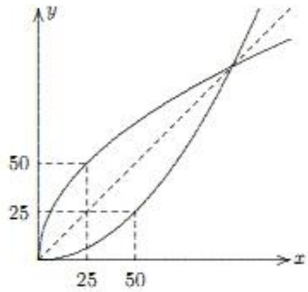
Für die Rekonstruktion von Unfällen ist die Fragestellung von Interesse: Welche Geschwindigkeit lag bei gegebenem Bremsweg vor?
Trägt man den Bremsweg auf der x-Achse ab, so entsteht der Graph der *Umkehrfunktion* f^{-1}.

x	25	100	225
$f^{-1}(x)$	50	100	150



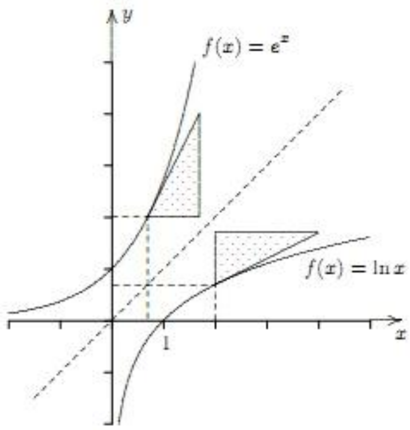
Der Graph der Umkehrfunktion entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden.
Der Funktionsterm von f^{-1} ergibt sich durch Vertauschen von x und y und anschließendes Auflösen nach y.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2, \qquad x \geq 0 \\ y &= ax^2 \\ x &= ay^2 \\ \frac{x}{a} &= y^2 \\ y &= \sqrt{\frac{x}{a}} \end{aligned}$$



Die Umkehrfunktion der e-Funktion ist die ln-Funktion.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ y &= e^x \\ x &= e^y \\ y &= \ln x \end{aligned}$$



Eingescannt (Frommenwiler, Seite 209)

Ist die Umkehrzuordnung einer Funktion f wieder eine Funktion, so heisst die Funktion f **umkehrbar.**
Die durch Umkehrung erhaltene Funktion heisst **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** von f, sie wird mit $\bar{f}$ oder f^{-1} bezeichnet.

Beispiel: Funktion: $A = f(r) = \pi r^2$ $(r > 0)$

Umkehrfunktion: $r = \bar{f}(A) = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ $(A > 0)$

Ist die Gleichung $y = f(x)$ einer umkehrbaren Funktion bekannt, so erhält man die Umkehrfunktion $y = \bar{f}(x)$, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst und die Variablen x und y vertauscht.

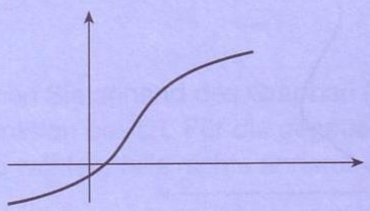
Beispiel: gegebene Funktion f: $y = \frac{x}{2x-3}$

Auflösen nach x: $x = \frac{3y}{2y-1}$

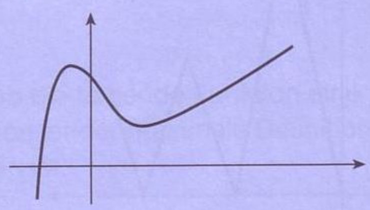
Vertauschen der Variablen: $y = \bar{f}(x) = \frac{3x}{2x-1}$

Eine Funktion f ist umkehrbar, wenn für zwei beliebige Argumente x_1 und x_2 $(x_2 \neq x_1)$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

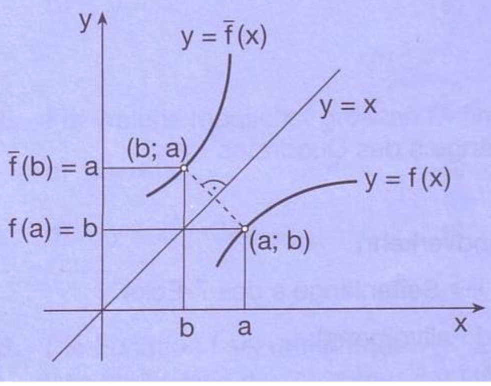
Beispiel:



umkehrbar



nicht umkehrbar



Werden eine Funktion f und ihre Umkehrfunktion $\bar{f}$ in demselben Koordinatensystem $(e_x = e_y)$ grafisch dargestellt, so liegen die Graphen symmetrisch zur Geraden $y = x$ (Winkelhalbierende des 1. Quadranten).

16.11 Wurzelfunktionen

Vertauscht man bei einer Potenzfunktion (**Stammfunktion**) die Variablen x und y und löst die entstandene Gleichung nach y auf, so entsteht **die Umkehrfunktion** (inverse Funktion) der Stammfunktion. Man erhält dann **Potenzfunktionen mit gebrochenen Exponenten.**
Dies sind die Wurzelfunktionen !

Stammfunktion:

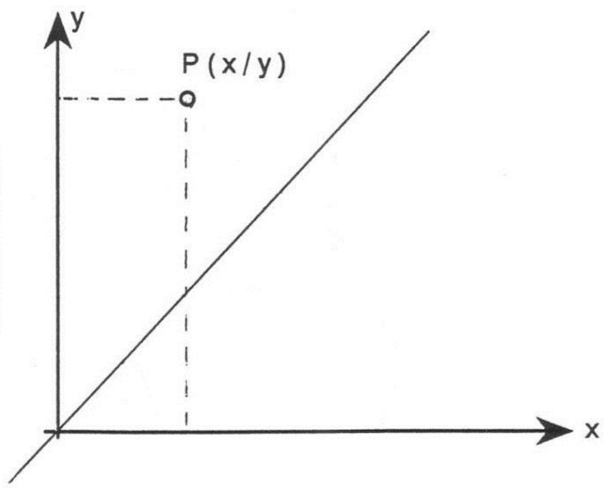
nach x auflösen:

Variablen vertauschen:

Umkehrfunktion:

Geometrische Deutung

Jedem Punkt P der Stammfunktion wird durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden (y = x) ein Punkt P` der Umkehrfunktion zugeordnet !

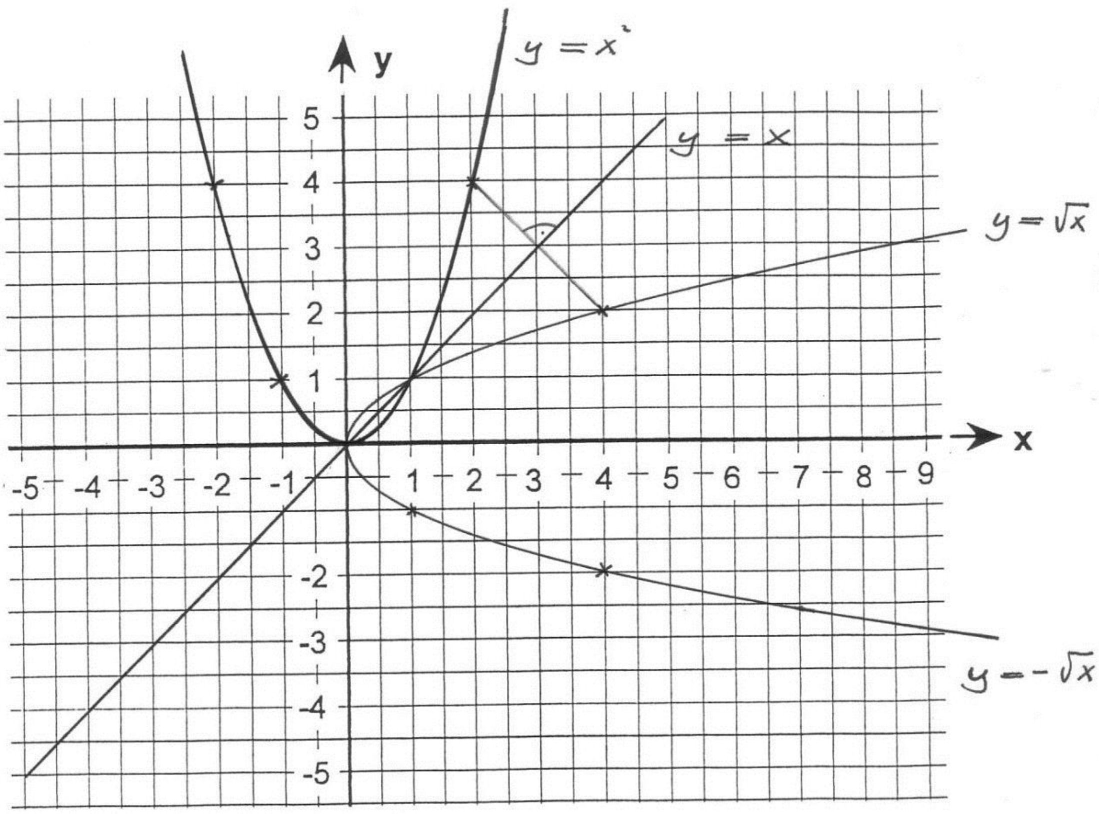


Aufgabe: Zeichnen Sie den Graphen
und den Graphen der Umkehrfunktion

Stammfunktion:

nach x auflösen und
Variablen vertauschen:

Umkehrrelation:



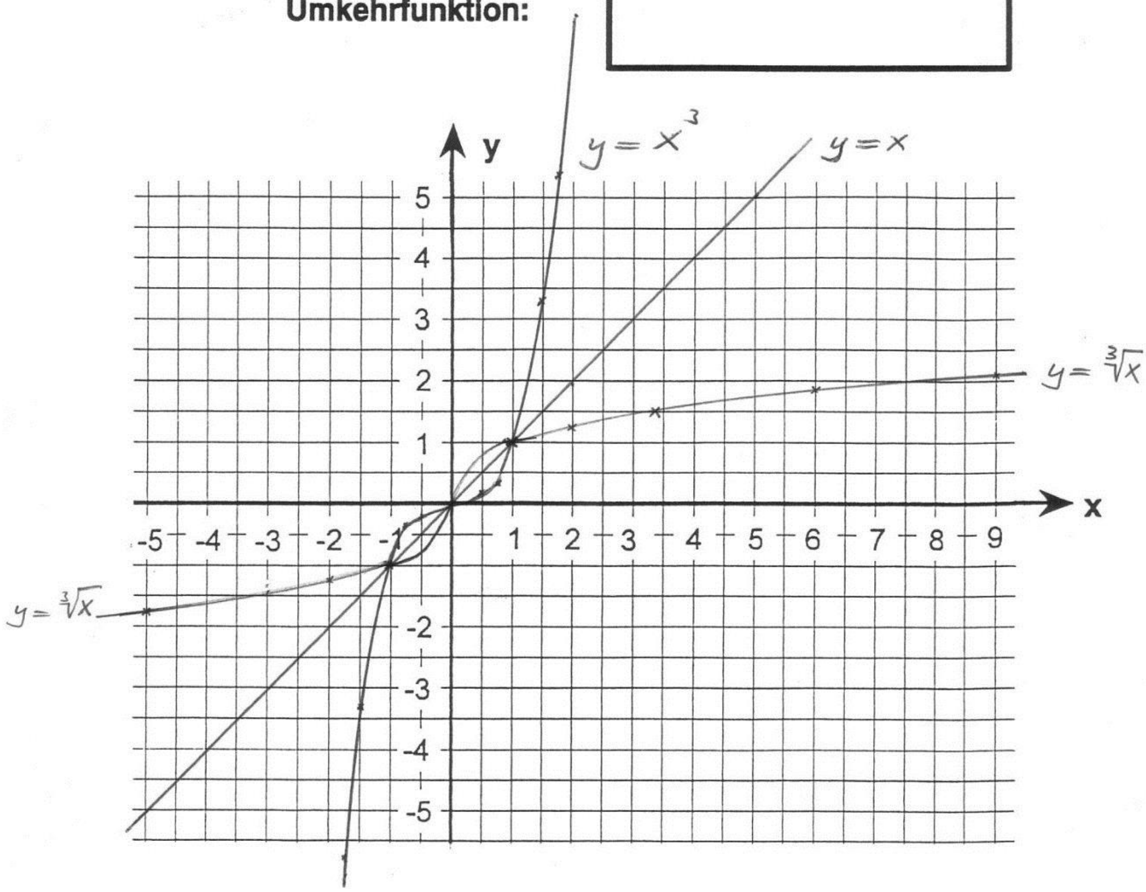
Folgerung:

Aufgabe: Zeichnen Sie den Graphen
und den Graphen der Umkehrfunktion

Stammfunktion:

Variablen vertauschen
und nach y auflösen:

Umkehrfunktion:



Folgerung:

16.12 Übungen

BM-Prüfung, Uri 2000

1. Gegeben sind folgende zwei Funktionsgleichungen:
   $y_1 = f_1(x) = 1.5x - 2$
   $y_2 = f_2(x) = 2x^2 - 4x - 5$

   a. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen.
   b. Bestimmen Sie den Scheitelpunkt der Parabel mit quadratischer Ergänzung.

   Die Parabel wird an der x-Achse gespiegelt und es soll die Umkehrfunktion von $f_1(x)$ bestimmt werden.

   c. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der gespiegelten Parabel mit $\overline{f_1}(x)$.
   d. Stellen Sie die 4 Funktionen grafisch dar (Koordinatensystem auf übernächster Seite).

a. Schnittpunkte: $y_1 \cap y_2$

$$1.5x - 2 = 2x^2 - 4x - 5$$

$$0 = 2x^2 - 5.5x - 3 \quad \rightarrow \quad A = 2,\ B = -5.5,\ C = -3$$

$$x_{A,B} = \frac{5.5 \pm \sqrt{(-5.5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{5.5 \pm 7.37}{2 \cdot 2} =$$

$$x_B = \underline{3.22} \quad \rightarrow \quad y_B = y_1(3.22) = \underline{2.82} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{B(3.22|2.82)}}$$

$$x_A = \underline{-0.47} \quad \rightarrow \quad y_A = y_1(-0.47) = \underline{-2.70} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A(-0.47|-2.70)}}$$

b. Scheitelform: $y_2 = 2 \cdot (x^2 - 2x - 2.5)$

$$y_2 = 2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - 1 - 2.5)$$

$$y_2 = 2 \cdot \left[(x-1)^2 - 3.5\right]$$

$$y_2 = \underline{2 \cdot (x-1)^2 - 7} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{S(1|-7)}}$$

c. Parabel spiegeln: $S'(1|+7)$

$$y_3 = -2 \cdot (x-1)^2 + 7 \quad \textbf{oder} \text{ direkt: } y_3 = -f_2(x) = \underline{-2x^2 + 4x + 5}$$

$$y_3 = -2 \cdot (x^2 - 2x + 1) + 7$$

$$y_3 = \underline{-2x^2 + 4x + 5}$$

Umkehrfunktion von y_1:

$y_1 = 1.5x - 2 \quad |+2$

$y_1 + 2 = 1.5x \quad \left|:\frac{3}{2}\right.$

$\frac{2}{3}y_1 + \frac{2\cdot 2}{3} = x \quad$ |Variablen vertauschen

$\underline{\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}} = y^{-1} = y_4$

Schnittpunkte: $y_3 \cap y_4$

$-2x^2 + 4x + 5 = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

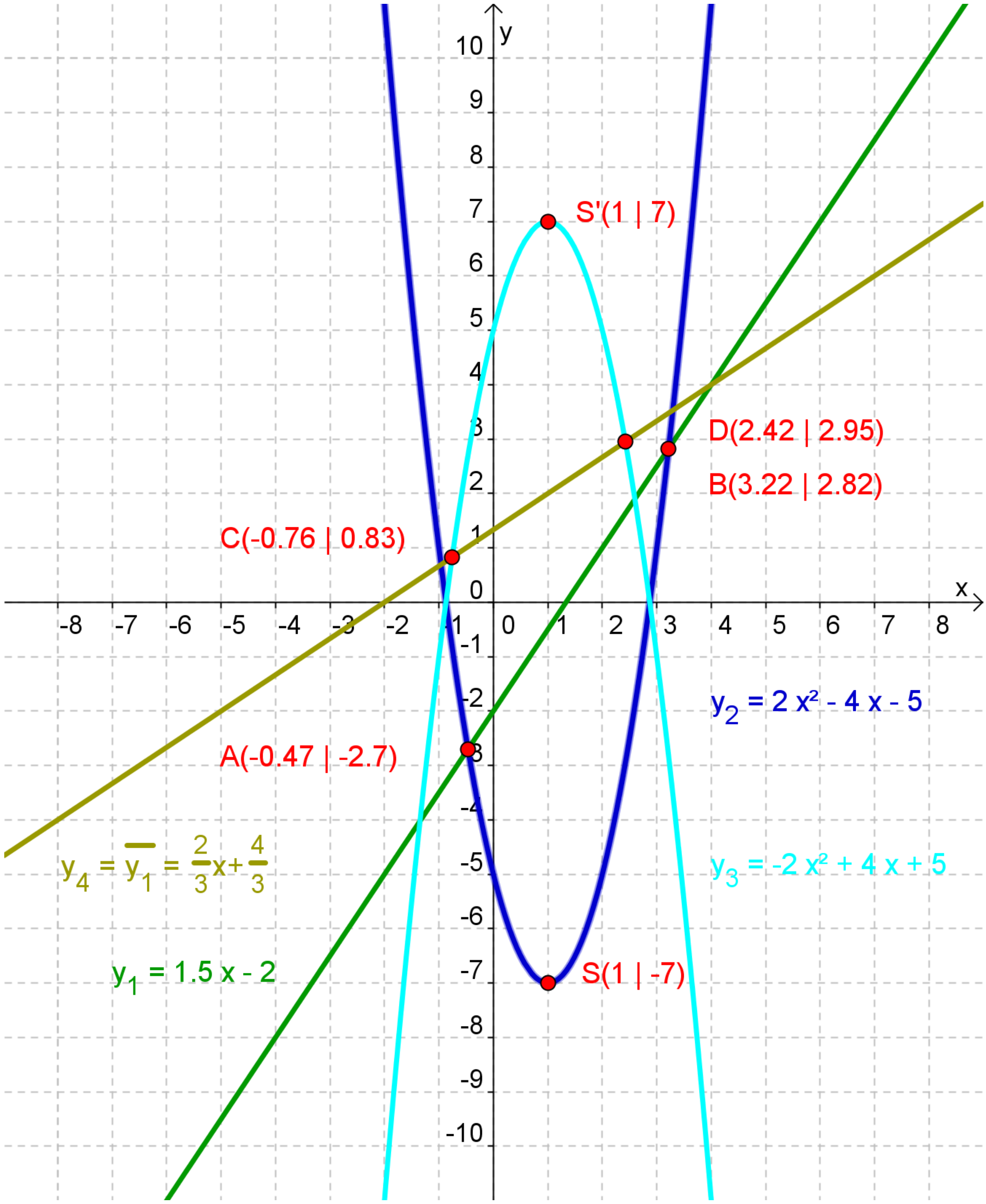
$-2x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{11}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad A = -2,\ B = \frac{10}{3},\ C = \frac{11}{3}$

$$x_{C,D} = \frac{-\frac{10}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 4\cdot(-2)\cdot\frac{11}{3}}}{2\cdot(-2)} = \frac{-\frac{10}{3} \pm 6.36}{2\cdot(-2)} =$$

$x_C = \underline{-0.76} \quad \rightarrow \quad y_C = y_4(-0.76) = \underline{0.83} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{C(-0.76|0.83)}}$

$x_D = \underline{2.42} \quad \rightarrow \quad y_C = y_4(2.42) = \underline{2.95} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{C(2.42|2.95)}}$

Koordinatensystem für Aufgabe 1:



2. Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen:
   f: $y = \log_2(x - 1) - 2$
   g: $y = \log_2(x + 2)$

   a. Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f.
   b. Bestimmen Sie algebraisch die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion von g.
   c. Wenn Sie den Graphen der Funktion g an der x-Achse spiegeln, erhalten Sie die Funktion g'. Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt von g' und f.
   d. Stellen Sie die Funktionen grafisch dar (Koordinatensystem auf übernächster Seite).

a. Nullstelle von f: $\log_2(x-1)-2=0$

$\log_2(x-1)=2$ |Grundgesetz

$2^2=x-1$ |+1

$4+1=x$

$x=\underline{5}$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{N(5|0)}}$

b. Umkehrfunktion von g: $y=\log_2(x+2)$

$y=\log_2(x+2)$ |Grundgesetz

$2^y=x+2$ |−2

$2^y-2=x$ |Variablen vertauschen

$\underline{2^x-2}=y=g^{-1}$

c. g an x-Achse spiegeln: $g'(x)=-g(x)=\underline{-\log_2(x+2)}$

Schnittpunkt: $g'\cap f$

$-\log_2(x+2)=\log_2(x-1)-\underbrace{2}_{\log_2 4}$

$-\log_2(x+2)=\log_2(x-1)-\log_2 4$

$\log_2(x+2)^{-1}=\log_2\left(\frac{x-1}{4}\right)$ |Numeri gleichsetzen

$\frac{1}{x+2}=\frac{x-1}{4}$ |TU

$4=(x-1)(x+2)$ |TU

$0=x^2+x-6$ |Faktorisieren

$(x+3)(x-2)=0$

$x_1 = \underline{-3} \quad \notin L \quad (\text{Numeri würden negativ})$

$x_2 = \underline{2} \quad \in L \quad (\text{Numeri} > 0)$

$y = g'(2) = -\log_2(2+2) = \underline{-2} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{S(2|-2)}}$

d. Wertetabelle:

x	−1	0	1	usw.	10	11
$\log_2(x-1)-2$	n. d.	n. d.	n. d.	usw.	1.17	1.32
$\log_2(x+2)$	0	1	1.59	usw.	3.59	3.70
$-\log_2(x+2)$	0	−1	−1.59	usw.	−3.59	−3.70
2^x-2	−1.5	−1	0	usw.	1'022	2'046

Koordinatensystem für Aufgabe 2: