3 Operationen 2. Stufe

3.1 Multiplikation

Die Multiplikation von algebraischen Termen kennen Sie von früher.
Die wichtigsten Punkte seien hier kurz wiederholt:

$$\underset{\text{Multiplikator}}{a} \cdot \underset{\text{Multiplikand}}{b} = \underset{\text{Produkt}}{c}$$

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

$a \cdot b = b \cdot a$ z. B. $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$

Der Wert des Produktes ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ z. B. $2 \cdot 3 \cdot 4 = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$

Beim Multiplizieren darf man die Faktoren zu Teilprodukten zusammenfassen.

Neutrales Element

$a \cdot 1 = a$ z. B. $3 \cdot 1 = 3$

1 ist das neutrale Element der Multiplikation.

Multiplikation mit dem Faktor Null

$a \cdot 0 \cdot b \cdot 5 = 0$ z. B. $3 \cdot 0 \cdot 7 \cdot 5 = 0$

Ist in einem Produkt mindestens ein Faktor Null, so ist das ganze Produkt Null.

Gleichartige Summanden (Kettenaddition und ihre Vereinfachung)

Besteht eine Addition aus lauter gleichen Summanden, so kann sie verkürzt als Multiplikation geschrieben werden (siehe Abschnitt 2. 2.).

$a + a + a + a = a \cdot (1 + 1 + 1 + 1) = 4a$ z. B. $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$

Gleichartige Faktoren (Kettenmultiplikation und ihre Vereinfachung)

Besteht eine Multiplikation aus lauter gleichen Faktoren, so kann sie verkürzt als Potenz geschrieben werden (siehe Abschnitt 2.3.).

$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$ z. B. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$

Vor- und Rechenzeichen

$$\left(\underset{\text{Vorzeichen}}{+} a\right) \underset{\text{Rechenzeichen}}{\cdot} \left(\underset{\text{Vorzeichen}}{-} b\right) = \underset{\text{Vorzeichen}}{-} ab$$

Vorzeichenregel der Multiplikation

Das Produkt zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen wird positiv, ein solches mit ungleichen Vorzeichen aber negativ.

a. $(+a)\cdot(+b)=(+ab)=ab$

b. $(+a)\cdot(-b)=(-ab)=-ab$

c. $(-a)\cdot(+b)=(-ab)=-ab$

d. $(-a)\cdot(-b)=(+ab)=ab$

Allgemein:
Ist die Anzahl der negativen Faktoren **gerade**, so ist das Produkt **positiv**.
Ist die Anzahl der Faktoren **ungerade**, so ist das Produkt **negativ**.

Ordnen des Produktes

An den Anfang setzt man die bestimmte Zahl und danach alphabetisch die Variablen.

z. B. $2\cdot y\cdot a\cdot 7\cdot x=14axy$

$4\cdot b^3\cdot a\cdot 3=12ab^3$

$b^5\cdot a^2\cdot 2\cdot a=2a^3b^5$

Punktrechnung vor Strichrechnung

Wenn nicht mit Klammern eine Reihenfolge vorgeschrieben wird, muss immer zuerst die Multiplikation oder Division und erst nachher die Addition oder Subtraktion ausgeführt werden.

z. B. $5\cdot 4+3\cdot 8=(5\cdot 4)+(3\cdot 8)=20+24=44$

Treten nur Operationen gleicher Stufe auf, so wird, wenn nicht Klammern etwas anderes vorschreiben, der Reihe nach von links nach rechts gerechnet.

z. B. $\underbrace{5\cdot 8}_{\text{1. Schritt}}:4:2\cdot 7=\underbrace{40:4}_{\text{2. Schritt}}:2\cdot 7=\underbrace{10:2}_{\text{3. Schritt}}\cdot 7=\underbrace{5\cdot 7}_{\text{4. Schritt}}=35$

Multiplikation von einem Term mit einer Summe (Distributivgesetz)

Ein Term wird mit einer Summe multipliziert, indem man jedes Glied der Summe mit dem Term multipliziert.

z. B. $2a\cdot(5b-13c)=2a\cdot 5b+2a\cdot(-13c)=10ab-26ac$

Multiplikation von zwei Summen (Distributivgesetz)

Zwei algebraische Summen werden multipliziert, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen Summe multipliziert.

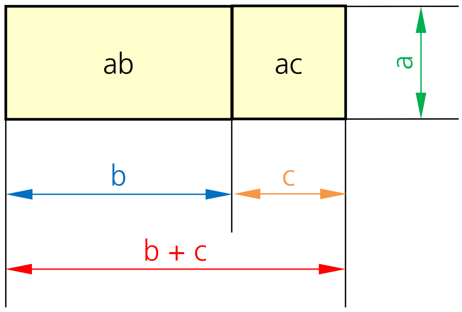
z. B $(2x+3y)\cdot(5a+7b)=2x\cdot 5a+2x\cdot 7b+3y\cdot 5a+3y\cdot 7b=10ax+14bx+15ay+21by$

Differenzen multipliziert man gleich wie Summen.
Zusätzlich ist die Vorzeichenregel zu beachten:

z. B. $(4a-3e)\cdot(2f-3k)=4a\cdot 2f+4a\cdot(-3k)-3e\cdot 2f-3e\cdot(-3k)=8af-12ak-6ef+9ek$

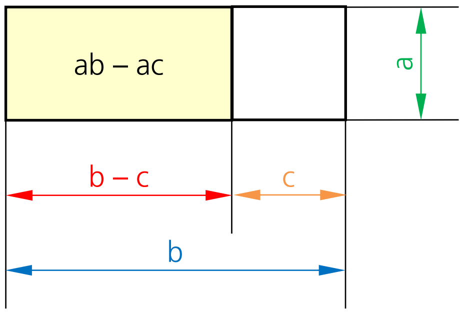
3.2 Geometrische Interpretation des Distributivgesetzes

Multiplikation mit einer Summe



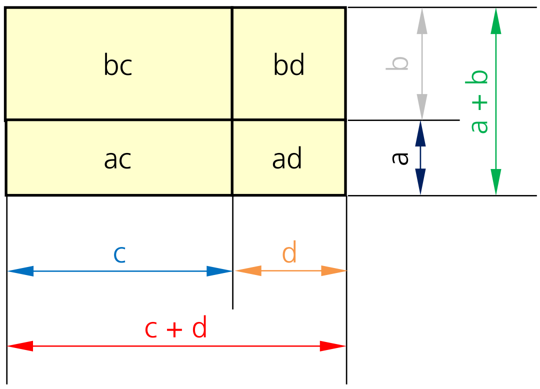
$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

Multiplikation mit einer Differenz



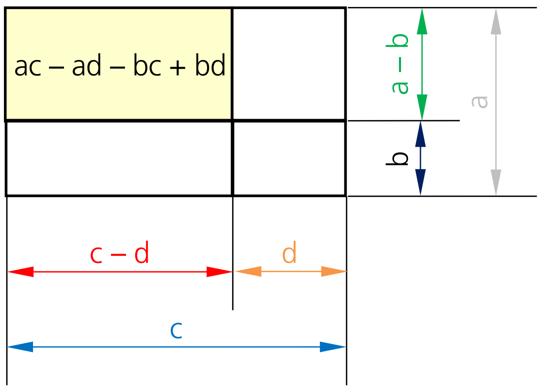
$$a \cdot (b - c) = ab - ac$$

Multiplikation von zwei Summen



$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Multiplikation von zwei Differenzen



$$(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd$$

3.3 Übungen

Multiplizieren Sie folgende Produkte aus:

1. $3m \cdot 5n = ?$

2. $5 \cdot (ab \cdot 3a) = ?$

3. $10mn \cdot 3m^2n = ?$

4. $2b \cdot 3abc \cdot 3bc = ?$

5. $(-x) \cdot 5x^2 = ?$

6. $(-5) \cdot (-3a^2) = ?$

7. $(-a^2) \cdot (-3a) \cdot (-2) = ?$

8. $(-3a) \cdot (-2b) \cdot 4c = ?$

9. $(x^2 + 2x - 1) \cdot (2x + 1) = ?$

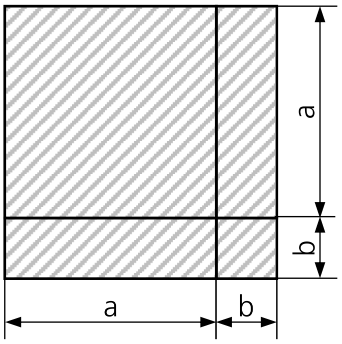
10. $(5x - 6y) \cdot (3x + y) \cdot (2x - 3y) = ?$

Achtung, hüten Sie sich vor folgendem Fehler:

$$5 \cdot (a + b) \cdot (c + d) \neq (5a + 5b) \cdot (5c + 5d) = 25ac + 25ad + 25bc + 25bd$$

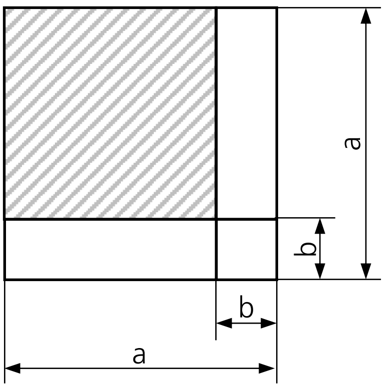
3.4 Binomische Formeln

Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Figuren:



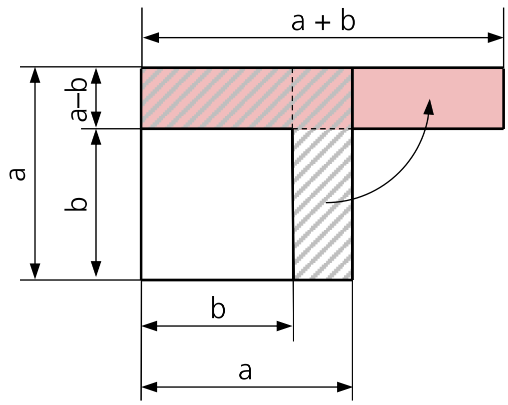
1. Binomische Formel

Struktur einprägen: $(\triangle+\bigcirc)^2=\triangle^2+2\triangle\bigcirc+\bigcirc^2$



2. Binomische Formel

Struktur einprägen: $(\triangle-\bigcirc)^2=\triangle^2-2\triangle\bigcirc+\bigcirc^2$



3. Binomische Formel

Struktur einprägen: $(\triangle+\bigcirc)(\triangle-\bigcirc)=\triangle^2-\bigcirc^2$

3.5 Übung

Berechnen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln:

1. $(x+y)^2 = ?$
2. $(2x+y)^2 = ?$
3. $(4y+7)^2 = ?$
4. $(ab+c)^2 = ?$
5. $(6-5a)^2 = ?$
6. $(5a-c)^2 = ?$
7. $(x^2-2x)^2 = ?$
8. $(-3x-2y)^2 = ?$
9. $(2x-3)\cdot(2x+3) = ?$
10. $(4a+5b)\cdot(4a-5b) = ?$
11. $(2x^2+4x)\cdot(2x^2-4x) = ?$
12. $(-ax+5z)\cdot(-ax-5z) = ?$

Ergänzen Sie die leeren Stellen unter Benutzung der binomischen Strukturen:

13. $\left(\boxed{5x}+\boxed{}\right)^2=\boxed{}+\boxed{}+\boxed{49}$

14. $\left(\boxed{}-\boxed{5}\right)^2=\boxed{}-\boxed{30x}+\boxed{}$

15. $\left(\boxed{}+\boxed{}\right)^2=\boxed{81a^2}+\boxed{144a}+\boxed{}$

16. $\left(\boxed{}-\boxed{}\right)^2=\boxed{}-\boxed{56st}+\boxed{16t^2}$

17. $\left(\boxed{2x}+\boxed{}\right)\cdot\left(\boxed{}-\boxed{4}\right)=\boxed{}-\boxed{}$

18. $\left(\boxed{}+\boxed{}\right)\cdot\left(\boxed{}-\boxed{2b}\right)=\boxed{9a^2}-\boxed{}$

19. $\left(\boxed{}+\boxed{2}\right)\cdot\left(\boxed{}-\boxed{}\right)=\boxed{}-\boxed{25s^2}$

20. $\left(\boxed{}-\boxed{}\right)^2=\boxed{}-\boxed{8\triangle\bigcirc^2}+\boxed{\bigcirc^4}$

3.6 Division

Die Division von algebraischen Termen kennen Sie von früher.
Die wichtigsten Punkte seien hier kurz wiederholt:

Wenn $c \cdot b = a$ ist, dann gilt:

a	:	b	=	c
Dividend		Divisor		Quotient

Die Division ist somit die Umkehroperation der Multiplikation.

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

$a : b \neq b : a \quad (a \neq b)$ z. B. $8 : 2 \neq 2 : 8$

Bei der Division gilt das Kommutativgesetz nicht.

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

$(a : b) : c \neq a : (b : c)$ z. B. $(10 : 5) : 2 \neq 10 : (5 : 2)$

Bei der Division gilt das Assoziativgesetz nicht.

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

$(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$ z. B. $(8 + 4) : 2 = (8 : 2) + (4 : 2)$

Die Divison und die Null

$0 : a = 0$ weil $0 \cdot a = 0$ z. B. $0 : 5 = 0$ weil $0 \cdot 5 = 0$

Ist der Dividend gleich 0, so ist der Quotient auch gleich 0.

Aus der Definition der Division als Umkehrfunktion der Multiplikation ist ersichtlich, dass die Division durch 0 sinnlos ist.

Beweis:
Wäre $a : 0 = b$, so müsste nach der Definition $b \cdot 0 = a$ ergeben.
Wenn aber $a \neq 0$ ist, gibt es keine Zahl b, die diese Gleichung erfüllt.
Die Division durch 0 ist somit sinnlos.

Vorzeichenregel der Division

a. $(+a) : (+b) = (+c)$

b. $(+a) : (-b) = (-c)$

c. $(-a) : (+b) = (-c)$

d. $(-a) : (-b) = (+c)$

Merke:

$$(+a):(-b)=(-a):(+b)=\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$$

Die Vorzeichen von Zähler und Nenner können miteinander vertauscht werden. Ein Vorzeichen vor dem Bruchstrich kann in den Zähler oder in den Nenner gebracht werden.

Sonderfälle
Da 1 das neutrale Element der Multiplikation ist, gilt:
$a:a=1$

$a:1=a$

3.7 Übungen

Berechnen Sie den Quotienten:

1. $8ab:(4a)=?$

2. $9x:(-18xy)=?$

3. $(8xy+4xz-4):(4x)=?$

4. $16ax+12ab-8ay:(4a)=?$

5. $(12x+9y):(4x+3y)=?$

3.8 Multiplizieren und Dividieren mit dem TI

Beispiel 1 $(a-1)\cdot\left(4a^2+3a-1\right)=?$

Eingabe: Entwick((a − 1)(4a ^ 2 + 3a − 1))

Ergebnis: $\underline{\underline{4a^3-a^2-4a+1}}$

Hinweis: Die Funktion Entwick() multipliziert den Term aus.
Sie ist über [F2] erreichbar.
Die Berechnung wird mit der Taste [ENTER] ausgeführt.

Beispiel 2 $(u-v-w)^2=?$

Eingabe: Entwick((u − v − w) ^ 2)

Ergebnis: $\underline{\underline{u^2-2uv-2uw+v^2+2vw+w^2}}$

Hinweis: Es wird nur ein Teil des Resultates angezeigt. Der Rest des Resultates muss mit den Pfeiltasten ⏶ und ⏵ gescrollt werden.
Die Berechnung wird mit der Taste [ENTER] ausgeführt.

Beispiel 3 $\dfrac{ax+a-x-1}{ax-a-x+1}=?$

Eingabe: (a * x + a − x − 1) / (a * x − a − x + 1)

Ergebnis: $\underline{\underline{\dfrac{x+1}{x-1}}}$

Hinweis: Wenn Sie das Multiplikationszeichen [×] weglassen, wird der Term nicht vollständig gekürzt. Probieren Sie es aus!
Tipp: Anzeige kontrollieren, Sie merken anhand der falschen Schreibweise, dass der Rechner ax als eine Variable anschaut!
Die Berechnung wird mit der Taste [ENTER] ausgeführt.

Beispiel 4 $\dfrac{3n^2+8n+4}{n^2+4n+4}=?$

Eingabe: (3n ^ 2 + 8n + 4) / (n ^ 2 + 4n + 4)

Ergebnis: $\dfrac{3n+2}{n+2}$

Hinweis: Die Berechnung wird mit der Taste [ENTER] ausgeführt.

3.9 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
21 (a, b, d, f und h)	16	Kontrolle mit TI üben
22 (a bis h)	16	Kontrolle mit TI üben
23 (a bis d)	17	Kontrolle mit TI üben
24 (a bis c)	17	Kontrolle mit TI üben
25 (a bis c)	17	Kontrolle mit TI üben