7 Radizieren

7.10 Übungen Frommenwiler

124. a) $\text{Radikand} \geq 0$

$-a \geq 0$

$\underline{\underline{a \leq 0}}$ oder $\underline{\underline{D = \{a \in \mathbb{R} | a \leq 0\}}}$ oder $\underline{\underline{\mathbb{R}_-}}$ (die Null ist inbegriffen)

b) $\text{Radikand} \geq 0 \;\wedge\; \text{Nenner} \neq 0 \;\rightarrow\; \text{Radikand} > 0$

1 ist bereits positiv!

$\frac{1}{a} > 0 \;\rightarrow\; \frac{+}{+} > 0$

somit: $\underline{\underline{a > 0}}$ oder $\underline{\underline{D = \{a \in \mathbb{R} | a > 0\}}}$ oder $\underline{\underline{\mathbb{R}_+^*}}$ (die Null ist ausgeschlossen)

f) $\text{Radikand} \geq 0$

$a + 2 \geq 0 \;\rightarrow\; \underline{\underline{a \geq -2}}$ oder $\underline{\underline{D = \{a \in \mathbb{R} | a \geq -2\}}}$ oder $\underline{\underline{[-2; \infty[}}$

i) $\text{Radikand} \geq 0$

$2a + 3 \geq 0 \;\rightarrow\; 2a \geq -3 \;\rightarrow\; \underline{\underline{a \geq -\frac{3}{2}}}$ oder $\underline{\underline{D = \left\{a \in \mathbb{R} \middle| a \geq -\frac{3}{2}\right\}}}$ oder $\underline{\underline{[-\frac{3}{2}; \infty[}}$

125. a) Aussage ist falsch, weil Radikand negativ ist!

c) Aussage ist falsch, weil Wurzel aus 9 positiv ist: $\sqrt{9} = 3$

d) Aussage ist falsch, weil: $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$

Achtung, die folgende Rechnung ist nicht erlaubt, weil die Umwandlung einer Wurzel in eine Potenz nur für positive Radikanden definiert ist:

$\sqrt{(-4)^2} \neq (-4)^{\frac{2}{2}} = -4$

e) Wurzel aus Summen ziehen… Beachten Sie den Unterschied:

$\underbrace{\sqrt{3^2 \cdot 4^2}}_{12} = \underbrace{\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{4^2}}_{12}$ **aber** $\underbrace{\sqrt{3^2 + 4^2}}_{5} \neq \underbrace{\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}}_{7}$

g) Wurzel aus Summen ziehen…

j) Wenn a negativ eingesetzt wird, bekommen Sie einen Fehler:

sei $a = -3$, falls die Aussage wahr wäre, würde gelten:

$$\sqrt{a^2} = a \;\rightarrow\; \sqrt{(-3)^2} = (-3) = -3$$

korrekt ist aber: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = +3$

126. e) mit Potenzgesetzen gerechnet: $\left(\sqrt{2}\right)^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = \underline{\underline{8}}$

mit Wurzelgesetzen gerechnet: $\left(\sqrt{2}\right)^6 = \sqrt[2]{2^6} = \sqrt[2]{2^{2\cdot 3}} = 2^3 = \underline{\underline{8}}$

h) $\sqrt{6}\left(\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{6\cdot 1}{3}} + \sqrt{\frac{6\cdot 1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}$

k) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{32}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot 32}{\underset{2}{\cancel{6}}}} = \sqrt{\frac{\overset{16}{\cancel{32}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}} = \sqrt{16} = \underline{\underline{4}}$

128. a) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 = \sqrt{3^2} + \underbrace{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}_{\text{doppeltes Produkt}} + \sqrt{5^2} = 3 + 2\sqrt{3\cdot 5} + 5 = \underline{\underline{8+2\sqrt{15}}}$

b) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right) = \left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right) = \sqrt{5^2} - \sqrt{7^2} = 5 - 7 = \underline{\underline{-2}}$

d) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \sqrt{3^2} - \underbrace{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}}_{\text{doppeltes Produkt}} + \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 3 - \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{1}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = 3 - 2 + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

e) $\left(2\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+2\sqrt{6}\right) = \left(2\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{6}+\sqrt{5}\right) = 4\cdot 6 - 5 = 24 - 5 = \underline{\underline{19}}$

i) $\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^2 =$

$\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2 + \underbrace{2\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}}_{\text{doppeltes Produkt}} + \left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^2 =$

$\sqrt{2} - 1 + 2\cdot\sqrt{\underbrace{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}_{\text{3. Binom}}} + \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2-1} = \underline{\underline{2\sqrt{2}+2}}$

j) $$\left(\sqrt{\sqrt{6}+3}-\sqrt{3-\sqrt{6}}\right)^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{6}}-\sqrt{3-\sqrt{6}}\right)^2=$$
$$\left(\sqrt{3+\sqrt{6}}\right)^2-\underbrace{2\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}}_{\text{doppeltes Produkt}}+\left(\sqrt{3-\sqrt{6}}\right)^2=$$
$$3+\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{\underbrace{\left(3+\sqrt{6}\right)\left(3-\sqrt{6}\right)}_{\text{3. Binom}}}+3-\sqrt{6}=6-2\cdot\sqrt{9-6}=\underline{\underline{6-2\sqrt{3}}}$$

k) $$\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{6}\right)\right]\cdot\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{6}\right)\right]=$$
$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2=2+2\sqrt{2\cdot 3}+3-6=\underline{\underline{2\sqrt{6}-1}}$$

130. b) $$\frac{1}{4}\sqrt{5}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{\frac{1^2\cdot 5}{4^2}}=\underline{\underline{\sqrt{\frac{5}{16}}}}$$

e) Die ursprüngliche Zahl ist negativ. Durch das Quadrieren würde das Minus verschwinden. Deshalb wird das Minus separiert und nicht quadriert. Dadurch bleibt die Zahl auch negativ, wenn der Faktor unter die Wurzel gebracht wird!

$$\underbrace{-2}_{\substack{\text{Minus}\\\text{ausklammern}}}\sqrt{5}=(-1)\cdot(2)\sqrt{5}=(-1)\cdot\sqrt{2^2}\sqrt{5}=(-1)\cdot\sqrt{4\cdot 5}=\underline{\underline{-\sqrt{20}}}$$

h) $$\underbrace{\left(2-\sqrt{7}\right)}_{\text{wird negativ}}\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\underbrace{-\overbrace{\left(\sqrt{7}-2\right)}^{\text{positiv}}}_{\text{Minus ausklammern}}\sqrt{11-4\sqrt{7}}=-\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}\cdot\sqrt{11-4\sqrt{7}}=$$
$$-\sqrt{7-4\sqrt{7}+4}\cdot\sqrt{11-4\sqrt{7}}=-\sqrt{11-4\sqrt{7}}\cdot\sqrt{11-4\sqrt{7}}=-\left(11-4\sqrt{7}\right)=\underline{\underline{4\sqrt{7}-11}}$$

131. c) $$pq\cdot\sqrt{\frac{p}{q}}=\sqrt{(pq)^2}\sqrt{\frac{p}{q}}=\sqrt{\frac{p^2q^2p}{q}}=\underline{\underline{\sqrt{p^3q}}}$$

e) $$xy\cdot\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\sqrt{(xy)^2}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\sqrt{x^2y^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=\sqrt{\frac{x^2y^2}{x}+\frac{x^2y^2}{y}}=\underline{\underline{\sqrt{xy^2+x^2y}}}$$

134. a) $\sqrt{16a} = \sqrt[2]{2^4 a} = 2^2\sqrt{a} = \underline{\underline{4\sqrt{a}}}$

c) $\sqrt{2c^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}\cdot|c|}}$

f) $\sqrt{x^3 + x^2} = \sqrt{x^2(x+1)} = \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{(x+1)} = \underline{\underline{|x|\cdot\sqrt{x+1}}}$

135. b) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5^2}-\sqrt{10}}{\sqrt{5^2}} = \frac{5-\sqrt{10}}{5} = \underline{\underline{1-\frac{1}{5}\sqrt{10}}}$

c) $\frac{\sqrt{7}}{2+\sqrt{7}}\cdot\frac{2-\sqrt{7}}{2-\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}-\sqrt{7^2}}{2^2-\sqrt{7^2}} = \frac{2\sqrt{7}-7}{4-7} = \frac{2\sqrt{7}-7}{-3} = \underline{\underline{\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}}}$

f) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3^2}+2\sqrt{3\cdot2}+\sqrt{2^2}}{\sqrt{3^2}-\sqrt{2^2}} = \frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2} = \underline{\underline{5+2\sqrt{6}}}$

g) $\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{5}+\sqrt{7}}\cdot\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7\cdot5}-2\sqrt{7^2}}{4\sqrt{5^2}-\sqrt{7^2}} =$

$\frac{4\sqrt{35}-2\cdot7}{4\cdot5-7} = \frac{4\sqrt{35}-14}{13} = \underline{\underline{-\frac{14}{13}+\frac{4}{13}\sqrt{35}}}$

136. a) $a>0 \quad\rightarrow\quad D=\{a\in\mathbf{R}\,|\,a>0\}$ $\qquad \frac{a^2}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{a^2\cdot\sqrt{a}}{a} = \underline{\underline{a\cdot\sqrt{a}}}$

b) $a>0 \;\wedge\; b>0 \quad\rightarrow\quad D=\{a,b\in\mathbf{R}\,|\,a>0 \;\wedge\; b>0\}$

$\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \frac{a\sqrt{ab^2}-b\sqrt{a^2b}}{ab} = \frac{ab\sqrt{a}-ab\sqrt{b}}{ab} = \frac{\cancel{ab}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\cancel{ab}} = \underline{\underline{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}$

c) $a \geq 0 \quad \wedge \quad b \geq 0 \quad \wedge \quad a \neq b \quad \rightarrow \quad D = \{a, b \in \mathbf{R} | a \geq 0 \quad \wedge \quad b \geq 0 \quad \wedge \quad a \neq b\}$

$$\frac{\overset{(\sqrt{b}+\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{b-a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{b}+\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{(-1)(\sqrt{b}+\sqrt{a})\cancel{(\sqrt{b}-\sqrt{a})}}{\cancel{-\sqrt{a}+\sqrt{b}}} = \underline{\underline{-\sqrt{a}-\sqrt{b}}}$$

oder

$$\frac{b-a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(b-a)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{(-1)\cancel{(b-a)}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\cancel{b-a}} = \underline{\underline{-\sqrt{a}-\sqrt{b}}}$$

d) $x \geq 0 \quad \rightarrow \quad D = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 0\}$

$$\frac{\overset{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{1-x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{\cancel{(1+\sqrt{x})}(1-\sqrt{x})}{\cancel{1+\sqrt{x}}} = \underline{\underline{1-\sqrt{x}}}$$

oder

$$\frac{1-x}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{\cancel{(1-x)}(1-\sqrt{x})}{\cancel{1-x}} = \underline{\underline{1-\sqrt{x}}}$$

f) $m+n > 0 \quad \rightarrow \quad D = \{m, n \in \mathbf{R} | m+n > 0\}$

$$\frac{(m+n)(m-n)}{\sqrt{m+n}} \cdot \frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m+n}} = \frac{\cancel{(m+n)}(m-n) \cdot \sqrt{m+n}}{\cancel{m+n}} = \underline{\underline{(m-n) \cdot \sqrt{m+n}}}$$

137. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{3 \cdot \sqrt{2}}}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 2} = \underline{\underline{7 \cdot \sqrt{6}}}$

e) $\sqrt{12} - \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 4} - \sqrt{3 \cdot 9} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{3} \cdot \underbrace{(\sqrt{4} - \sqrt{9})}_{-1} = \underline{\underline{-\sqrt{3}}}$

h) $\left(3\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{10}\right)=\left(3\sqrt{5}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)=$

$\left[\sqrt{5}\left(3-\sqrt{2}\right)\right]\left[\sqrt{5}\left(2-3\sqrt{2}\right)\right]=\sqrt{5^2}\left(3-\sqrt{2}\right)\left(2-3\sqrt{2}\right)=$

$5\left(6-9\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3\underbrace{\sqrt{2^2}}_{2}\right)=5\left(12-11\sqrt{2}\right)=\underline{\underline{60-55\sqrt{2}}}$

141. a) $\underline{\underline{x\geq 0}} \rightarrow \underline{\underline{D=\{x\in\mathbf{R}|x\geq 0\}}} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{R}_+}}$ (Frommenwiler)

Hinweis: $\mathbf{R}_+$ (Positive Zahlen der Menge **R** einschliesslich der Null)

b) Kommen in einer Gleichung oder Ungleichung Betragsterme vor, so müssen diese mit Hilfe einer Fallunterscheidung erst aufgelöst werden, bevor die endgültige Gleichung oder Ungleichung gelöst werden kann. Wir werden Betragsgleichungen bzw. Betragsungleichungen später im Unterricht behandeln.

Beim Auflösen des Betrages müssen Fallunterscheidungen vorgenommen werden. Ist T(x) ein Term mit der Variablen x, so gilt:

$$|T(x)|=\begin{cases} T(x) & \text{für } T(x)\geq 0 \\ -T(x) & \text{für } T(x)<0 \end{cases}$$

1. Fall: $|+| \rightarrow$ somit gilt $|x|=x \rightarrow \underline{x\geq 0}$

2. Fall: $|-| \rightarrow$ somit gilt $|x|=-x \rightarrow -x\geq 0 \rightarrow \underline{x\leq 0}$

somit: $\underline{\underline{x\geq 0 \vee x\leq 0}} \rightarrow \underline{\underline{D=\mathbf{R}}} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{R}}}$ (Frommenwiler)

c) 1. Fall: $(+)(+)\geq 0 \rightarrow \underline{x\geq 0}$

2. Fall: $(-)(-)\geq 0 \rightarrow \underline{x\leq 0}$

somit: $\underline{\underline{x\geq 0 \vee x\leq 0}} \rightarrow \underline{\underline{D=\mathbf{R}}} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{R}}}$ (Frommenwiler)

d) 1. Fall: $(+)(+)(+)\geq 0 \rightarrow \underline{x\geq 0}$

2. Fall: $(-)(-)(-)\geq 0 \rightarrow$ unmöglich

somit: $\underline{\underline{x\geq 0}} \rightarrow \underline{\underline{D=\{x\in\mathbf{R}|x\geq 0\}}} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{R}_+}}$ (Frommenwiler)

Hinweis: $\mathbf{R}_+$ (Positive Zahlen der Menge **R** einschliesslich der Null)

e) $-x \geq 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x \leq 0}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{D = \{x \in \mathbf{R} | x \leq 0\}}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{R}_-}} \quad$ (Frommenwiler)

Hinweis: $\mathbf{R}_-$ (Negative Zahlen der Menge **R** einschliesslich der Null)

f) $-x \geq 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x \leq 0}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{D = \{x \in \mathbf{R} | x \leq 0\}}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{R}_-}} \quad$ (Frommenwiler)

Hinweis: $\mathbf{R}_-$ (Negative Zahlen der Menge **R** einschliesslich der Null)

g) $\frac{1}{x^2} > 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x^2 > 0}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{D = \{x \in \mathbf{R} \setminus 0\}}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{R}^*}} \quad$ (Frommenwiler)

Hinweis: $\mathbf{R}^*$ (Menge **R** **ohne** die Null $\rightarrow$ 0 ist verboten, weil x im Nenner ist!)

h) $\frac{1}{x^3} > 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x^3 > 0}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{D = \{x \in \mathbf{R} | x > 0\}}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{R}_+^*}} \quad$ (Frommenwiler)

Hinweis: $\mathbf{R}_+^*$ (Positive Zahlen der Menge **R** **ohne** die Null $\rightarrow$ 0 ist verboten, weil x im Nenner ist!)

i) 1. Fall: $|+| \rightarrow |x-2| = x-2 \rightarrow x-2 \geq 0 \rightarrow \underline{x \geq 2}$

2. Fall: $|-| \rightarrow |x-2| = -(x-2) \rightarrow -x+2 \geq 0 \quad \underline{x \leq 2}$

somit: $\underline{\underline{x \geq 2 \vee x \leq 2}} \rightarrow \underline{\underline{D = \mathbf{R}}} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{R}}}$ (Frommenwiler)

j) 1. Fall: $|+| \rightarrow |x+3| = x+3 \rightarrow x+3 \geq 0 \rightarrow \underline{x \geq -3}$

2. Fall: $|-| \rightarrow |x+3| = -(x+3) \rightarrow -x-3 \geq 0 \quad \underline{x \leq -3}$

somit: $\underline{\underline{x \geq -3 \vee x \leq -3}} \rightarrow \underline{\underline{D = \mathbf{R}}} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{R}}}$ (Frommenwiler)

143. a) $u^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{u^{-3}} = \underline{\underline{\sqrt[4]{\frac{1}{u^3}}}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt[4]{u^3}}}}$

d) $5x^{-0.4} = 5x^{-\frac{2}{5}} = 5\sqrt[5]{x^{-2}} = \underline{\underline{5\sqrt[5]{\frac{1}{x^2}}}} = \underline{\underline{\frac{5}{\sqrt[5]{x^2}}}}$

g) $\left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{5}{6}} = \left(n^{-1}\right)^{-\frac{5}{6}} = n^{\frac{5}{6}} = \underline{\underline{\sqrt[6]{n^5}}}$

i) $\frac{1}{a^{-\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{a^2}}}$

147. a) $2\cdot\sqrt[3]{5} + 3\cdot\sqrt[3]{5} = \cdot\sqrt[3]{5}\cdot(2+3) = \underline{\underline{5\cdot\sqrt[3]{5}}}$

f) $5\cdot\sqrt[n]{a} - 8\cdot\sqrt[n]{a} + 2\cdot\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}\cdot(5-8+2) = \underline{\underline{-\sqrt[n]{a}}}$

g) $\sqrt[m]{x} + \sqrt[m]{y}$ $\rightarrow$ kann nicht vereinfacht werden!

148. a) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2^{\frac{4}{4}} = \underline{\underline{2}}$

c) $\sqrt{4^5} = \sqrt{\left(2^2\right)^5} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = \underline{\underline{32}}$

g) $\sqrt[10]{32^6} = \sqrt[10]{\left(2^5\right)^6} = 2^{\frac{30}{10}} = 2^3 = \underline{\underline{8}}$

k) $\sqrt[3]{125^{-2}} = \sqrt[3]{\left(5^3\right)^{-2}} = 5^{\frac{-6}{3}} = 5^{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{25}}}$

m) $\sqrt[6]{\frac{1}{64^5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{\left(2^6\right)^5}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2^{30}}} = \frac{1}{2^5} = \underline{\underline{\frac{1}{32}}}$

149. d) $\sqrt[4]{25x^2y^6} = \sqrt[4]{\left(5xy^3\right)^2} = \underline{\underline{\sqrt{5xy^3}}}$

f) $\sqrt[3k]{u^k} = \underline{\underline{\sqrt[3]{u}}}$

g) $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{3n} = \sqrt[2n]{a^{3n}} = \underline{\underline{\sqrt{a^3}}}$

h) $\sqrt[n+2]{b^{5n+10}} = \sqrt[n+2]{b^{5(n+2)}} = \underline{\underline{b^5}}$ weil $b^{\frac{5(n+2)}{n+2}} = b^5$

j) $\sqrt[5n]{\frac{a^{10}b^5}{c^{20}}} = \sqrt[5n]{\left(\frac{a^2b}{c^4}\right)^5} = \underline{\underline{\sqrt[n]{\frac{a^2b}{c^4}}}}$

150. e) $\sqrt[3]{\underbrace{\left(x-y\right)^2}_{(x-y)^2=(y-x)^2}} : \sqrt[3]{y-x} = \sqrt[3]{\frac{\left(y-x\right)^2}{y-x}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{y-x}}}$

f) $\sqrt[10]{15a^5b^7} : \sqrt[10]{3ab} = \sqrt[10]{\frac{15a^5b^7}{3ab}} = \underline{\underline{\sqrt[10]{5a^4b^6}}}$

h) $\sqrt[5]{y^{n+5}} : \sqrt[5]{y^{n-5}} = \sqrt[5]{\frac{y^{n+5}}{y^{n-5}}} = \sqrt[5]{y^{n+5-n+5}} = \sqrt[5]{y^{10}} = \underline{\underline{y^2}}$

i) $\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b^2}\right) = \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^2b^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{b^3} = \underline{\underline{a - b + \sqrt[3]{\left(ab\right)^2} - \sqrt[3]{ab}}}$

j) $\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}\right)\left(\sqrt[n]{x^k} - \sqrt[n]{y^k}\right) = \underline{\underline{\sqrt[n]{x^{k+1}} - \sqrt[n]{xy^k} - \sqrt[n]{x^ky} + \sqrt[n]{y^{k+1}}}}$

151. a) $$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\frac{3}{10}} = \sqrt[2]{\frac{3}{10}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{10^2}} = \sqrt[4]{\frac{9}{100}} \\ \sqrt[4]{\frac{1}{10}}\end{array}\right\} \rightarrow \underline{\underline{\sqrt[4]{0.1} > \sqrt{0.3}}}$$

152. b) $$2\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{2^4\cdot\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{\frac{16}{8}} = \underline{\underline{\sqrt[4]{2}}}$$

c) $$\frac{1}{3}\cdot\sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^5}}\cdot\sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{\frac{3^3}{3^5}} = \sqrt[5]{\frac{3^3}{3^5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^2}} = \underline{\underline{\sqrt[5]{\frac{1}{9}}}}$$

g) $$\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = (-1)\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = (-1)\cdot\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{2^2}} = -\sqrt[6]{\frac{2^3}{2^2}} = \underline{\underline{-\sqrt[6]{2}}}$$

oder

$$\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = (-1)\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = (-1)\cdot\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}}\cdot\sqrt[3]{2^{-1}} = -\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}}} = -\sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{-\sqrt[3]{\sqrt{2}}}}$$

h) $$\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)^3}\cdot\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\underbrace{\left(1+\sqrt{2}\right)^3}_{\left(1+\sqrt{2}\right)^2\left(1+\sqrt{2}\right)}\left(7+5\sqrt{2}\right)} =$$

$$\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)^2\underbrace{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(7+5\sqrt{2}\right)}_{\text{Distributivgesetz}}} = \sqrt[3]{\underbrace{\left(1+2\sqrt{2}+2\right)\left(7+5\sqrt{2}+7\sqrt{2}+10\right)}_{\text{beide Terme zuerst vereinfachen}}} =$$

$$\sqrt[3]{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(17+12\sqrt{2}\right)} = \sqrt[3]{51+36\sqrt{2}+34\sqrt{2}+48} = \underline{\underline{\sqrt[3]{99+70\sqrt{2}}}}$$

153. c) $$a^2\cdot\sqrt[n]{a^{-2}} = \sqrt[n]{a^{2n}}\cdot\sqrt[n]{a^{-2}} = \sqrt[n]{a^{2n}\cdot a^{-2}} = \underline{\underline{\sqrt[n]{a^{2n-2}}}}$$

e) $$u^2v\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{v}{u}\right)^3} = \sqrt[4]{u^8v^4}\cdot\sqrt[4]{\frac{v^3}{u^3}} = \sqrt[4]{u^8v^4\cdot\frac{v^3}{u^3}} = \underline{\underline{\sqrt[4]{u^5v^7}}}$$

f) $x \cdot \sqrt[n]{x - \frac{1}{x}} = \sqrt[n]{x^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{x^2-1}{x}} = \sqrt[n]{x^n \cdot \frac{x^2-1}{x}} = \underline{\underline{\sqrt[n]{x^{n-1} \cdot (x^2-1)}}} = \underline{\underline{\sqrt[n]{x^{n+1} - x^{n-1}}}}$

154. d) $\sqrt[5]{2^8} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^3} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2^3} = 2 \cdot \sqrt[5]{2^3} = \underline{\underline{2 \cdot \sqrt[5]{8}}}$

h) $\sqrt[5]{5^{-6}} = \sqrt[5]{5^{-5} \cdot 5^{-1}} = \sqrt[5]{5^{-5}} \cdot \sqrt[5]{5^{-1}} = 5^{-1} \cdot \sqrt[5]{5^{-1}} = \underline{\underline{\frac{1}{5} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{5}}}}$

i) $\sqrt[3]{\frac{2^7}{3^{10}}} = \sqrt[3]{\frac{2^6 \cdot 2^1}{3^9 \cdot 3^1}} = \frac{\sqrt[3]{2^6}}{\sqrt[3]{3^9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{2^2}{3^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{4}{27} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}}}}$

155. g) $\sqrt[4]{a^6 - a^5} = \sqrt[4]{a^4 (a^2 - a)} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a^2 - a} = \underline{\underline{a \cdot \sqrt[4]{a^2 - a}}}$

i) $\sqrt[k]{a^{k+3} \cdot b^{3k+2}} = \sqrt[k]{a^k \cdot a^3 \cdot b^{3k} \cdot b^2} = \sqrt[k]{(ab^3)^k \cdot a^3 \cdot b^2} = \sqrt[k]{(ab^3)^k} \cdot \sqrt[k]{a^3 \cdot b^2} = \underline{\underline{ab^3 \cdot \sqrt[k]{a^3 \cdot b^2}}}$

j) $\sqrt[a]{p^{2a} + p^a} = \sqrt[a]{p^a \cdot (p^a + 1)} = \underline{\underline{p \cdot \sqrt[a]{p^a + 1}}}$

156. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3^2 \cdot 3} = \underline{\underline{\sqrt[4]{3^3}}} = \underline{\underline{\sqrt[4]{27}}}$

157. g) $\left(\sqrt[3]{u}\right)^2 \cdot \sqrt[4]{v^6} \cdot \sqrt{u^2 v^3} = \sqrt[3\cdot 2]{u^{2\cdot 2}} \cdot \sqrt[2\cdot 3]{v^{3\cdot 3}} \cdot \sqrt[2\cdot 3]{u^{2\cdot 3} v^{3\cdot 3}} =$

$\sqrt[6]{u^{4+6} v^{9+9}} = \sqrt[6]{u^{10} \cdot v^{18}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{u^5 v^9}}} = \sqrt[3]{u^3 u^2 v^9} = \underline{\underline{uv^3 \cdot \sqrt[3]{u^2}}}$

h) $\frac{\sqrt[3]{xy^2} \cdot \sqrt[4]{x^3 y}}{\sqrt[4]{x^0 y^2 z} \cdot \sqrt[3]{xz^{-2}}} = \frac{\sqrt[12]{x^4 y^8} \cdot \sqrt[12]{x^9 y^3}}{\sqrt[12]{x^0 y^6 z^3} \cdot \sqrt[12]{x^4 z^{-8}}} = \sqrt[12]{\frac{x^4 y^8 \cdot x^9 y^3}{x^0 y^6 z^3 \cdot x^4 z^{-8}}} = \underline{\underline{\sqrt[12]{x^9 y^5 z^5}}}$

158. d) $\left(\sqrt[6]{2}-\sqrt[5]{2}\right)^2=\sqrt[6]{2^2}-2\cdot\underbrace{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[5]{2}}_{\sqrt[30]{2^5}\cdot\sqrt[30]{2^6}}+\sqrt[5]{2^2}=\underline{\underline{\sqrt[3]{2}-2\cdot\underbrace{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[5]{2}}_{\sqrt[30]{2^{11}}}+\sqrt[5]{4}}}$

f) $\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{3}\right)^2=\sqrt[4]{2^2}+2\cdot\underbrace{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{3}}_{\sqrt[8]{2^2}\cdot\sqrt[8]{3}}+\sqrt[8]{3^2}=\underline{\underline{\sqrt{2}+2\cdot\sqrt[8]{12}+\sqrt[4]{3}}}$

j) $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}\right)=$

$\left[\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)^2-\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right]=$

$\sqrt[3]{2^2}+2\cdot\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{4^2}=$

$\underline{\underline{\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{16}}}$

161. e) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{m^5n^{10}}}=\sqrt[15]{m^5n^{10}}=\sqrt[3\cdot\cancel{5}]{m^{\cancel{5}}n^{2\cdot\cancel{5}}}=\underline{\underline{\sqrt[3]{mn^2}}}$

f) $\sqrt[n-1]{\sqrt[n+1]{y^{2n}}}=\underline{\underline{\sqrt[n^2-1]{y^{2n}}}}$

162. j) $t\cdot\sqrt[n]{t^{1-n}\cdot\sqrt[n]{t^{1-n}}}=$

$\sqrt[n^2]{t^{n^2}}\cdot\sqrt[n]{\sqrt[n]{t^{(1-n)\cdot n}}\cdot\sqrt[n]{t^{1-n}}}=$

$\sqrt[n^2]{t^{n^2}}\cdot\sqrt[n]{\sqrt[n]{t^{n-n^2}\cdot t^{1-n}}}=$

$\sqrt[n^2]{t^{n^2}\cdot t^{n-n^2}\cdot t^{1-n}}=$

$\sqrt[n^2]{t^{n^2+n-n^2+1-n}}=\underline{\underline{\sqrt[n^2]{t}}}$

k) $\sqrt{m\cdot\sqrt[3]{m}}\cdot\sqrt[3]{m\cdot\sqrt{m}}\cdot\sqrt[6]{m}=$

$\sqrt{\sqrt[3]{m^3}\cdot\sqrt[3]{m}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m^2}\cdot\sqrt{m}}\cdot\sqrt[6]{m}=$

$\sqrt{\sqrt[3]{m^3\cdot m}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m^2\cdot m}}\cdot\sqrt[6]{m}=$

$\sqrt[6]{m^4}\cdot\sqrt[6]{m^3}\cdot\sqrt[6]{m}=\sqrt[6]{m^{4+3+1}}=\sqrt[6]{m^8}=\sqrt[\cancel{2}\cdot 3]{m^{\cancel{2}\cdot 4}}=\underline{\underline{\sqrt[3]{m^4}}}$

164. a) $\sqrt[4]{x} = 3$ $\quad |(\ )^4$

$\sqrt[4]{x^4} = 3^4$ $\quad$ |Wurzel wegschaffen

$x = 3^4 = \underline{\underline{81}}$

b) $\sqrt[6]{x} = \sqrt{2}$ $\quad |(\ )^6$

$\sqrt[6]{x^6} = \sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$ $\quad$ |Wurzel wegschaffen

$x = \underline{\underline{8}}$

f) $x^{\frac{3}{4}} = 5$ $\quad |(\ )^{\frac{4}{3}}$

$\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{4}{3}}$ $\quad$ |Potenz potenzieren

$x = \underline{\underline{\sqrt[3]{5^4}}}$

h) $\sqrt[n]{x^k} = 7$ $\quad$ |Wurzel als Potenz schreiben

$x^{\frac{k}{n}} = 7$ $\quad$ |Wurzel wegschaffen

$\left(x^{\frac{k}{n}}\right)^{\frac{n}{k}} = 7^{\frac{n}{k}}$ $\quad$ |Potenz potenzieren

$x = \underline{\underline{\sqrt[k]{7^n}}}$

165. g) $\left(\sqrt{10}\right)^x = \sqrt[8]{10}$

$10^{\frac{x}{2}} = 10^{\frac{1}{8}}$

$\frac{x}{2} = \frac{1}{8}$

$x = \frac{2}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

h) $\sqrt[x]{5} = \sqrt[8]{25}$

$5^{\frac{1}{x}} = 5^{\frac{2}{8}}$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad x = \underline{\underline{4}}$

i) $\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x+1]{a}} = \sqrt[20]{a}$

$\frac{a^{\frac{1}{x}}}{a^{\frac{1}{x+1}}} = a^{\frac{1}{20}}$

$a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}} = a^{\frac{1}{20}}$

$\frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{20}$

$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{20}$

$x^2 + x - 20 = 0$

$(x+5)(x-4) = 0$

$x_1 = \underline{-5}$ (Wurzelexponent darf nicht negativ sein) $\vee \quad x_2 = \underline{\underline{4}}$

167. a) $\left(\sqrt[5]{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)^3 \cdot \sqrt[5]{(ab)^4} : \sqrt{a+b} = ?$

$\sqrt[5]{\left(\frac{a+b}{ab}\right)^3} \cdot \sqrt[5]{(ab)^4} : \sqrt[5]{(a+b)^{2.5}} = \sqrt[5]{\frac{(a+b)^3 \cdot (ab)^4}{(ab)^3 \cdot (a+b)^{2.5}}} = \underline{\underline{\sqrt[10]{(a+b) \cdot (ab)^2}}}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt{\frac{b^3}{a}}\left[(ab^3)^{\frac{1}{2}} - (ab^3)^{-\frac{1}{2}}\right]} = ?$

$\sqrt[4]{\frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[(ab^3)^{\frac{1}{2}} - (ab^3)^{-\frac{1}{2}}\right]} = \sqrt[4]{\frac{b^{\frac{3}{2}}}{\cancel{a^{\frac{1}{2}}}} \cdot \cancel{a^{\frac{1}{2}}} \cdot b^{\frac{3}{2}} - \frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{3}{2}}} = \sqrt[4]{b^3 - a^{-1}} = \underline{\underline{\sqrt[4]{b^3 - \frac{1}{a}}}}$

c) $$\frac{x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}} = ?$$

$$\frac{x \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2}}}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}} = x \cdot \sqrt[3]{\frac{\cancel{x+1}}{x^2} \cdot \frac{x}{\cancel{x+1}}} = x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = x \cdot \sqrt[3]{x^{-1}} = x \cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{x^2}}}$$

oder

$$\frac{x \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2}}}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}} = x \cdot \sqrt[3]{\frac{\cancel{x+1}}{x^2} \cdot \frac{x}{\cancel{x+1}}} = x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{x^3 \cdot \frac{1}{x}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{x^2}}}$$

168. a) $$\left(\frac{m}{\sqrt{n}}+\frac{n}{\sqrt{m}}\right):\left(\sqrt{\frac{1}{m}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right) = ?$$

$$\left(\frac{m}{\sqrt{n}}+\frac{n}{\sqrt{m}}\right):\left(\sqrt{\frac{1}{m}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right) = ?$$

$$\left(\frac{m\sqrt{m}+n\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{m}}\right):\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{m}}{\sqrt{n}\sqrt{m}}\right) = \frac{m\sqrt{m}+n\sqrt{n}}{\cancel{\sqrt{n}\sqrt{m}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{n}\sqrt{m}}}{\sqrt{n}+\sqrt{m}} = \underline{\underline{\frac{m\sqrt{m}+n\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}}}$$

oder weiter vereinfacht:

$$\frac{m\sqrt{m}+n\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m^2}\sqrt{m}+\sqrt{n^2}\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m^3}+\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+\sqrt{m}} = \frac{\overbrace{\left(\sqrt{m}\right)^3+\left(\sqrt{n}\right)^3}^{\text{Typ: } a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}}{\sqrt{n}+\sqrt{m}} =$$

$$\frac{\cancel{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)}\left(m-\sqrt{mn}+n\right)}{\cancel{\sqrt{n}+\sqrt{m}}} = \underline{\underline{m-\sqrt{mn}+n}}$$

b) $a \cdot \sqrt[4]{a^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}}} - 2 \cdot \sqrt{a^3 \cdot \sqrt[4]{a^3}} = ?$

$$a \cdot \sqrt[4]{a^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}}} - 2 \cdot \sqrt{a^3 \cdot \sqrt[4]{a^3}} = ?$$

$$a \cdot \sqrt[4]{a^5 \cdot \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}} - 2 \cdot \sqrt{a^3 \cdot a^{\frac{3}{4}}} = a \cdot a^{\frac{5}{4}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{3}{2 \cdot 4}}} - 2 \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4 \cdot 2}} = a^{1+\frac{5}{4}-\frac{3}{8}} - 2 \cdot a^{\frac{3}{2}+\frac{3}{8}} =$$

$$a^{\frac{15}{8}} - 2 \cdot a^{\frac{15}{8}} = -a^{\frac{15}{8}} = \underline{\underline{-\sqrt[8]{a^{15}}}} = -a^{\frac{8}{8}} \cdot a^{\frac{7}{8}} = \underline{\underline{-a \cdot \sqrt[8]{a^7}}}$$

c) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x^{-1}} \cdot \sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[3]{x^{-1} \cdot \sqrt{x^{-1} \cdot \sqrt{x^{-1}}}}} = ?$

$$\frac{\sqrt{x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}}{x \cdot \sqrt[3]{x^{-1} \cdot \sqrt{x^{-1} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}}} = \frac{x^{-\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{4}}}{x \cdot \sqrt[3]{x^{-1} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{4}}}} = \frac{x^{-\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{4}}}{x \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{12}}} =$$

$$x^{-\frac{2}{12}+\frac{3}{12}-\frac{12}{12}+\frac{4}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}} = x^{-\frac{4}{12}} = \underline{\underline{x^{-\frac{1}{3}}}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{x^{-1}}}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}}$$

e) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{a^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt{a^{-8}}}{\sqrt[3]{a^{-5}}}} : \dfrac{\sqrt[6]{a^{\frac{3}{4}}}}{\sqrt[3]{a^2}} = ?$

$$\sqrt{\frac{a^{\frac{1}{12}} \cdot a^{-4}}{a^{-\frac{5}{3}}}} : \frac{a^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{24}} \cdot a^{-2}}{a^{-\frac{5}{6}}} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{8}}} = a^{\frac{1}{24}-2+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{8}} = a^{-\frac{7}{12}} = \underline{\underline{\sqrt[12]{a^{-7}}}} = \underline{\underline{\sqrt[12]{\frac{1}{a^7}}}}$$