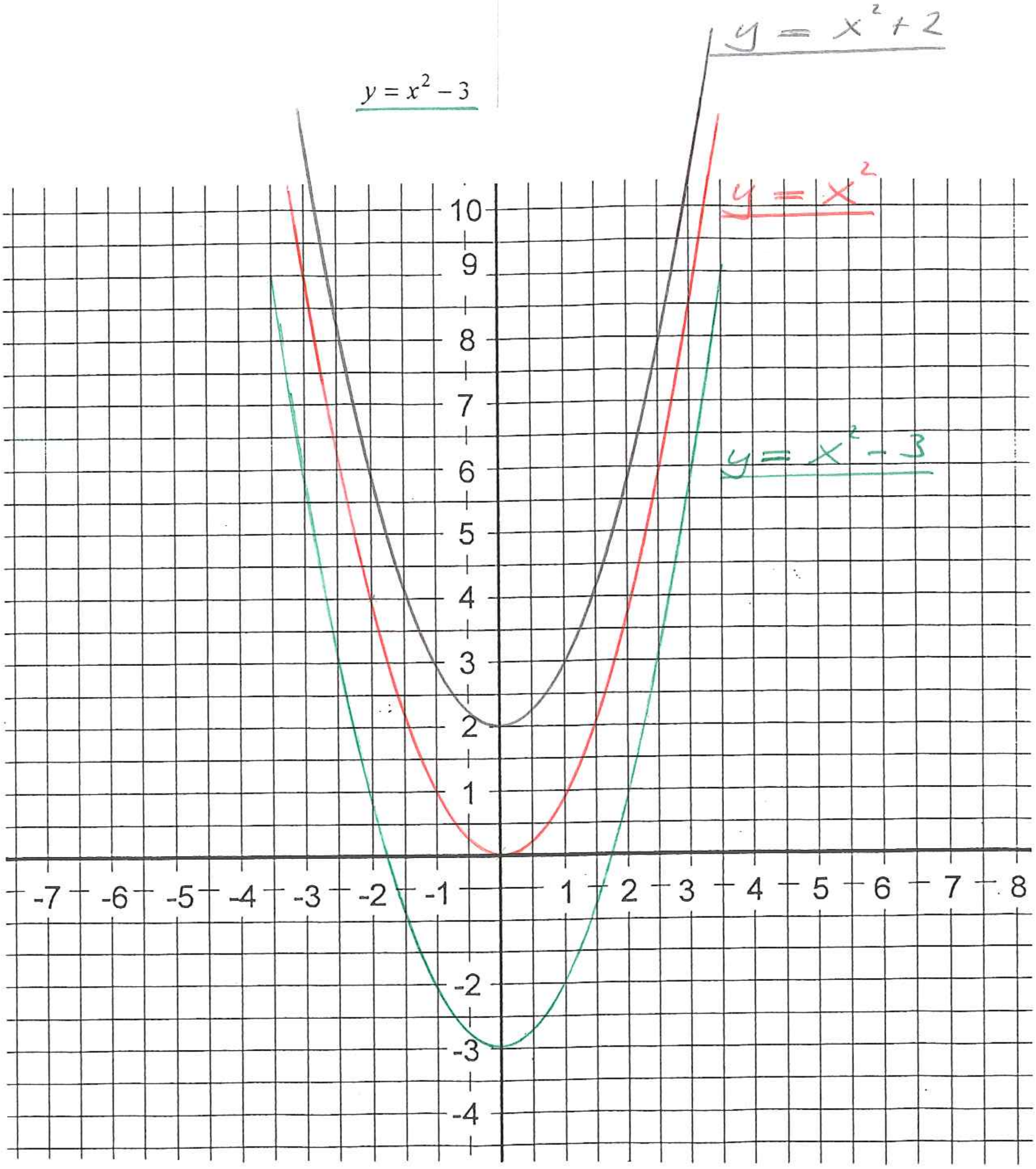
No. 1

Zeichne die Graphen der Funktionen $y = x^2$

$y = x^2 + 2$

$y = x^2 - 3$

Einheiten auf x- und y-Achse jeweils 1 cm!

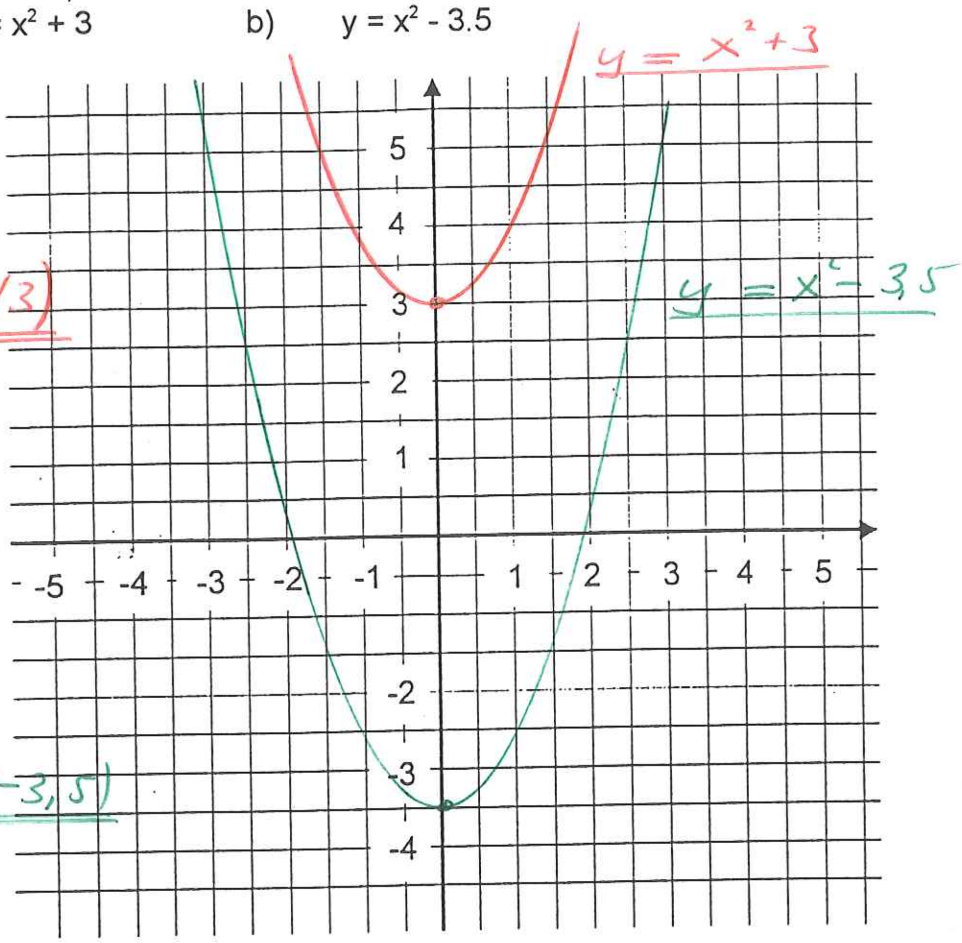


No. 2

Lösen Sie folgende Aufgaben:

1. Zeichnen Sie mit Hilfe der Schablone das Schaubild. Welches ist der kleinste Funktionswert, den die Funktion annehmen kann?

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 3.5$



2. Bestimmen Sie c, so dass das Schaubild der Funktion $y = x^2 + c$ durch P geht. Zeichnen Sie!

a) P (0/1) b) P (2/0) c) P (2/6)

a) $c = 1$

b) $y = x^2 + c$
$0 = 2^2 + c$
$c = -4$

c) $y = x^2 + c$
$6 = 2^2 + c$
$c = 2$

3. P liegt auf dem Schaubild von $y = x^2 - 2$. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate.

a) P (0/?) b) P (-1/?) c) P (0.3/?) d) P (0.5/?)

a) $y = x^2 - 2$
$y = 0 - 2$
P(0/−2)

b) $y = 1 - 2$
$y = -1$
P(−1/−1)

c) P(0,3/−1,91)

d) P(0,5/−1,75)

4. Welche der Punkte liegen auf dem Schaubild von $y = x^2 - 4.5$?

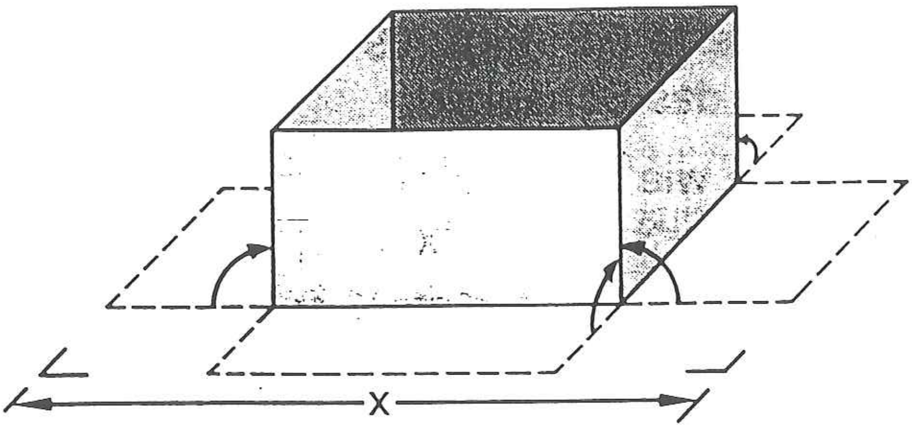
A (1/-3.5) B (3/4.5) C (1/5.5) D (-3/4.5)

$y = x^2 - 4,5$
$-3,5 = 1^2 - 4,5$
$-3,5 = -3,5$ (w)

A B D liegen auf dem Graph

No. 3

In einer Kartonfabrik werden aus quadratischen Platten durch Herausschneiden von 2-dm-Quadraten an den Ecken und Hochklappen der Seitenteile offene Schachteln in Form von quadratischen Säulen hergestellt.



Wie gross ist die Grundfläche einer solchen Säule, wenn das Ausgangsquadrat

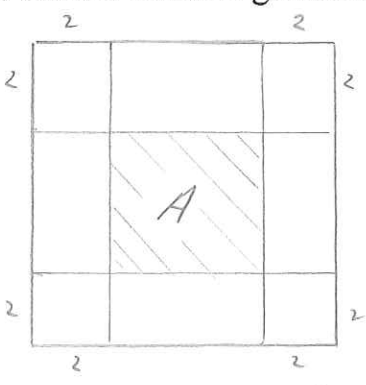
a) 1 m
b) 6 dm
c) x dm lang ist?

Bestimme die Funktionsgleichung: Abhängigkeit des Grundflächeninhaltes von der Länge des Ausgangsquadrates.

$A = f(x) = (x-4)^2$

Stelle diese Funktion grafisch dar. (Einheiten y-Achse und x-Achse jeweils 1 cm).

a)



$A = (10-4)^2$

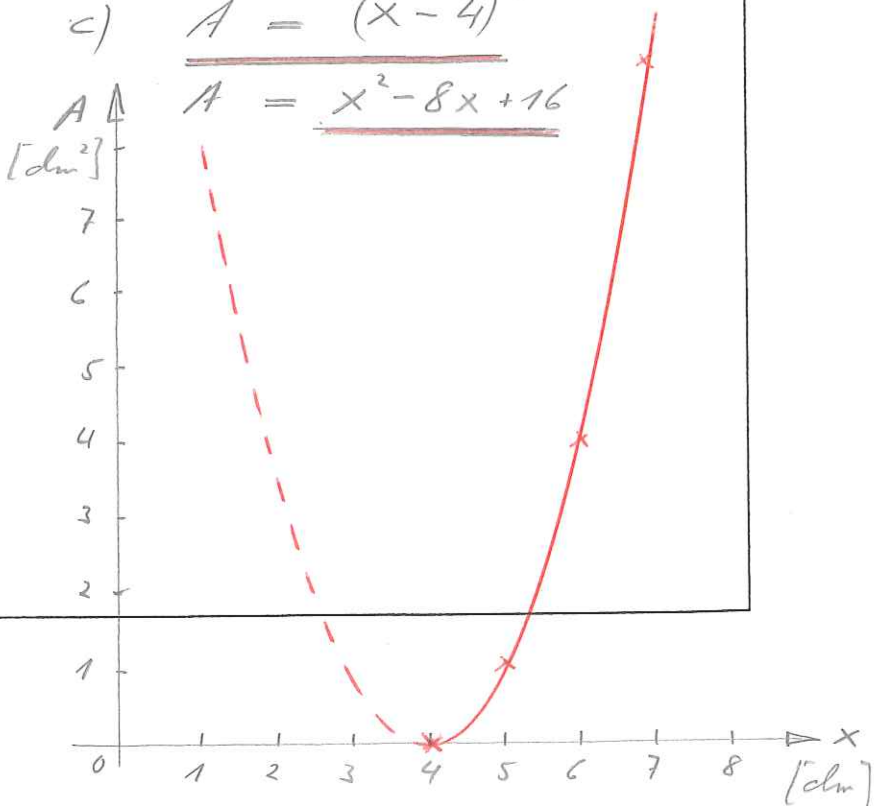
$A = \underline{36\ dm^2}$

b) $A = (6-4)^2$

$A = \underline{4\ dm^2}$

c) $\underline{A = (x-4)^2}$

$A = \underline{x^2 - 8x + 16}$



No. 4

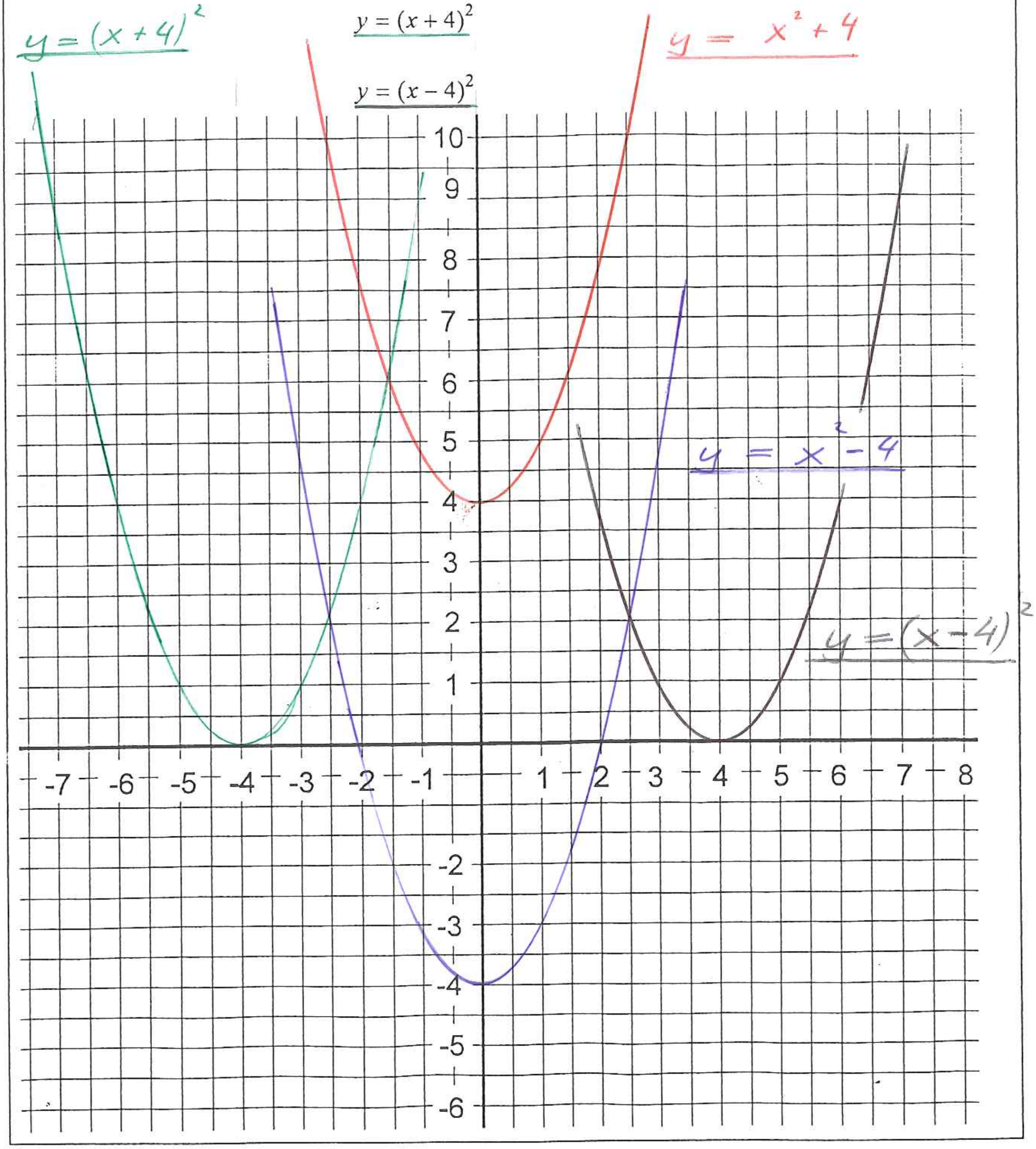
Zeichne die Graphen der Funktionen: $y = x^2 + 4$

$y = x^2 - 4$

$y = (x + 4)^2$

$y = (x - 4)^2$

Einheiten auf x- und y-Achse jeweils 1 cm!



→ bei $x^2 + 4$ oder $x^2 - 4$ gibt es eine Verschiebung auf der y-Achse!

→ bei $(x+4)^2$ o. $(x-4)^2$ Verschiebung auf x-Achse!

No. 5

Lösen Sie folgende Aufgaben:

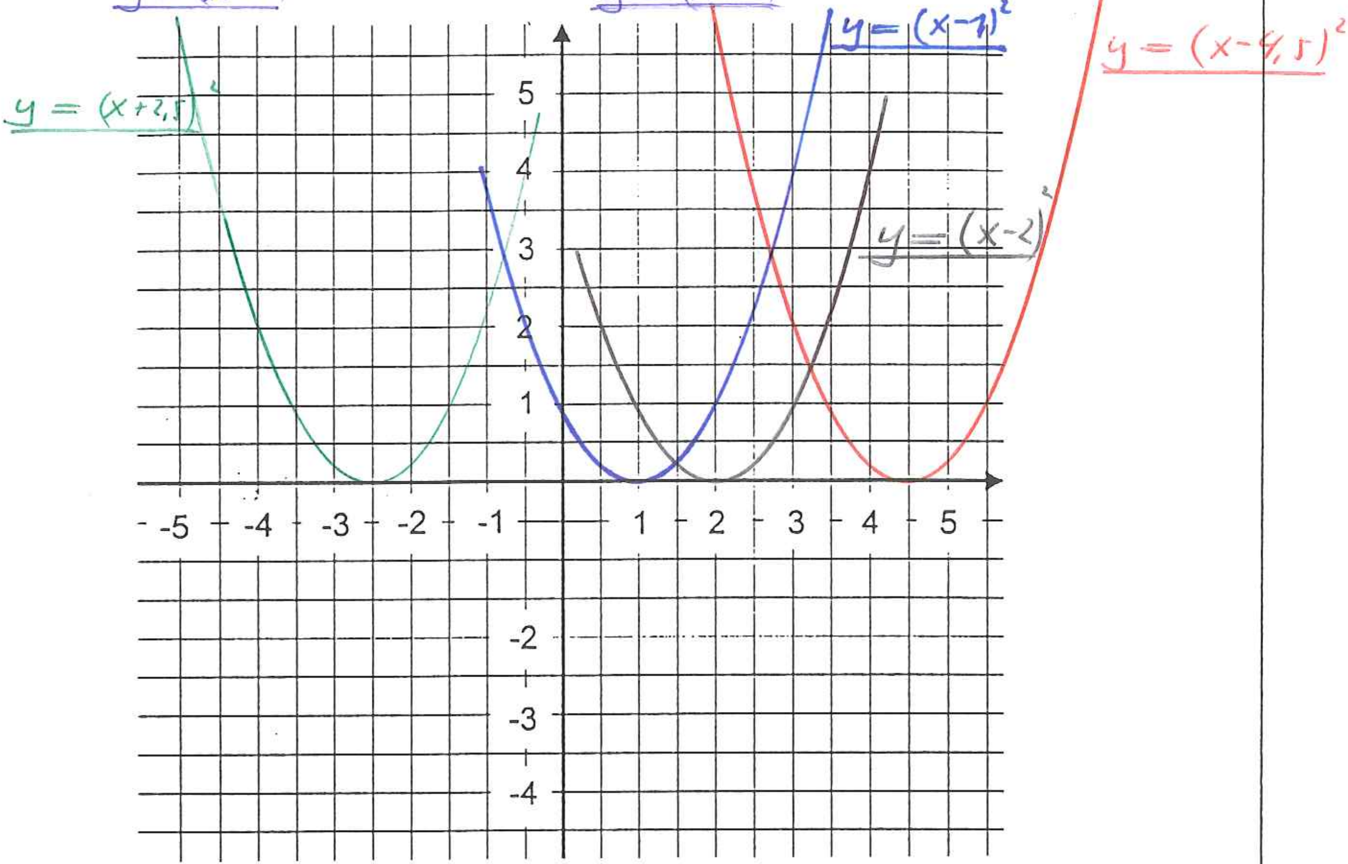
1. Zeichnen Sie die Schaubilder mit Hilfe der Schablone!

a) $y = (x - 4.5)^2$ b) $y = (x + 2.5)^2$

2. Zeichnen Sie die Schaubilder (Schablone). Schreiben Sie zunächst wie in Aufgabe 1.

a) $y = x^2 - 2x + 1$ b) $y = x^2 - 4x + 4$

$y = (x-1)^2$ $y = (x-2)^2$



3. Das Schaubild einer Funktion $y = (x - d)^2$ hat den Scheitel S (2.5/0). Welche Funktionswert nimmt die Funktion für x = 0 (2.5; -5) an?

$y = (x - 2,5)^2$

x	0	2,5	-5
$x - d$	-2,5	0	-7,5
$y = (x-d)^2 =$	6,25	0	56,25

4. Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen x - Wert, für den die beiden Funktionen den gleichen Funktionswert annehmen.

a) $y = (x - 1)^2$ $y = (x + 4)^2$
b) $y = (x - 7.5)^2$ $y = x^2 - 3x + 2.25$
c) $y = (x - 1/3)^2$ $y = x^2$
d) $y = (x - 4)^2$ $y = x^2 - 4$

a) $(x-1)^2 = (x+4)^2$

$\cancel{x^2} - 2x + 1 = \cancel{x^2} + 8x + 16$

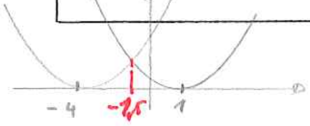
$10x = -15$

$x = -1,5$

b) $x = 4,5$

c) $x = 1/6$

d) $x = 2,5$



No. 6

Erarbeite das Lernprogramm
„Quadratische Ergänzung“

S 1- 4

Lösen Sie folgende Aufgaben:

Frommenwiler Nr. 665 / c, d

c)

$$y = x^2 + 3x + 4$$

$$y = \underbrace{x^2 + 3x + 1{,}5^2}\underbrace{- 1{,}5^2 + 4}$$

$$y = (x + 1{,}5)^2 + 1{,}75$$

$S(-1{,}5/1{,}75)$

d)

$$y = x^2 - 8x - 5$$

$$y = \underbrace{x^2 - 8x + 4^2}\underbrace{- 4^2 - 5}$$

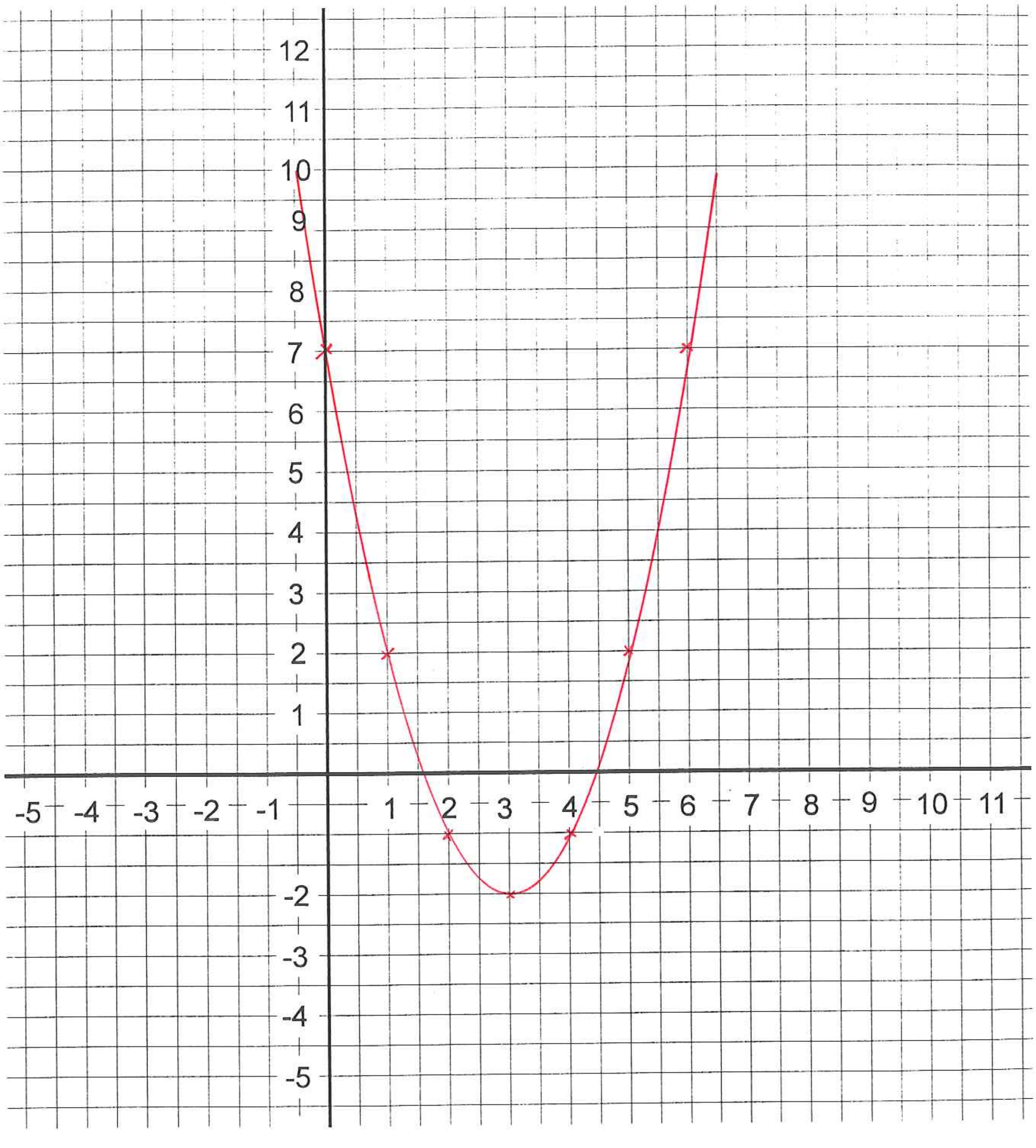
$$y = (x - 4)^2 - 21$$

$S(4/-21)$

Zeichne den Graph der Funktion $y = x^2 - 6x + 7$

Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	14	7	2	-1	-2	-1	2	7	14



Diese Parabel lässt sich aber auch mit Hilfe der Schablone zeichnen. Wie lautet die Funktionsgleichung dazu?

$y = (x-3)^2 - 2$ → Parabel ist 2 cm nach unten verschoben!

Parabel ist 3 cm nach rechts

Es wäre sicher angenehmer (und vor allem schneller), wenn man die Funktionsgleichung

$$y = x^2 - 6x + 7 \qquad (*)$$

so umformen könnte, dass der entsprechende Graph direkt mit der Schablone gezeichnet werden kann. Dazu ist es nötig, die Form (*) in die „schablonenkompatible Form“

$$y = (x + b)^2 + c$$ zu bringen.

Eine kurze Exkursion:

Zerlege die Terme in Faktoren:

$a^2 - 2ab + b^2 =$ $(a-b)^2$

$9x^2 + 24xy + 16y^2 =$ $(3x+4y)^2$

$4u^2 - 25v^2 =$ $(2u-5v)(2u+5v)$

Ergänze die Terme so, dass eine Zerlegung mit einer binomischen Formel vorgenommen werden kann. Führe die Zerlegung durch.

$x^2 + 8x +$ ...16... = ...$(x+4)^2$...

$x^2 + 12x +$ ...36... = ...$(x+6)^2$...

$x^2 + 2x +$ ...1... = ...$(x+1)^2$...

$x^2 - 10x +$ ...25... = ...$(x-5)^2$...

$x^2 - 0{,}6x +$ ...0,9... = ...$(x-0{,}3)^2$...

$x^2 - x +$ ...0,25... = ...$(x-0{,}5)^2$...

$x^2 + 3x +$ ...2,25... = ...$(x+1{,}5)^2$...

$4x^2 + 4xy +$ ...y^2... = ...$(2x+y)^2$...

$9x^2 - 12xy +$ ...$4y^2$... = ...$(3x-2y)^2$...

$25x^2 + 5ax +$ ...$0{,}25a^2$... = ...$(5x+0{,}5a)^2$...

Versuche nun, $y = x^2 - 6x + 7$ in $y = (x - 3)^2 - 2$ überzuführen.

Schaffst Du das, ohne weiterzulesen?

$y = (x^2 - 6x + 9) - 2 = (x-3)^2 - 2$

Eine Hilfe bietet Dir folgender Weg an:

(1) $y = x^2 - 6x + 7$

Rechts wollen wir etwas Raum schaffen.

(2) $y = x^2 - 6x +$ .... $+7$

(3) $y = x^2 - 6x +$ ... $\boxed{+2}$ .. $\boxed{-2}$ .... $+7$

Man darf bei dieser Gleichung auf der rechten Seite eine beliebige Zahl (zB. 2) addieren. Damit sich der Wert nicht ändert, muss diese Zahl allerdings wieder subtrahiert werden.

(4) $y = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 7$

2 addieren bringt nicht besonders viel. Interessanter wäre eine Zahl, welche in einem Binom weiterverwendet werden kann.

⇨ es muss mit der Hälfte des Koeffizienten des mittleren Gliedes im Quadrat ergänzt werden.

(5) $y = (x - 3)^2 \; \underbrace{-9 \; +7}$

(6) $y = (x-3)^2 - 2$ ⇒ Scheitelform

Man nennt dieses Verfahren „Quadratische Ergänzung“.

Alles klar?

ja

~~nein~~

Studieren Sie im Mathematikbuch o. arbeiten Sie das Leitprogramm Quadrarische Gleichungen durch.

Ergänze quadratisch:

$y = x^2 + 4x + 5$

$y = \underbrace{x^2 + 4x + 4}\underbrace{-4 + 5}$

$y = (x+2)^2 + 1$

No. 7

Lösen Sie folgende Aufgaben:

1. Geben Sie den Scheitel des Schaubildes an.

a) $y = (x - 6)^2 + 1$ b) $y = (x - 4)^2 - 2$ c) $y = (x + 3.5)^2$ d) $y = x^2 - 1.5$

S(6/1) S(4/-2) S(-3,5/0) S(0/-1,5)

2. Welches ist der kleinste Funktionswert, den die Funktion annehmen kann? Für welchen x - Wert nimmt sie ihn an?

a) $y = (x - 20)^2 + 9$ b) $y = (x + 5)^2 - 1$ c) $y = (x + 0.2)^2$ d) $y = (1.5 + x)^2$

$y_s = 9$ $y_s = -1$ $y_s = 0$ $y_s = 0$

$x_s = 20$ $x_s = -5$ $x_s = -0,2$ $x_s = -1,5$

3. Das Schaubild einer Funktion $y = x^2 + bx + c$ hat den Scheitel S. Geben Sie die Zuordnungsvorschrift (zunächst in der Form $y = (x - d)^2 + e$) an.

a) S (1/2) b) S (4/-3) c) S (-5/1)

$y = (x-1)^2+2$ $y = (x+5)^2+1$

$y = (x-4)^2-3$

4. Schreiben Sie die Funktion in der Form $y = (x - d)^2 + e$. ~~Erstellen Sie für 9 ganzzahlige x-Werte eine Wertetabelle; beginnen Sie mit dem Scheitel; beachten Sie die Symmetrie.~~ 2

a) $y = x^2 +10x + 1$ b) $y = x^2 - 4x + 1$ c) $y = x^2 - 6x - 10$ d) $y = x^2 - 12x + 4$

a) $y = (x+5)^2-24$ c) $y = (x-3)^2-19$

b) $y = (x-2)^2-3$ d) $y = (x-6)^2-32$

5. Bestimmen Sie den Scheitel des Schaubildes. Für welches x nimmt die Funktion ihren kleinsten Funktionswert an? Wie gross ist dieser?

a) $y = x^2 - 8x + 10$ b) $y = x^2 + x + 1$ c) $y = x^2 - x + 1$

a) $y = (x-4)^2-6$ b) $y = (x+0,5)^2+0,75$

S(4/-6) S(-0,5/0,75)

$x_s = 4$

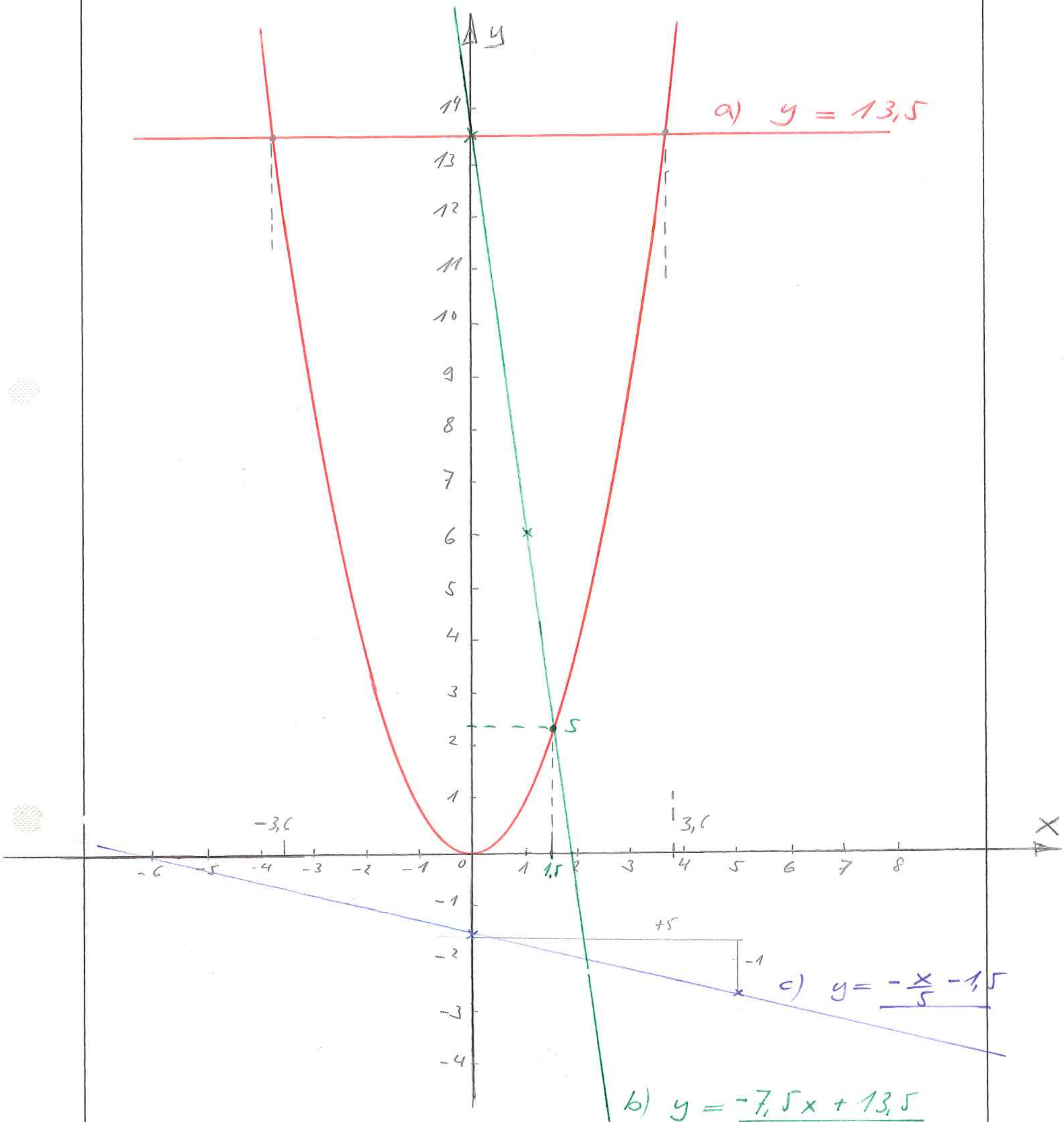
$y_s = -6$

c) $y = (x-0,5)^2+0,75$

S(0,5/0,75)

Frommenwiler: Nr. 685 a+c

No. 9



a) $x^2 = 13,5 \longrightarrow y = x^2$ und $y = 13,5$

b) $x^2 = -7,5x + 13,5 \longrightarrow y = x^2 \wedge y = -7,5x + 13,5$

c) $x^2 = \frac{-x}{5} - 1,5 \longrightarrow y = x^2 \wedge y = \frac{-x}{5} - 1,5$

Lösungen: a) $x_1 = 3,6$ b) $x_1 = 1,5$ c) keine Lösung!

$x_2 = -3,6$ $x_2 = -9$ ↓ Rückseite

No. 10

Freier Fall

Ein Stein fällt im freien Fall.

1) Erstelle eine Wertetabelle für die Abhängigkeit der Fallstrecke von der Fallzeit.

$s = \frac{t^2 \cdot g}{2}$

2) Zeichne den Graphen dazu.

$g \sim 10 \frac{m}{s^2}$

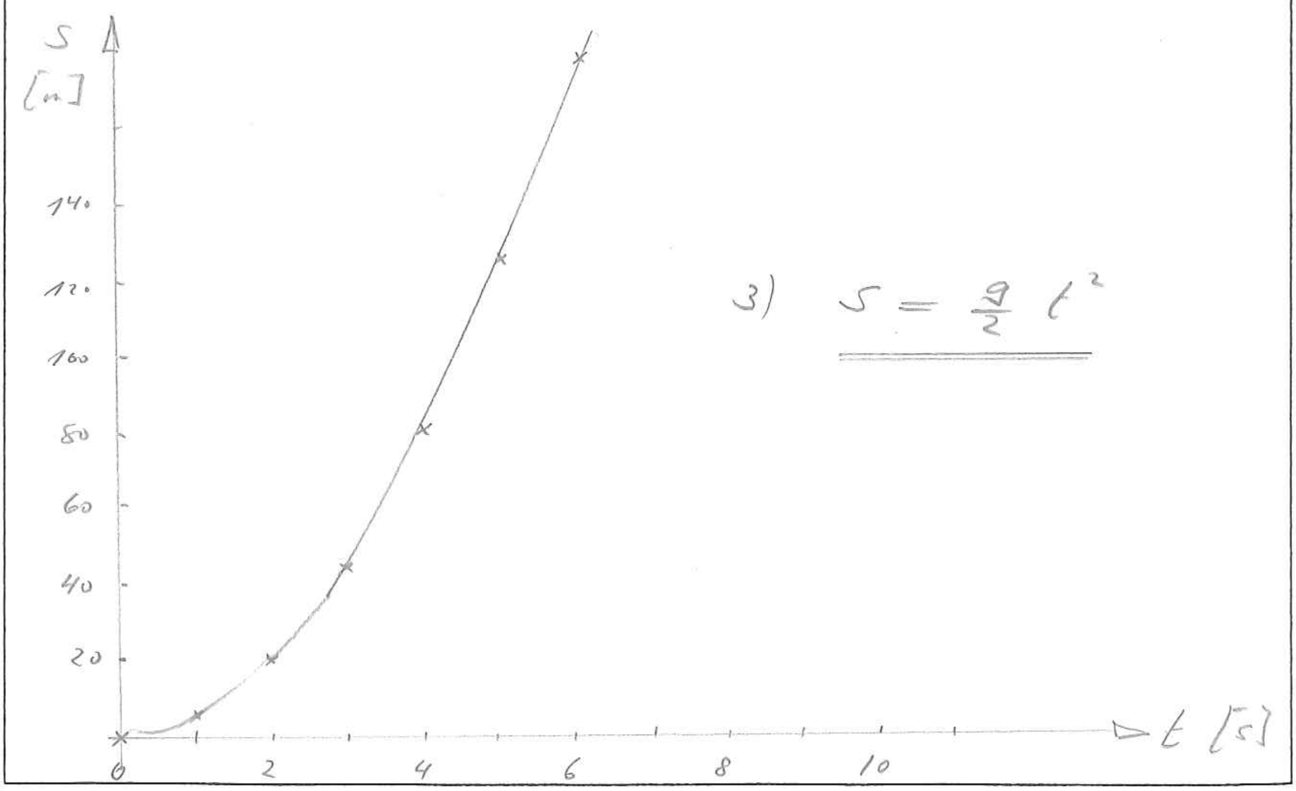
3) Wie lautet die Funktionsgleichung für die Abhängigkeit der Fallstrecke von der Fallzeit.

4) ~~Wenn Du Dir die Einheit des Faktors vor t überlegst, erkennst Du wahrscheinlich, woher dieser Faktor stammt.~~ ?

1)

t [s]	0	1	2	3	4	5	6	7
s [m]	0	5	20	45	80	125	180	245

2)



3) $\underline{\underline{s = \frac{g}{2} t^2}}$

No. 11

Zeichne die Graphen der Funktionen:

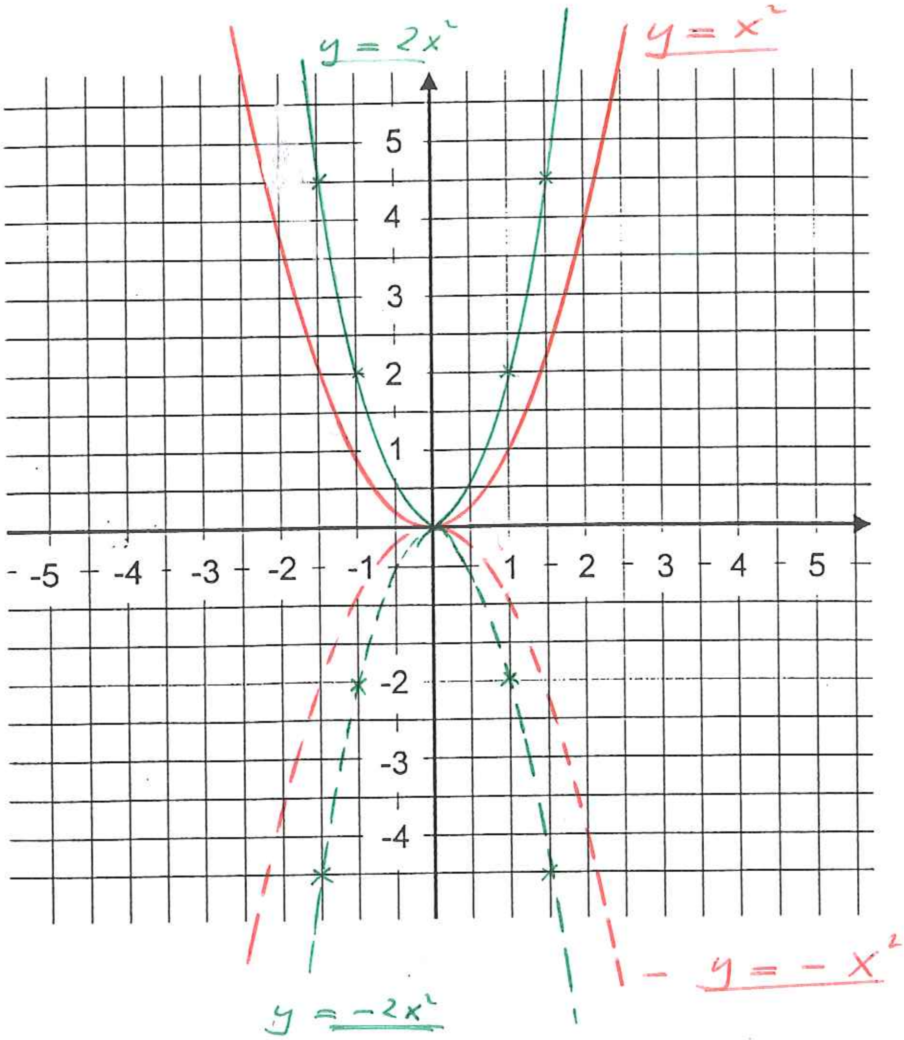
$y = x^2$

$y = -x^2$

$y = 2x^2$

$y = -2x^2$

Einheiten auf x- und y-Achse jeweils 1 cm!



Die quadratische Ergänzung von $y = 3x^2 - 6x + 5$

(1) $y = 3x^2 - 6x + 5$ — Wenn vor x^2 der Koeffizient 3 nicht wäre, ginge es wie bisher. Wie bringt man diese 3 weg?

(2) $y = 3\,[x^2 - 2x + 5/3]$ — 3 ausklammern

(3) $y = 3\,[\underbrace{x^2 - 2x + (1)^2}\ \underbrace{-(1)^2 + 5/3}]$ — quadratisch ergänzen

(4) $y = 3\,[\ (x-1)^2\ \underbrace{-\ 1 + 5/3}\ ]$ — Binom bilden

(5) $y = 3\,[\ (x-1)^2\ +\ 2/3\ ]$ — ausmultiplizieren

(6) $\underline{y = 3\,(x-1)^2 + 2}$ => **Scheitelform**

$$\boxed{y = a(x - x_s)^2 + y_s}$$

Die quadratische Ergänzung von $y = -2x^2 + 8x - 7$

(1) $y = -2x^2 + 8x - 7$

(2) $y = -2[x^2 - 4x + 3{,}5]$ — -2 ausklammern

(3) $y = -2\,[\underbrace{x^2 - 4x + 2^2}\ \underbrace{-2^2 + 3{,}5}]$ — quadr. ergänzen

(4) $y = -2[(x-2)^2 - 0{,}5]$ — Binom bilden

(5) — ausmultiplizieren

(6) $y = \underline{\underline{-2(x-2)^2 + 1}}$ — SF / Scheitelform

No. 13

Lösungen

Funktionen der Form $x \mapsto ax^2 + bx + c$

$S(1/-4)$

3

a) $x \mapsto 2(x^2-2x-1)$; $S(1|4)$
$2(x-1)^2-4$

b) $x \mapsto 3(x^2+2x-1)$; $S(-1|-6)$
$3(x+1)^2-6$

c) $x \mapsto -2(x^2+2x-2)$; $S(-1|6)$
$-2(x+1)^2+6$

d) $x \mapsto -\frac{1}{2}(x^2-2x)$; $S(1|\frac{1}{2})$
$-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$

4

a) $x \mapsto 2(x^2+2x+3)$; $S(-1|4)$
$2(x+1)^2+4$

b) $x \mapsto 4(x^2+3x+4)$; $S(-1{,}5|7)$
$4(x+1{,}5)^2+7$

c) $x \mapsto -2(x^2+2x-4)$; $S(-1|10)$
$-2(x+1)^2+10$

d) $t \mapsto 3(t^2+4t-1)$; $S(-2|-15)$
$3(t+2)^2-15$

e) $x \mapsto -(x^2-2x+4)$; $S(1|-3)$
$-(x-1)^2-3$

f) $t \mapsto -5(t^2-2t-1)$; $S(1|10)$
$-5(t-1)^2+10$

g) $x \mapsto (x+1)^2-1$; $S(-1|-1)$

h) $x \mapsto -3(x^2-2x)$; $S(1|3)$
$-3(x-1)^2+3$

i) $a \mapsto 6(a^2+10a-5)$; $S(-5|-180)$
$6(a+5)^2-180$

5

a)	Für $x=1{,}5$	Min. 3,5
b)	für $x=-1$	Min. -5
c)	für $x=2$	Max. 2
d)	für $x=-1$	Min. 0
e)	für $x=-1$	Min. 9,5
f)	für $x=1$	Min. -10
g)	für $x=5$	Min. -3
h)	für $x=-1$	Min. 0,9
i)	für $x=0{,}125$	Max. 4,0125

6

a)	Für $x=7$	Min. 17
b)	für $x=-4$	Max. -9
c)	für $x=0$	Min. 20
d)	für $x=4{,}5$	Min. $-20{,}25$
e)	für $x=4{,}5$	Max. 20,25
f)	für $x=6$	Max. 16
g)	für $x=-0{,}25$	Max. 0,05
h)	für $x=1$	Min. 0
i)	für $x=-5$	Min. $-1{,}5$

7

a) $S(2|-5)$ b) $S(3|1)$ c) $S(-2|-5)$ d) $S(5|-13{,}5)$ e) $S(4|16)$
f) $S(0|3)$ g) $S(-3|-4{,}2)$ h) $S(4|0)$ i) $S(1|8{,}5)$

8

a) $S(5|-17)$; das Schaubild steigt für $x \geqq 5$ und fällt für $x \leqq 5$. $\Rightarrow$ $x > 5$ u. $x < 5$
b) $S(-6|-21)$; das Schaubild steigt für $x \geqq -6$ und fällt für $x \leqq -6$.
c) $S(-\frac{1}{3}|\frac{2}{3})$; das Schaubild steigt für $x \geqq -\frac{1}{3}$ und fällt für $x \leqq -\frac{1}{3}$.
d) $S(2|4)$; das Schaubild steigt für $x \leqq 2$ und fällt für $x \geqq 2$.
e) $S(-10|-5)$; das Schaubild steigt für $x \geqq -10$ und fällt für $x \leqq -10$.
f) $S(0|4)$; das Schaubild steigt für $x \leqq 0$ und fällt für $x \geqq 0$.
g) $S(\frac{1}{5}|0)$; das Schaubild steigt für $x \leqq \frac{1}{5}$ und fällt für $x \geqq \frac{1}{5}$.
h) $S(-24{,}5|-79{,}75)$; das Schaubild steigt für $x \geqq -24{,}5$ und fällt für $x \leqq -24{,}5$.
i) $S(\frac{1}{2}|\frac{1}{3})$; das Schaubild steigt für $x \geqq \frac{1}{2}$ und fällt für $x \leqq \frac{1}{2}$.

9

a) $S(5|41)$ b) $S(1|1)$ und $P(0|0)$ c) $S(1|3)$
d) $S(5|-1)$ und $P(3|-1)$ e) $S(-2|1)$ und $P(-1|0)$ f) $S(0|-4)$ und $P(3|5)$

10

a) $S(-2|5)$ b) $S(2|-10)$ c) $S(\frac{1}{5}|\frac{1}{75})$ d) Es gibt keinen Schnittpunkt.

Quadratische Funktionen II

Lernschritt **LS 1**

Erinnern Sie sich:
Eine Gerade wird durch 2 Punkte festgelegt, d.h. wenn 2 Punkte einer Geraden bekannt sind, so kann die Gerade gezeichnet werden.

Die Normalform (allgemein) einer Geradengleichung lautet:

$$y = f(x) = m \cdot x + b$$

Aus dieser allgemeinen Normalform der Geradengleichung (lineare Funktion) wird dann eine spezielle Funktionsgleichung für eine genau bestimmte Gerade im Koordinatensystem, wenn an den Stellen m und b zugehörige Zahlen stehen.

Quadratische Funktionen II

Lernschritt **LS 2**

Die Gleichung einer Funktion 2. Ordnung (quadratische Funktion) lautet in Polynomform z.B.:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Aus dieser allgemeinen Funktionsgleichung der quadratischen Funktion wird dann eine spezielle Funktionsgleichung für eine ganz genau bestimmte Parabel im Koordinatensystem, wenn an den Stellen a , b und c die zugehörigen Zahlen stehen.

Genauso, wie eine Gerade durch 2 Punkte festgelgt wird, wird eine quadratische Parabel durch 3 Punkte festgelegt.

Quadratische Funktionen II

Lernschritt **LS 3**

Von einer quadratischen Parabel sind drei Punkte $P_1\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, $P_2(-4, 2)$ und $P_3(2, 2)$ bekannt. Es soll die Funktionsgleichung der durch diese drei Punkte verlaufenden Parabel bestimmt werden.

Sie erinnern sich sicher noch an die linearen Funktionen:
Wenn bekannt ist, daß ein Punkt P auf einer Geraden liegt, so müssen die Koordinaten dieses Punktes P die Geradengleichung (Funktionsgleichung) erfüllen, d.h. die Koordinaten dieses Punktes können an der Stelle x und an der Stelle y in die Funktionsgleichung dieser Geraden eingesetzt werden.

Ebenso gilt:
Wenn bekannt ist, daß ein Punkt auf einer Parabel liegt, so müssen die Koordinaten dieses Punktes die Fkt. Gleichung der Parabel erfüllen.

Quadratische Funktionen II

Lernschritt **LS 4**

Die Funktionsgleichung einer Funktion zweiter Ordnung (quadratische Funktion) in Polynomform lautet allgemein:

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Die Koordinaten des Punktes $P_1\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ werden in diese Polynomform eingesetzt:

$$P_1\left(1; -\frac{1}{2}\right) \Big| -\frac{1}{2} = f(1) = a \cdot (1)^2 + b \cdot (1) + c$$

also: $\underline{-\frac{1}{2} = a + b + c}$ I. Gleichung

Die Koordinaten des Punktes $P_2(-4, 2)$ werden in die Polynomform eingesetzt.

$$P_2(-4, 2) \Big| 2 = f(-4) = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c$$

also: $\underline{2 = 16a - 4b + c}$ II. Gleichung / $2 = 16a - 4b + c$

Quadratische Funktionen II

Lernschritt **LS 5**

Die Koordinaten des Punktes P_3 (2 , 2) werden in die Polynomform eingesetzt.

P_3 (2 , 2): $2 = f(2) = a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + c$

$2 = 4a + 2b + c$ III. Gleichung

Quadratische Funktionen II

Lernschritt **LS 6**

Diese drei Gleichungen bilden ein Gleichungssystem mit den drei Variablen:

a , b und c

Ein solches Gleichungssystem kann mit Hilfe von drei Verfahren gelöst werden.

Die Verfahren heißen:

1. Additionsverfahren
2. Gleichsetzungsverfahren
3. Einsetzungsverfahren

Hier wird das Additionsverfahren zur Anwendung kommen.

Das Gleichungssystem lautet:

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2} &= a + b + c && \text{Gl. I.}\\
\wedge\ 2 &= 16a - 4b + c && \text{Gl. II.}\\
\wedge\ 2 &= 4a + 2b + c && \text{Gl. III.}
\end{aligned}
$$

Quadratische Funktionen II

Lernschritt **LS 7**

Das Prinzip der Lösung mit Hilfe des Additionsverfahrens beruht darauf, daß durch Addition von jeweils zwei der drei Gleichungen, also z.B. Gl. I + Gl. II, oder Gl. I + Gl. III oder Gl. II + Gl. III eine der Variablen zu Null wird und damit wegfällt.

z.B. so :

$$
\begin{aligned}
\text{Gl. I}: &\quad -\tfrac{1}{2} = a + b + c\\
\text{Gl. II}: &\quad 2 = 16a - 4b + c \;|\cdot(-1)
\end{aligned}
$$

Die zweite Gleichung wird hier mit (— 1) multipliziert, damit die Variable c bei der anschließenden Addition der beiden Gleichungen wegfällt.

$$
\begin{aligned}
\text{Gl. I} &\quad -\tfrac{1}{2} = a + b + c\\
\text{Gl. II} &\quad -2 = -16a + 4b - c \;|\; +\\
&\quad -2\tfrac{1}{2} = -15a + 5b\\
\text{Gl. I/II} &\quad -\tfrac{5}{2} = -15a + 5b
\end{aligned}
$$

Auf diese Weise entsteht eine neue Gleichung, kombiniert aus Gl. I und Gl. II, in der nur noch die Variablen a und b vorkommen.

Quadratische Funktionen II

Lernschritt **LS 8**

Das gleiche Verfahren wird jetzt mit den Gleichungen I und III ausgeführt. (Es geht selbstverständlich auch mit den Gleichungen II und III)

$$
\begin{aligned}
\text{Gl. I}: &\quad -\tfrac{1}{2} = a + b + c\\
\text{Gl. III}: &\quad 2 = 4a + 2b + c \;|\cdot(-1)
\end{aligned}
$$

Gl. III muß erst mit (−1) multipliziert werden, damit bei der anschließenden Addition der beiden Gleichungen ebenfalls die Variable c herausfällt.

also :

$$
\begin{aligned}
\text{Gl. I}: &\quad -\tfrac{1}{2} = a + b + c\\
\text{Gl. III}: &\quad -2 = -4a - 2b - c \;|\; +\\
\text{Gl. I/III}: &\quad -5/2 = -3a - b
\end{aligned}
$$

Auch diese neue Gleichung, kombiniert aus den Gleichungen I und II, enthält nur noch die Variablen a und b.

Quadratische Funktionen II

Lernschritt **LS 9**

Die beiden neuen kombinierten Gleichungen I/II und I/III werden wieder untereinander geschrieben und das oben beschriebene Verfahren wiederholt:

Gl. I/II : $-\frac{5}{2} = -15a + 5b \mid :5$

Gl. I/III : $-\frac{5}{2} = -3a - b$

Um die Variable b durch Addition der beiden Gleichungen zu eliminieren, kann entweder vorher die obere Gleichung durch 5 dividiert oder die untere Gleichung mit 5 multipliziert werden. Im vorliegenden Beispiel wird die obere Gleichung durch 5 dividiert, damit die Zahlenwerte so klein wie möglich gehalten werden. Anschließend werden beide Gleichungen addiert.

also: Gl. I/II : $-\frac{1}{2} = -3a + b$

Gl. I/III : $-\frac{5}{2} = -3a - b$

$-3 = -6a$

Die so entstandene Gleichung, in der nur noch die Variable a vorkommt, wird anschließend äquivalent nach a umgeformt.

$a = \frac{1}{2}$

Quadratische Funktionen II

Lernschritt **LS 10**

Zur Bestimmung der weiteren Variablen b und c setzt man den für a ermittelten Wert $\frac{1}{2}$ in eine der kombinierten Gleichungen I/II oder I/III, in der nur noch eine andere Variable, nämlich b vorkommt, so ein, daß durch anschließendes äquivalentes Umformen eine weitere Variable ermittelt wird. (hier b)

An dieser Stelle wird z.B. die kombinierte Gleichung I/II verwendet und $a = \frac{1}{2}$ darin eingesetzt. (Man hätte natürlich genauso $a = \frac{1}{2}$ in die Gleichung I/III einsetzen können)

Gl. I/II : $-\frac{1}{2} = -3a + b\,;\ a = \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} = -3\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + b$

$-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + b$

$b = 1$

Quadratische Funktionen II

Lernschritt **LS 11**

Die letzte noch ausstehende Variable c kann man ermitteln, indem man die schon für a und b bestimmten Zahlenwerte in eine der Anfangsgleichungen an den Stellen a und b einsetzt.

Hier werden z.B. a und b in die Gleichung III eingesetzt.

Gl. III $2 = 4a + 2b + c$

$a = \frac{1}{2}\,;\ b = 1$

also: $2 = 4\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot 1 + c$

$c = -2$

Die so ermittelten Zahlenwerte für $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ und c -2 werden nun in die Polynomform der Funktionsgleichung der quadratischen Funktion eingesetzt:

Polynomform : $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

also : $y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 1 \cdot x + (-2)$

Damit heißt die Funktionsgleichung : $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$

Lernschritt
LS 17

Bei allen Funktionen ist es üblich, auch die Achsenschnittpunkte ihrer Graphen zu bestimmen. Der Schnittpunkt P_y mit der y-Achse (Ordinatenachse) ergibt sich durch Ablesen des absoluten Gliedes (Glied ohne x) aus der Polynomform:

$$y = f(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

Das absolute Glied der Funktionsgleichung lautet: -5

Damit heißt der Schnittpunkt mit der Ordinatenachse:

$P_y(0, -5)$

Schnittpunkte mit der Abszissenachse (x-Achse) werden bestimmt, indem man den Funktionsterm $y = f(x)$ gleich Null setzt. Das kann mit der Scheitelpunktform oder mit der Polynomform geschehen, also entweder:

$y = f(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - 5\frac{1}{3} = 0$ oder $y = f(x) = 3x^2 - 2x - 5 = 0$

Es muß also eine quadratische Gleichung gelöst werden. Hier wird dazu die Scheitelpunktform gewählt.

Lernschritt
LS 18

$$y = f(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} = 0$$

$$3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} = 0$$

Äquivalente Umformung, um den Faktor 3 zu beseitigen.

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} = 0$$

Zur Bildung des dritten Binoms benötigt man die Differenz zweier Quadrate $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

also hier: $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 0$

Lernschritt
LS 19

Faktorisieren nach der dritten binomischen Formel:

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 0$$

also: $\left(x + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) = 0$

In den Klammern wird zusammengefaßt:

$$\left(x - 1\right) \cdot \left(x + \frac{5}{3}\right) = 0$$

damit ist: $x - 1 = 0 \lor x + \frac{5}{3} = 0$

also: $x_1 = 1$; $x_2 = -5/3$

Die Schnittpunkte mit der Abszissenachse heißen:

$P_{x_1}(1, 0)$; $P_{x_2}(-5/3, 0)$

Lernschritt
LS 20

Wenden Sie nun die erworbenen Kenntnisse auf eine Übungsaufgabe an:

Von der Funktion mit $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$ sollen ermittelt werden:

a) die Scheitelpunktform

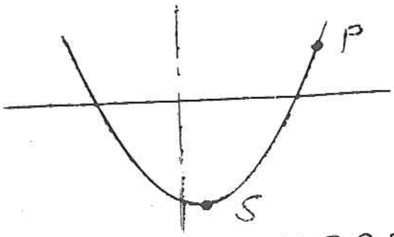
b) der Scheitelpunkt S

c) die Achsenschnittpunkte P_y, P_{x_1} und P_{x_2} und

d) Zeichnen Sie den Graphen im Koordinatensystem mit Hilfe der zu vervollständigenden Wertetabelle (auf einem gesonderten Blatt)

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−5½	−2	½	2	2½	2	½	−2	−5½

No. 18



Quadratische Funktionen

Aufgabe
Die Punkte liegen auf Parabeln (S = Scheitelpunkt, P,Q,R sind Punkte auf der Parabel).
Gib jeweils die Funktionsgleichung an.

$y = a(x - x_0)^2 + b$

1) S(0/2) P(2/4) y =

$y = a(x - 0)^2 + 2$

$4 = a(2 - 0)^2 + 2$

$4 = 4a + 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x^2 + 2$

2) S(-4/6) P(-2/2)

$y = -(x+4)^2 + 6$

3) S(4/2) P(6/1) y = $-\frac{1}{4}(x-4)^2 + 2$

4) S(4/4) P(0/-4) y = $-\frac{1}{2}(x-4)^2 + 4$

5) S(-2/8) P(6/0) y = $-\frac{1}{8}(x+2)^2 + 8$

6) P(-2/0) Q(0/-4) R(2/0) y = $x^2 - 4$

7) P(-3/2) Q(-2/0) R(0/8) y = $2(x+2)^2$

8) P(0/4) Q(4/0) R(-4/0) y = $-\frac{1}{4}x^2 + 4$

No 18

1) $y = a(x - x_0)^2 + b$

$y = a(x-0)^2 + 2 \Leftarrow (P \Rightarrow (2/4)$

$4 = a(2-0)^2 + 2$

$4 = 4a + 2$

$2 = 4a \Rightarrow a = 1/2$ $\quad y = \frac{1}{2}(x -$

$\underline{y = \frac{1}{2}x^2 + 2}$

2) $y = a(x - x_0)^2 + b$ $\quad S(-4/6)$ einsetzen

$y = a(x+4)^2 + 6$ $\quad P(-2/2)$ einsetzen

$2 = a(-2+4)^2 + 6$

$2 = a \cdot 4 + 6$

$-4 = 4a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow \underline{y = -(x+4)^2 + 6}$

3) $y = a(x - x_0)^2 + b$ $\quad S(4/2) \quad P(6/1)$

$1 = a(6-4)^2 + 2$

$1 = a \cdot 4 + 2$

$-1 = 4a \Rightarrow a = -1/4 \Rightarrow \underline{y = -1/4(x-4)^2 + 2}$

4) $y = a(x - x_0)^2 + b$ $\quad S(4/4) / P(0/-4)$

$-4 = a(0-4)^2 + 4$

$-4 = 16a + 4$

$-8 = 16a$

$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{y = -1/2(x-4)^2 + 4}$

5) $y = a(x - x_0)^2 + b \qquad S(-2/8) \quad P(6/0)$

$0 = a(6+2)^2 + 8$

$0 = a \cdot 64 + 8$

$-8 = 64a$

$a = -1/8 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = -1/8(x+2)^2 + 8}}$

---

6) $y = x^2 - 4$

(P) I $0 = 4a - 2b + c$

(Q) II $-4 = \qquad + c \quad \Rightarrow \quad c = \underline{\underline{-4}}$

(R) III $0 = 4a + 2b + c$

$\left.\begin{array}{l} 4 = 4a - 2b \\ 4 = 4a + 2b \end{array}\right\} +$

$8 = 8a \quad \Rightarrow \quad a = \underline{\underline{1}}$

I $0 = \cancel{4} - 2b \cancel{- 4}$

$b = \underline{\underline{0}} \quad \Rightarrow \quad b = \underline{\underline{0}}$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y = x^2 - 4}}$

---

7) I $2 = 9a - 3b + c \qquad P(-3/2)$

II ~~4~~ $\qquad Q(-2/0)$

II $0 = 4a - 2b + c \qquad R(0/8)$

III $8 = \qquad + c \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c = 8}}$

I $2 = 9a - 3b + 8$

III $0 = 4a - 2b + 8$

$-6 = 9a - 3b \quad \Big| \quad \rightarrow \quad -6 = 9a - 3b$

$-8 = 4a - 2b \quad \Big| \cdot -1{,}5 \quad \rightarrow \quad +12 = -6a + 3b \quad \Big\} +$

$a = +2 \qquad +6 = 3a$

7) $\underline{\underline{a = +2}}$

$$\mathrm{I} \quad 2 = 18 - 3b + 8$$
$$\cancel{\mathrm{III} \quad 0 = 8 - 2b + 8}$$

$$3b = 24$$
$$b = \underline{\underline{8}} \qquad c = \underline{\underline{8}} \qquad a = \underline{\underline{2}}$$

$$y = 2x^2 + 8x + 8$$
$$y = \underline{\underline{2(x^2 + 4x + 4)}} = \underline{\underline{2(x+2)^2}}$$

---

8)
$$\mathrm{I} \quad 4 = c \quad \Rightarrow \quad c = 4$$
$$\mathrm{II} \quad 0 = 16a + 4b + 4$$
$$\cancel{\mathrm{II} \quad 0 = 4a + b + 1}$$
$$\mathrm{III} \quad 0 = 16a - 4b + 4 \quad +$$

$$0 = 32a + 8$$
$$a = \frac{-8}{32} = -\frac{1}{4} \qquad a = \underline{\underline{-1/4}}$$

$b = ?$

$$0 = 4 \cdot (-1/4) + b + 1$$
$$b = +1 - 1 = \underline{\underline{0}}$$

$$y = \underline{\underline{-1/4\, x^2 + 4}}$$

No. 21 a

$x = 1$ $x = 2$ $x = 3$ $x = 4$
$y = 1$ $y = 3$ $y = 6$ $y = 10$

NF: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$
\begin{array}{l|l}
P(1/1) & 1 = 1a + 1b + 1c + 1d \\
P(2/3) & 3 = 8a + 4b + 2c + 1d \\
P(3/6) & 6 = 27a + 9b + 3c + 1d \\
P(4/10) & 10 = 64a + 16b + 4c + 1d
\end{array}
$$

---

mit TR:

$$
\left.\begin{array}{l}
a = 0 \\
b = 1/2 \\
c = 1/2 \\
d = 0
\end{array}\right\} \quad y = 0{,}5x^2 + 0{,}5x
$$

Kontrolle

$x = 11$

$y = 0{,}5 \cdot 11^2 + 0{,}5 \cdot 11 = \underline{66}$ (i.O.)

TR - Anleitung

1. $\ulcorner$ Solve
2. Solve lin sys...
3. EDIT Eingabe der Matrix ENTER
4. ok
5. Solve

No 21b

$x = 1$ $\quad y = 1$

$x = 2$ $\quad y = 4$

$x = 3$ $\quad y = 10$

$x = 4$ $\quad y = 20$

GF: $$y = ax^3 + bx^2 + cx^1 + d$$

$P(1/1)$	$1 = 1a + 1b + 1c + 1d$
$P(2/4)$	$4 = 8a + 4b + 2c + 1d$
$P(3/10)$	$10 = 27a + 9b + 3c + 1d$
$P(4/20)$	$20 = 64a + 16b + 4c + 1d$

mit TR:

$$a = 1/6$$
$$b = 1/2$$
$$c = 1/3$$
$$d = 0$$

Formel

$$y = 1/6\, x^3 + 1/2\, x^2 + 1/3\, x$$

$$y = x\,(1/6\, x^2 + 1/2\, x + 1/3)$$

Beispiel:

$$x = 11$$
$$y = 1/6 \cdot 11^3 + 1/2\, 11^2 + 1/3 \cdot 11$$
$$y = 286$$

Probe:

$x = 1$ $\quad 1 = 1/6 + 1/2 + 1/3 = 1$ (w)

$x = 2$ $\quad 4 = 4/3 + 2 + 2/3 = 4$ (w)

$x = 3$ $\quad 10 = 4{,}5 + 4{,}5 + 1 = 10$ (w)

$x = 4$ $\quad 20 = 10\,2/3 + \cancel{4}\ 8 + 1\,1/3 = 20$ (w)

684) Geg: $y = 3x^2 - 12x + 21$; $P_1 = (-2/0)$

$P_2 = (5/5)$

Ges: $y_2 = ?$

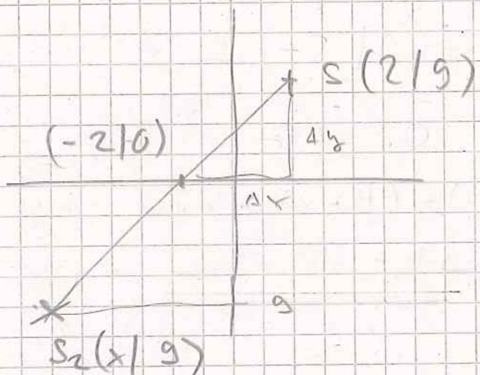
Lsg:

a) $y = 3(x^2 - 4x + 7)$

$= 3(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + 7)$

$= 3[(x-2)^2 + 3]$

$y = 3(x-2)^2 + 9$ $\Rightarrow$ $S(2;9)$



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9}{4}$

$y_G = mx + b$

$0 = \frac{9}{4} \cdot -2 + b$

$\frac{9}{2} = b$ $\Rightarrow$ $y_G = \frac{9}{4} x + \frac{9}{2}$

neuer S_2: $y_G(x) = 9$ $-9 = \frac{9}{4} x + \frac{9}{2}$

$\Rightarrow x = -6$

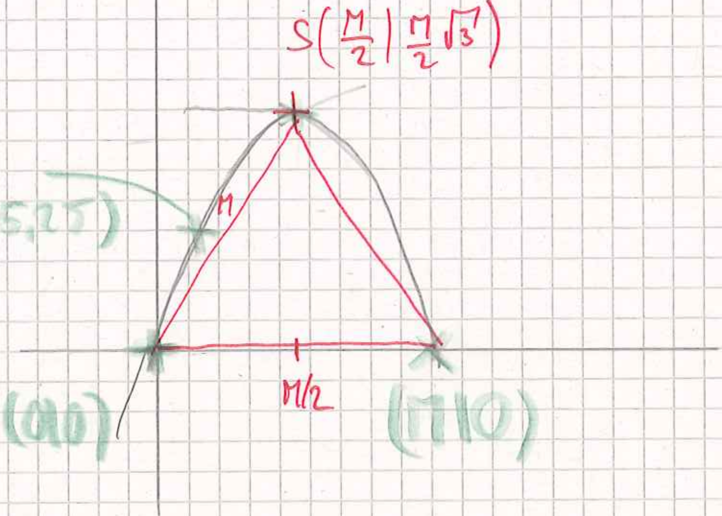
somit: $S_2(-6/-9)$: $y_2 = -3(x+6)^2 - 9$

$= -3(x^2 + 12x + 36) - 9$

$= -3x^2 - 36x - 117$

$\Rightarrow$

685)



$A = \frac{\Delta y}{\Delta x^2} = \frac{M\sqrt{3} \cdot 4}{2 \cdot M^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{M}$ (6)

Geg: Skizze

Ges: $y = Ax^2 + Bx + C$; $M(x|0)$

Lsg

N(0|0) eingesetzt: $0 = C \Rightarrow \underline{C = 0}$

P(√3|5,25) eingesetzt: $5{,}25 = A \cdot (\sqrt{3})^2 + B \cdot \sqrt{3}$ (1)

S eingesetzt: $\frac{M}{2}\sqrt{3} = A \cdot \left(\frac{M}{2}\right)^2 + B \cdot \frac{M}{2}$ (2)

M eingesetzt: $0 = A \cdot M^2 + BM$ (3)

Mit TI

aus (3): $AM^2 = -BM \quad | : M$

$AM = -B$

$M = \underline{\frac{-B}{A}}$ (4)

oder

aus (1) $5{,}25 = 3A + B\sqrt{3}$ (5)

$\frac{5{,}25 - 3A}{\sqrt{3}} = B$

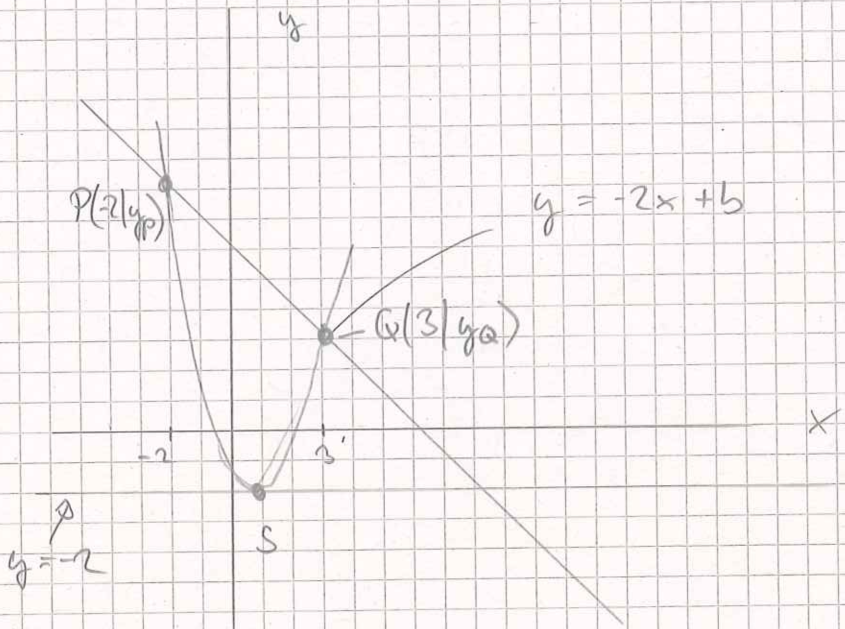
$A = -\frac{1}{4}$; $B = 2\sqrt{3}$; $M = \underline{8\sqrt{3}}$

usw.

aus (6): $M = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{A}$ (7)

(7) = (4) $\frac{-B}{A} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{A} \Rightarrow B = \underline{\sqrt{3} \cdot 2}$ (8) usw

686)



<u>Geg: Skizze</u> $A = 1$ (kongruente)

Ges: $y = Ax^2 + Bx + C$

$y_P = y_g$

$1 \cdot x^2 + Bx + C = -2x + b$

$x = -2$: $(-2)^2 + B \cdot (-2) + C = 4 + b$ (1)

$x = 3$: $3^2 + B \cdot 3 + C = -6 + b$ (2) $| \cdot (-1)$

$-9 - 3B - C = +6 - b$ (3)

(1)+(3): $-5 - 5B = 10$

$-15 = 5B \Rightarrow B = \underline{-3}$

A + B einsetzen: $y = x^2 - 3x + C$

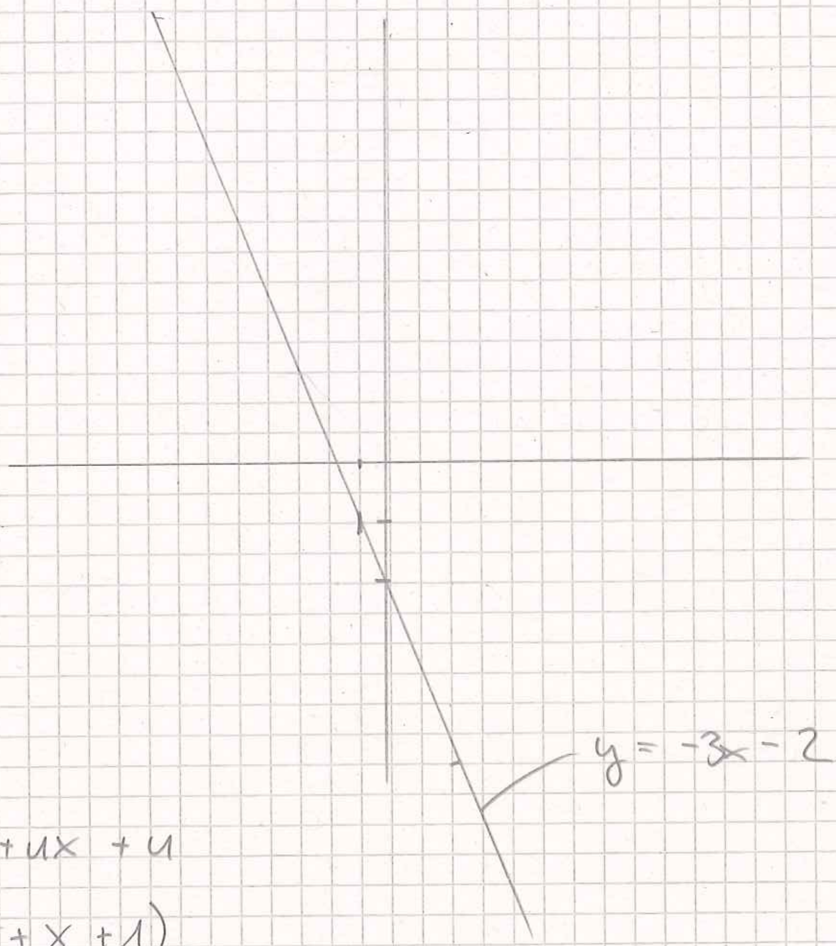
$y = x^2 - 3x + 1{,}5^2 - 1{,}5^2 + C$

$y = (x - 1{,}5)^2 - 1{,}5^2 + C$

$\Rightarrow x_S = \underline{1{,}5}$ $y_S = -2$

$\Rightarrow y = (x - 1{,}5)^2 - 2 = \underline{\underline{x^2 - 3x + 1/4}}$

687)

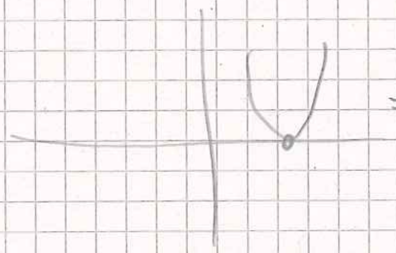


$$y_p = ux^2 + ux + u$$
$$= u(x^2 + x + 1)$$
$$= u\left[x^2 + x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1\right]$$
$$= u\left[\left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + 3/4\right]$$
$$= u\left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + u \cdot \tfrac{3}{4} \leftarrow y_s$$

$$x_s = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_s = -3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = \underline{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow u \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$
$$u = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$$

688) Geg: [illegible]



$\Rightarrow D = 0$

Lsg

$D = B^2 - 4AC = 0 \quad \Rightarrow \quad (1+m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot 1 = 0$

$$m^2 + 2m + 1 - 4m^2 = 0$$

$$-3m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$3m^2 - 2m - 1 = 0$$

$$(3m + 1)(m - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{m = 1} \quad \vee \quad 3m = -1$$

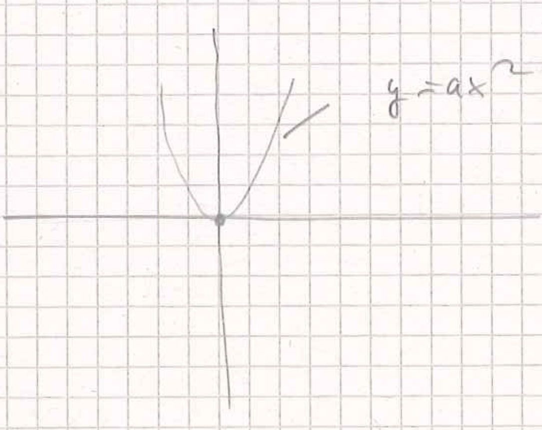
$$\underline{m = -\frac{1}{3}}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{m = 1}} \vee \underline{\underline{m = -\frac{1}{3}}}$

689) geg: $y_1 = ax^2$ $\quad y_2 = ax^2 + bx + c$

$y_1 \xleftarrow{\text{schieben}} y_2$

Ges: S von $y_2 = ?$



Lsg

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(4ac - b^2)\cdot a}{4a^2}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

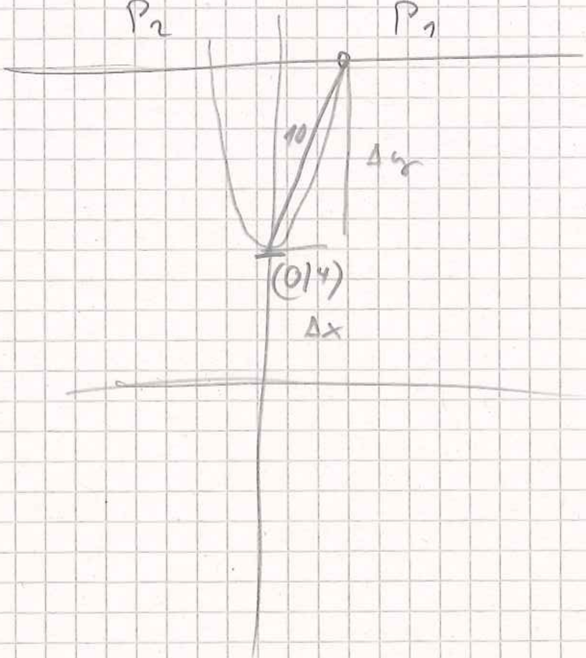
$\Rightarrow$ in x-Richtung: $-\dfrac{b}{2a}$

" y-Richtung: $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$

690) Geg.: $y = 0,2 \cdot \sqrt{3} \cdot x^2 + 4$

Ges: $P_1 = ?$ $\quad P_2 = ?$

Lsg



(1) $A \cdot \Delta x^2 = \Delta y$

(2) $\Delta x^2 + \Delta y^2 = 100$

$\Rightarrow$ (1): $\underbrace{0,2 \cdot \sqrt{3}}_{A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x^2}$

(2) $\Delta x^2 + \Delta y^2 = 100$

aus (1): $0,2\sqrt{3} \cdot \Delta x^2 = \Delta y \Rightarrow \Delta x^2 = \dfrac{\Delta y}{0,2 \cdot \sqrt{3}}$ (3)

(3) in (2): $\dfrac{\Delta y}{0,2\sqrt{3}} + \Delta y^2 = 100$

$\Delta y + 0,2\sqrt{3} \Delta y^2 = 20\sqrt{3}$

$0,2\sqrt{3} \cdot \Delta y^2 + \Delta y - 20\sqrt{3} = 0$

$\Delta y_1 = 5\sqrt{3}$ (4)

$\Delta y_2 = \dfrac{-20\sqrt{3}}{3}$ unmöglich, A $\Rightarrow$ positiv

$\Delta x^2 = \dfrac{5\sqrt{3}}{0,2\sqrt{3}} = 25$

$\Delta x = \underline{5}$

$\Rightarrow P_1 = (5 \mid 4 + 5\sqrt{3})$

$P_2 (-5 \mid 4 + 5\sqrt{3})$