2 Operationen 1. Stufe

2.1 Übersicht Operationen

Operationen 1. Stufe	Addition und Subtraktion	$5+2=7$
Operationen 2. Stufe	Multiplikation und Division	$5\cdot 3=15$ $15:3=5$
Operationen 3. Stufe	Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren	$5^2=25$ $\sqrt{25}=5$ $\log_5 25=2 \quad \Leftrightarrow \quad 5^2=25$

2.2 Reihenfolge der Operationen

Wenn nicht mit Klammern eine Reihenfolge vorgeschrieben wird, müssen die Operationen in der folgenden Reihenfolge ausgeführt werden:

1. Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren (Operationen der 3. Stufe)
2. Multiplikation und Division (Operationen der 2. Stufe)
3. Addition und Subtraktion (Operationen der 1. Stufe)

Beispiele

a. $2+3\cdot 4=\underline{\underline{14}}$

b. $2\cdot 3^4=\underline{\underline{162}}$

c. $5+4\cdot 3^2=\underline{\underline{41}}$

2.3 Addition

Die Addition von algebraischen Termen kennen Sie von früher.
Die wichtigsten Punkte seien hier kurz wiederholt:

$$\boxed{\underbrace{2a+a+3a}_{\text{Summanden}} = \underbrace{6a}_{\text{Summe}}}$$

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

$a+b=b+a$ z. B. $4+2=2+4$

Die Summe behält ihren Wert, wenn die beiden Summanden vertauscht werden.
Das Kommutativgesetz gilt für beliebig viele Summanden.

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$ z. B. $(5+3)+2=5+(3+2)=5+3+2$

In einer Summe darf man die Summanden beliebig zu Teilsummen verbinden, ohne dass sich der Wert der Summe ändert. Mit den Klammern kann angegeben werden, welche Zahlen zuerst addiert werden sollen. **Klammern sind aber bei der Addition nicht notwendig**.

Neutrales Element

$a+0=0+a=a$ z. B. $7+0=0+7=7$

0 ist das neutrale Element der Addition.

Gleichartige Summanden (Kettenaddition und ihre Vereinfachung)

Ist beispielsweise folgende Addition auszuführen:

$a+a+b+a+b+a$, z.B. $3+3+5+3+5+3$

so werden die Summen nach dem Kommutativgesetz geordnet:

$\underbrace{a+a+a+a}_{a\cdot(1+1+1+1)}+\underbrace{b+b}_{b\cdot(1+1)}$ z.B. $3+3+3+3+5+5$

und dann die gleichen Summanden zusammengefasst zu

$4a+2b$. z.B. $4\cdot3+2\cdot5$

Achtung, nicht mit Kettenmultiplikation verwechseln:

$a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b=a^4\cdot b^2$ z. B. $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5=3^4\cdot5^2$

Zusammenfassung Addition

Es kommt nicht auf die Reihenfolge der Summanden an (Kommutativgesetz):

$a+b=b+a$

Bei Mehrfachsummen kommt es nicht auf die Reihenfolge der Ausführung an (Assoziativgesetz). Da die Reihenfolge unwesentlich ist, lässt man die Klammern in der Regel weg:

$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$

Das neutrale Element der Addition ist die Zahl 0:

$a+0=a$

Gleichartige Summanden und Kettenaddition:

Es können nur *gleichartige Summanden* zusammengefasst werden. Das heisst, dass die Variable a nur mit a zusammengefasst werden kann, und nicht mit b, a^2, ab oder 3.

Die Kettenaddition gleichartiger Summanden wird mit der Multiplikation vereinfacht.

$a+a+a+a+b+b=4a+2b$

2.4 Subtraktion

Die Subtraktion von algebraischen Termen kennen Sie von früher.
Die wichtigsten Punkte seien hier kurz wiederholt:

$$\underset{\text{Minuend}}{10x} - \underset{\text{Subtrahend}}{6x} = \underset{\text{Differenz}}{4x}$$

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

$a - b \neq b - a \quad (a \neq b)$ z. B. $5 - 2 \neq 2 - 5$

Bei der Subtraktion gilt das Kommutativgesetz **nicht**.

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

$(a - b) - c \neq a - (b - c)$ z. B. $(7 - 3) - 1 \neq 7 - (3 - 1)$

Bei der Subtraktion gilt das Assoziativgesetz **nicht**.

Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Subtrahenden

$a - b - c = a - c - b$ z. B. $10 - 5 - 2 = 10 - 2 - 5$

Die **Subtrahenden** können beliebig vertauscht werden.

2.5 Reihenfolge der Schreibweise (Ordnen)

Die Reihenfolge der Schreibweise erlaubt eine bessere Les- und Vergleichbarkeit der Resultate. Grundsätzlich sollten die Resultate wie folgt geordnet werden:

1. Variablen vor Konstanten
2. Variablen alphabetisch
3. Variablen alleine vor Variablen zusammengesetzt
4. Innerhalb derselben Variablen nach absteigender Potenz

Beispiele

a. $\underbrace{2a^3 + 3a^2 + 4a^2b - 5a + 6ab + 7b^2 - 8b}_{\substack{\text{Variablen vor Konstanten} \\ \text{alphabetisch} \\ \text{Variablen alleine vor Variablen zusammengesetzt} \\ \text{nach absteigender Potenz}}} \underset{\text{Konstante}}{+9}$

b. $a^2 + b^3 - b^3c^2 + b^3c - b^2 - 6$

c. $2a + 3b^2 + 4$

2.6 Auflösen von Klammern

Steht ein Pluszeichen vor der Klammer, so ändern sich beim Auflösen die Rechenzeichen seiner Glieder nicht. Klammer kann weggelassen werden.

$a+(b-c)=a+b-c$ z. B. $5+(3-2)=5+3-2$

Steht ein Minuszeichen vor der Klammer, so erhalten beim Auflösen der Klammer alle Glieder in der Klammer entgegengesetzte Rechenzeichen.

$a-(b-c)=a-b+c$ z. B. $7-(4-2)=7-4+2$

Treten in einer Aufgabe mehrere Klammern auf, so löst man die Klammern unter Beachtung der Klammerregeln von innen nach aussen auf.

$$a+\underbrace{\left[b-\underbrace{(c+d)}_{\text{innere ()}}\right]}_{\text{äussere ()}}=\underbrace{a+[b-c-d]}_{\text{1. Schritt}}=\underbrace{a+b-c-d}_{\text{2. Schritt}}$$

$$9+[5-(4+2)]=9+[5-4-2]=9+5-4-2$$

Zusammenfassung Klammerregeln

a. Steht ein + vor der Klammer → Klammer kann weggelassen werden.

b. Steht ein – vor der Klammer → Klammer weglassen und alle Vorzeichen in der Klammer wechseln.

c. Mehrfache Klammern werden schrittweise von innen nach aussen aufgelöst.

Zusammenfassung Addition, Subtraktion und Klammerregeln

Jeder Minuend kann in einen Summanden umgeschrieben werden:
$-b = +(-b)$

Eine Differenz $a-b$ kann deshalb auch als Summe bezeichnet werden:
$a-b = a+(-b)$

Klammern vor denen ein $+$ steht, können weggelassen werden:
$+(a-b-c) = a-b-c$

Bei Klammern vor denen ein $-$ steht (Minusklammer) wird der «ganze Inhalt» subtrahiert:
$-(a-b-c) = -a+b+c$

Man lässt die Minusklammer weg, indem alle Vorzeichen geändert werden:
$m-(a-b) = m-a+b$

Sind in einer Summe Terme in Klammern (…) von anderen Klammern […] eingeschlossen, so löst man die Klammern von innen nach aussen:
$a-\left[b-(x+y)+m\right] = a-[b-x-y+m] = a-b+x+y-m$

2.7 Übungen

Fassen Sie so weit wie möglich zusammen:

1. $3xy + 5x - xy = ?$

2. $8x + 2y + 2 - 5x - 5 + y = ?$

3. $a - 2a + c - 2c = ?$

4. $x + y + y + x + x + y + x = ?$

5. $2a^2 - a + a^2 - 5a = ?$

6. $3ab + 2a^2 - 3a^2 - 7a = ?$

7. $y^2z + xy + y^2z - xy + y^2z - yz^2 - yz^2 = ?$

8. $-12 + 15x - 3x^2 + 9x - x^2 - 23x + 2x^2 = ?$

Schreiben Sie ohne Klammern und fassen Sie so weit wie möglich zusammen:

9. $8a + 3b + (2a - b) = ?$

10. $-7a - (-3a) + (-5a + 1) = ?$

11. $x - y + (x + y) - (x + y) - (x - y) = ?$

12. $a - [2a - 3a - (a + 5a)] = ?$

13. $a - \{b - (c + d) - [a + (b - c)]\} = ?$

14. $-\langle -\{-[-(-a + b) - a] - (-a - b)\} - 2a - b\rangle = ?$

2.8 Addieren, Subtrahieren und Klammern mit dem TI

Beispiel 1 $a-3a+5a-7a=?$

Eingabe: $a-3a+5a-7a$
Ergebnis: $\underline{\underline{-4a}}$

Hinweis: Der Buchstabe a wird mit den Tasten $\boxed{\text{alpha}}$ und $\boxed{=}$ eingegeben.
Die Berechnung wird mit der Taste $\boxed{\text{ENTER}}$ ausgeführt.

Beispiel 2 $a-\{a-[(-b-a)+2a]\}=?$

Eingabe: $a-(a-((-b-a)+2a))$
Ergebnis: $\underline{\underline{a-b}}$

Hinweis: Der Buchstabe a wird mit den Tasten $\boxed{\text{alpha}}$ und $\boxed{=}$ eingegeben.
Der Buchstabe b wird mit den Tasten $\boxed{\text{alpha}}$ und $\boxed{(}$ eingegeben.
Das Vorzeichen bei $-b$ muss mit der Taste $\boxed{(-)}$ eingegeben werden.
Die Berechnung wird mit der Taste $\boxed{\text{ENTER}}$ ausgeführt.

Beispiel 3 $10x-\{-[-(x+y)-(x-y)]-x\}=?$

Eingabe: $10*x-(\underset{\boxed{(-)}}{\underset{\downarrow}{-}}(\underset{\boxed{(-)}}{\underset{\downarrow}{-}}(x+y)-(x-y))-x)$

Ergebnis: $\underline{\underline{9x}}$

Hinweis: Die Buchstaben x, y und z werden mit den Tasten $\boxed{X}$, $\boxed{Y}$ und $\boxed{Z}$ eingegeben. Die Taste $\boxed{\text{alpha}}$ ist bei den Buchstaben x, y, z und t nicht notwendig!
Die Vorzeichen müssen mit der Taste $\boxed{(-)}$ eingegeben werden.
Die Berechnung wird mit der Taste $\boxed{\text{ENTER}}$ ausgeführt.

2.9 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
19 (a bis f)	15	Kontrolle mit TI üben
20 (a und b)	15	Kontrolle mit TI üben

2.10 Arbeitstechniken

Der Vorteil von Arbeitstechniken ist, dass sie veränderbar und damit lernbar sind.
Sie helfen unnötige und ärgerliche Flüchtigkeitsfehler einzuschränken.

a. Mit verschiedenen Klammern arbeiten → besserer Überblick:
$\langle \ldots \{ \ldots [\ldots (\ldots)] \} \rangle$ noch besser mit Farben: $\langle \ldots \{ \ldots [\ldots (\ldots)] \} \rangle$

Aufgabenstellung	Vereinfachen Sie: $a-(a-((-b-a)+2a))=?$
Fehlerbeispiel	Lösung eines Lernenden: $a-(a-(-b-a)+2a)=$ $a-(a+b+a+2a)=$ $a-a-b-a-2a=\underline{\underline{-3a-b}}$
Verhinderung des Fehlers:	Mit verschiedenen Klammertypen arbeiten: $a-\{a-[(-b-a)+2a]\}=$ $a-\{a-[-b-a+2a]\}=$ $a-\{a+b+a-2a\}=$ $a-a-b-a+2a=\underline{\underline{a-b}}$

b. Nicht hintereinander sondern untereinander schreiben!

c. Schritt für Schritt lösen (aufschreiben) und nicht mehrere Schritte auf einmal lösen.
Lieber mehr schreiben und weniger denken!

d. Zusammenfassen mit Farben unterstützen:
$2a-[3b-2c-4d-3a-2b+c]=$
$2a-3b+2c+4d+3a+2b-c=\underline{\underline{5a-b+c+4d}}$