3.8 Transformation von Funktionen

Einleitung

Bei der grafischen Lösung von Gleichungen (bzw. Ungleichungen) stehen wir vor der Aufgabe, den Graph von Funktionen wie z.B.

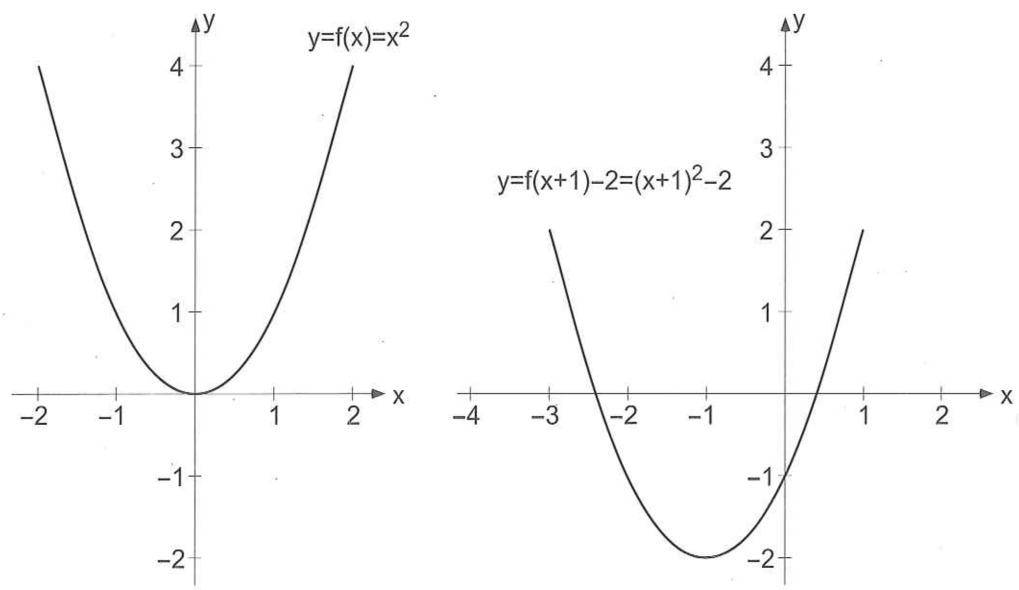
$$y = f(x) = 3 \cdot (x-4)^2$$
$$y = f(x) = \sqrt{x-4}$$
$$y = f(x) = 3 \cdot |5x+2| - 4$$
$$y = f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$$

zu zeichnen.

Eine Möglichkeit besteht darin, mithilfe einer Wertetabelle den Graphen zu zeichnen. Eine andere Methode basiert auf der Idee, den Graphen einer komplizierten Funktion schrittweise aus dem Graphen einer einfachen Grundfunktionen abzuleiten.

Beispiel

Wir möchten aus dem Graphen der Funktion $y = f(x) = x^2$ den Graphen der Funktion $y = f(x+1) - 2 = (x+1)^2 - 2$ herleiten.



Problem 1

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \sqrt{x}$ mit ihrem Graphen.

Wie verändert sich der Graph der Funktion $y = f(x) = \sqrt{x}$ durch folgende **Transformationen**?

a) Addition einer konstanten d zum Funktionswert

$$y = f(x) = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad y = f(x) + d = \sqrt{x} + d$$

b) Multiplikation des Funktionswertes mit einer konstanten c

$$y = f(x) = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad y = c \cdot f(x) = c \cdot \sqrt{x}$$

c) Argument x durch $(a \cdot x)$ ersetzen

$$y = f(x) = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad y = f(a \cdot x) = \sqrt{a \cdot x}$$

d) Argument x durch $(x + b)$ ersetzen

$$y = f(x) = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad y = f(x - b) = \sqrt{x + b}$$

Problem 2

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = x$ mit ihrem Graphen.
Wie verändert sich der Graph der Funktion durch die Anwendung der Betragsfunktion?

$$y = f(x) = x \quad \rightarrow \quad y = |f(x)| = |x|$$

Problem 3

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = 3x + 2$ mit ihrem Graphen.
Wie verändert sich der Graph der Funktion, wenn die unabhängige Variable x durch $|x|$ ersetzt wird?

$$y = f(x) = 3x + 2 \quad \rightarrow \quad y = f(|x|) = 3 \cdot |x| + 2$$

Wir wollen dieses Vorgehen mithilfe der nachfolgenden Arbeitsaufträge genauer untersuchen. Bearbeiten Sie jeden dieser Aufträge zunächst selbstständig. Geben Sie alle Skizzen und Überlegungen an. Fassen Sie Ihre Ergebnisse für jeden Auftrag in einer “Merkregel“ schriftlich zusammen. Diskutieren Sie Ihre Resultate untereinander.

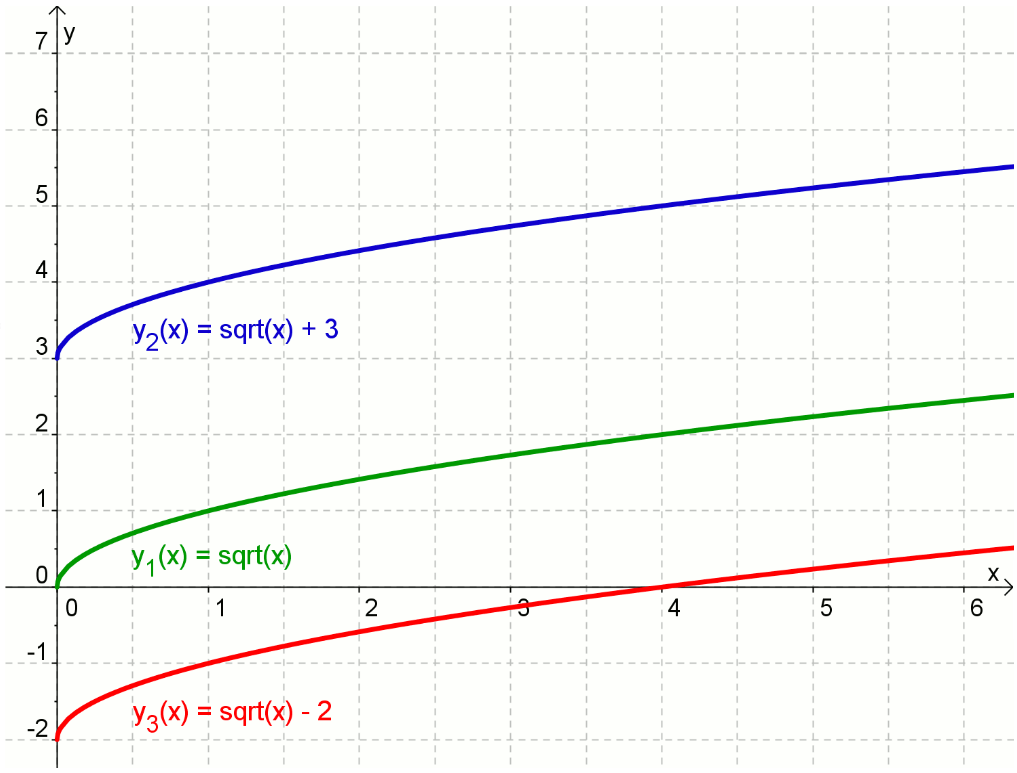
Arbeitsaufträge zum selbstständigen Erarbeiten der Transformationsregeln

Auftrag 1

Berechnen Sie für die Argumente in der ersten Zeile die fehlenden Funktionswerte:

x	0	1	2	3	4	5	6
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45
$y = \sqrt{x} + 3$	3	4	4.41	4.73	5	5.24	5.45
$y = \sqrt{x} - 2$	-2	-1	-0.59	-0.29	0	0.24	0.45

Zeichnen Sie mithilfe dieser Tabelle die Graphen der Funktionen $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 3$ und $y = \sqrt{x} - 2$ in unten stehendes Koordinatensystem.



Formulieren Sie in eigenen Worten, wie man aus dem Graphen der Funktion $y = f(x) = \sqrt{x}$ den Graphen der Funktion $y = f(x) + d = \sqrt{x} + d$ erhält.

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad y = f(x) + d$$

Verschiebung des Graphen in y-Richtung:

für d > 0: Verschiebung um d nach oben

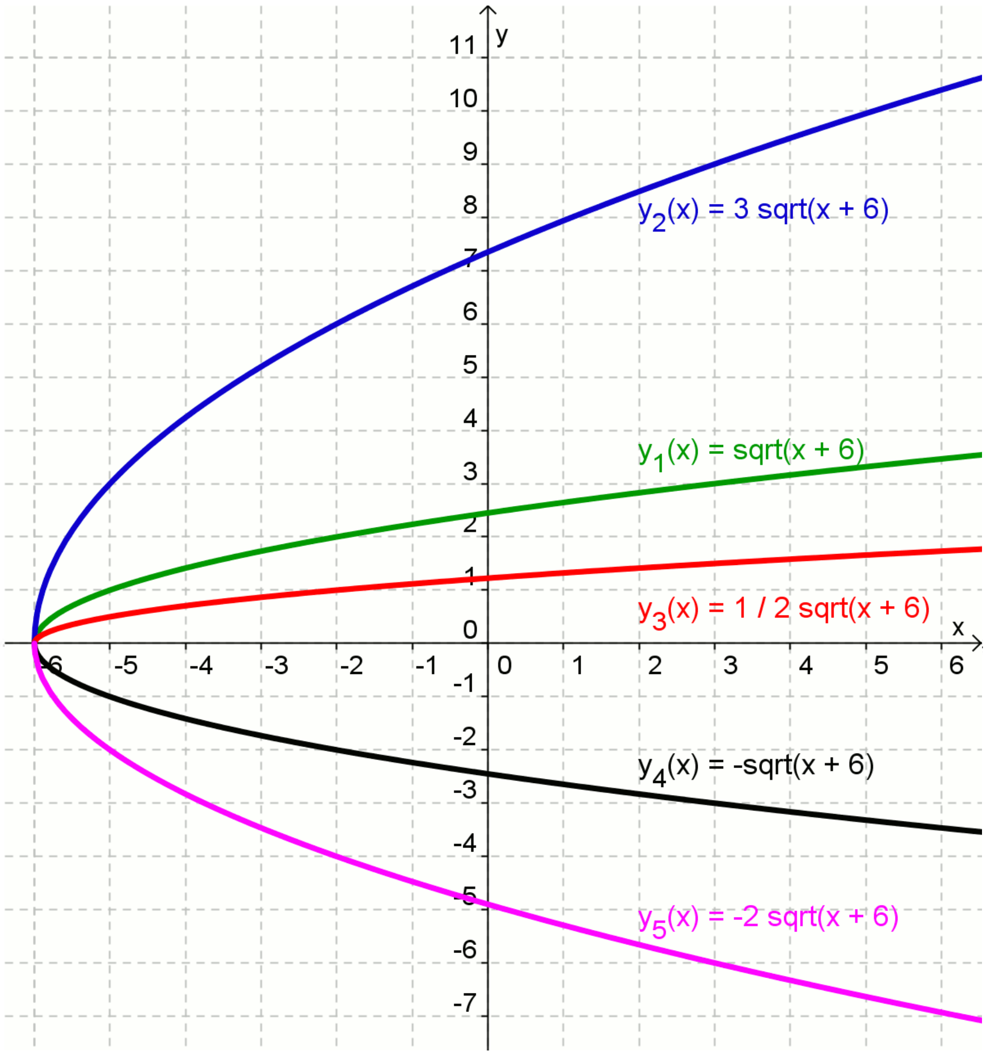
für d < 0: Verschiebung um -d nach unten

Auftrag 2

Berechnen Sie für die Argumente in der ersten Zeile die fehlenden Funktionswerte:

x	–6	–4	–2	0	2	4	6
$y = \sqrt{x+6}$	0	1.41	2	2.45	2.83	3.16	3.46
$y = 3\sqrt{x+6}$	0	4.24	6	7.35	8.49	9.49	10.39
$y = \frac{1}{2}\sqrt{x+6}$	0	0.71	1	1.22	1.41	1.58	1.73
$y = -\sqrt{x+6}$	0	-1.41	-2	-2.45	-2.83	-3.16	-3.46
$y = -2\sqrt{x+6}$	0	-2.83	-4	-4.90	-5.66	-6.32	-6.93

Zeichnen Sie mithilfe dieser Tabelle die Graphen der Funktionen $y = \sqrt{x+6}$, $y = 3\sqrt{x+6}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+6}$, $y = -\sqrt{x+6}$ und $y = -2\sqrt{x+6}$ in unten stehendes Koordinatensystem.



Formulieren Sie in eigenen Worten, wie man aus dem Graphen der Funktion $y = f(x) = \sqrt{x+6}$ den Graphen der Funktion $y = c \cdot f(x) = c \cdot \sqrt{x+6}$ erhält.

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad y = c \cdot f(x)$$

Streckung/Stauchung des Graphen in y-Richtung:

für $c > 0$: Streckung in y-Richtung

für $0 < c < 1$: Stauchung in y-Richtung

für $-1 < c < 0$: zusätzlich zur Stauchung in y-Richtung eine Spiegelung an der x-Achse

für $c < -1$: zusätzlich zur Streckung in y-Richtung eine Spiegelung an der x-Achse

Spezialfall:

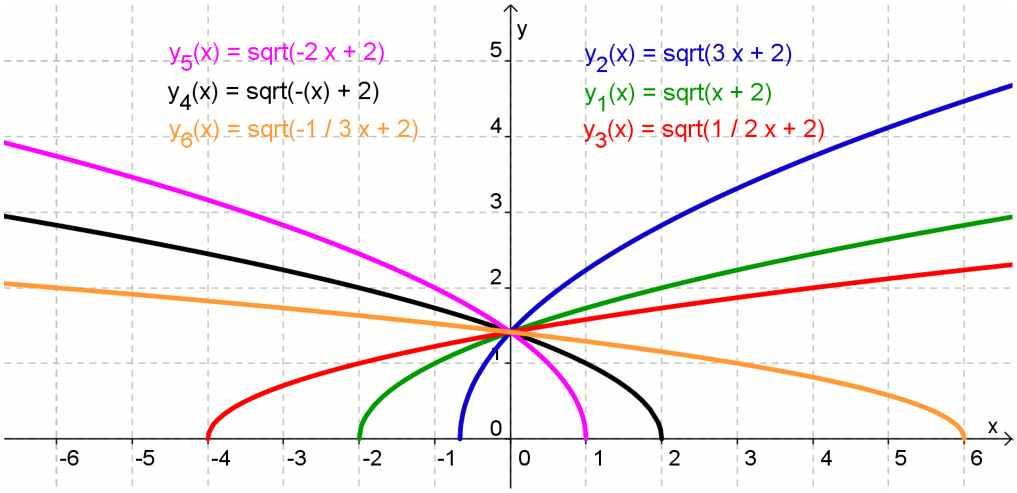
für $c = -1$: der Graph wird an der x-Achse gespiegelt

Auftrag 3

Berechnen Sie für die Argumente in der ersten Zeile die fehlenden Funktionswerte (falls möglich):

x	−6	−4	−2	0	2	4	6
$y = \sqrt{x+2}$	undef.	undef.	0	1.41	2	2.45	2.83
$y = \sqrt{3x+2}$	undef.	undef.	undef.	1.41	2.83	3.74	4.47
$y = \sqrt{0.5x+2}$	undef.	0	1	1.41	1.73	2	2.24
$y = \sqrt{-x+2}$	2.83	2.45	2	1.41	0	undef.	undef.
$y = \sqrt{-2x+2}$	3.74	3.16	2.45	1.41	undef.	undef.	undef.
$y = \sqrt{-\frac{1}{3}x+2}$	2	1.83	1.63	1.41	1.15	0.82	0

Zeichnen Sie mithilfe dieser Tabelle die Graphen der Funktionen $y = \sqrt{x+2}$, $y = \sqrt{3x+2}$, $y = \sqrt{0.5x+2}$, $y = \sqrt{-x+2}$, $y = \sqrt{-2x+2}$ und $y = \sqrt{-\frac{1}{3}x+2}$ in nachfolgendes Koordinatensystem.



Formulieren Sie in eigenen Worten, wie man aus dem Graphen der Funktion $y = f(x) = \sqrt{x+2}$ den Graphen der Funktion $y = f(a \cdot x) = \sqrt{a \cdot x + 2}$ erhält.

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad y = f(a \cdot x)$$

Streckung/Stauchung des Graphen in x-Richtung:

für a > 1: Stauchung in x-Richtung
für 0 < a < 1: Streckung in x-Richtung
für -1 < a < 0: zusätzlich zur Streckung in x-Richtung eine Spiegelung an der y-Achse
für a < -1: zusätzlich zur Stauchung in x-Richtung eine Spiegelung an der y-Achse

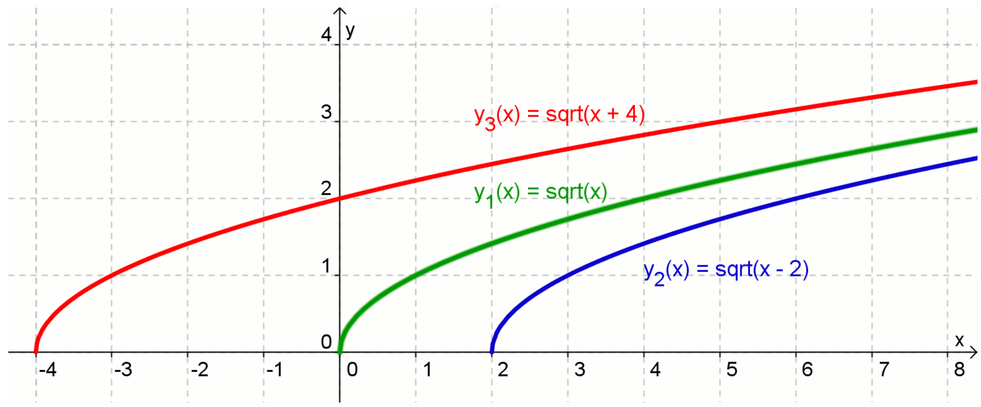
Spezialfall:
für a = -1: der Graph wird an der y-Achse gespiegelt

Auftrag 4

Berechnen Sie für die Argumente in der ersten Zeile die fehlenden Funktionswerte:

x	–4	–2	0	2	4	6	8
$y = \sqrt{x}$	undef.	undef.	0	1.41	2	2.45	2.83
$y = \sqrt{x-2}$	undef.	undef.	undef.	0	1.41	2	2.45
$y = \sqrt{x+4}$	0	1.41	2	2.45	2.83	3.16	3.46

Zeichnen Sie mithilfe der obigen Tabelle die Graphen der Funktionen $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x-2}$ und $y = \sqrt{x+4}$ in unten stehendes Koordinatensystem.



Formulieren Sie in eigenen Worten, wie man aus dem Graphen der Funktion $y = f(x) = \sqrt{x}$ den Graphen der Funktion $y = f(x+b) = \sqrt{x+b}$ erhält.

$$y = f(x) \qquad \rightarrow \qquad y = f(x+b)$$

Verschiebung des Graphen in x-Richtung:

für b > 0: Verschiebung um b nach links

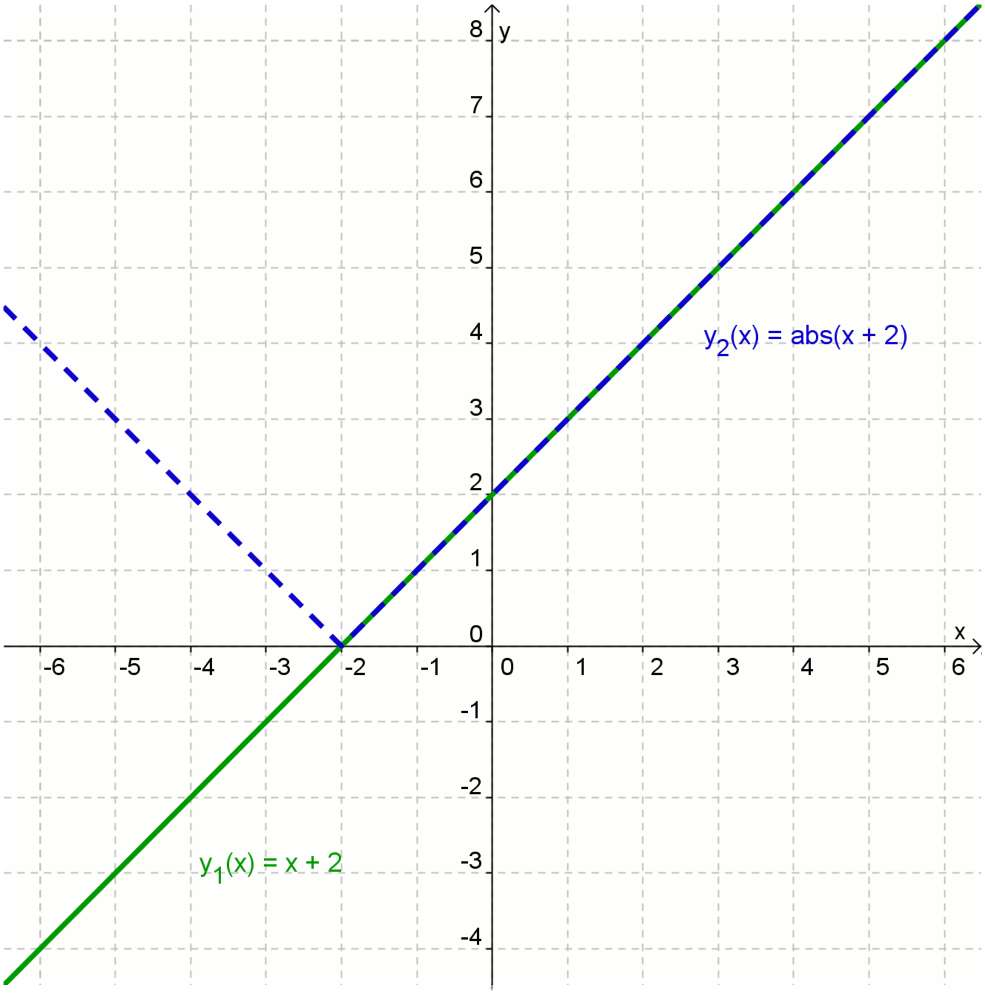
für b < 0: Verschiebung um -b nach rechts

Auftrag 5

Berechnen Sie für die Argumente in der ersten Zeile (der nachfolgenden Tabelle) die fehlenden Funktionswerte:

x	−6	−4	−2	0	2	4	6
$y = x+2$	-4	-2	0	2	4	6	8
$y = \lvert x+2 \rvert$	4	2	0	2	4	6	8

Zeichnen Sie mithilfe dieser Tabelle die Graphen der Funktionen $y = x+2$ und $y = |x+2|$ in unten stehendes Koordinatensystem.



Formulieren Sie in eigenen Worten, wie man aus dem Graphen der Funktion $y = f(x) = x + 2$ den Graphen der Funktion $y = |f(x)| = |x + 2|$ erhält.

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad y = |f(x)|$$

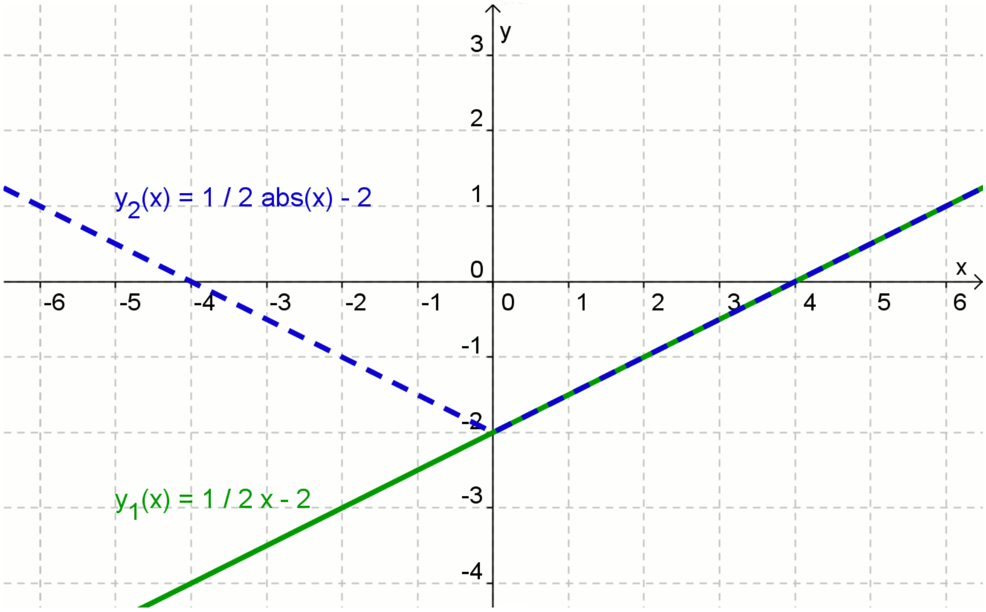
Spiegelung des Graphens an der x-Achse für alle negativen Funktionswerte. Für alle positiven Funktionswerte bleibt der Graph wie er ist.

Auftrag 6

Berechnen Sie für die Argumente in der ersten Zeile die fehlenden Funktionswerte:

x	–6	–4	–2	0	2	4	6
y=0.5x–2	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y=0.5|x|–2	1	0	-1	-2	-1	0	1

Zeichnen Sie mithilfe dieser Tabelle die Graphen der Funktionen $y = 0,5x - 2$ und $y = 0,5|x| - 2$ in unten stehendes Koordinatensystem.



Formulieren Sie in eigenen Worten, wie man aus dem Graphen der Funktion $y = f(x) = 0,5x - 2$ den Graphen der Funktion $y = f(|x|) = 0,5|x| - 2$ erhält.

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad y = f(|x|)$$

Spiegelung des Graphens an der y-Achse für alle negativen x-Werte. Für alle positiven x-Werte bleibt der Graph wie er ist.

Zusammenfassung der Transformationsregeln

Jede einzelne Transformation wurde in den vorhergehenden Aufträgen anhand eines Beispiels behandelt. Ihre Aufgabe war es, jede dieser sechs Transformationsregeln anhand des Beispiels zu verallgemeinern. Nun werden wir die einzelnen Transformationsschritte (Verallgemeinerung) kurz zusammenfassen.

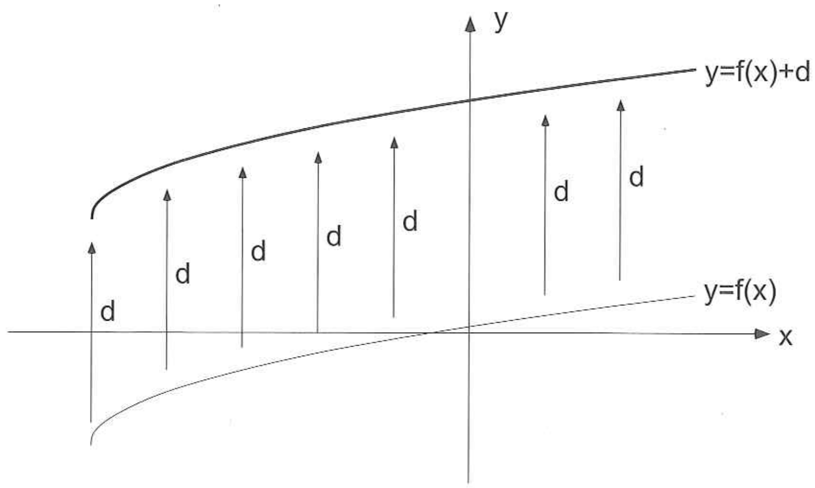
Regel 1

Die Transformation $\mathbf{y = f(x)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y = f(x) + d}$

bewirkt eine Verschiebung des Graphen in y-Richtung:

für $d > 0$ eine Verschiebung des Graphen um d nach oben

für $d < 0$ eine Verschiebung des Graphen um -d nach unten

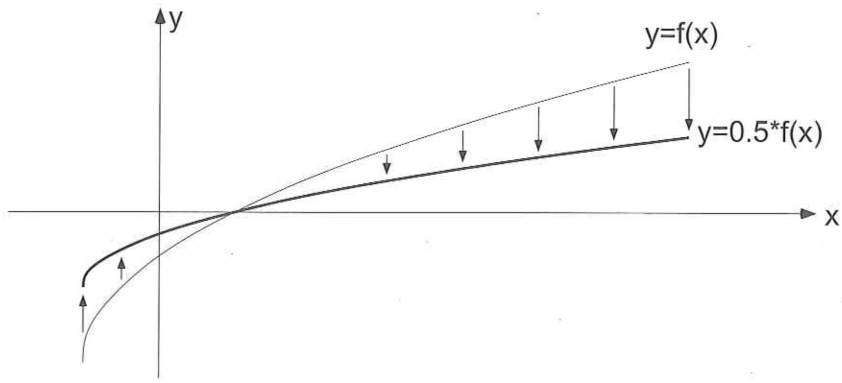


Regel 2

Die Transformation $\mathbf{y = f(x)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y = c \cdot f(x)}$

bewirkt eine Streckung/Stauchung des Graphen in y-Richtung:

für $c > 1$	eine Streckung des Graphen in y-Richtung mit dem Streckungsfaktor c
für $0 < c < 1$	eine Stauchung des Graphen in y-Richtung mit dem Stauchungsfaktor $1/c$
für $-1 < c < 0$	zusätzlich zur Stauchung mit dem Faktor $\lvert 1/c \rvert$ eine Spiegelung des Graphen an der x-Achse
für $c < -1$	zusätzlich zur Streckung mit dem Faktor $\lvert c \rvert$ eine Spiegelung des Graphen an der x-Achse



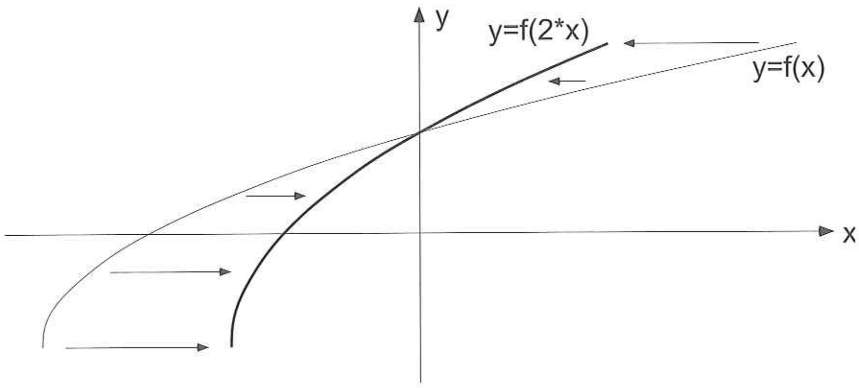
Spezialfall:

für $c = -1$ der Graph wird an der x-Achse gespiegelt

Regel 3

Die Transformation $\mathbf{y = f(x)} \rightarrow \mathbf{y = f(a \cdot x)}$
bewirkt eine Streckung/Stauchung des Graphen in x-Richtung:

für $a > 1$	eine Stauchung des Graphen in x-Richtung mit dem Stauchungsfaktor a
für $0 < a < 1$	eine Streckung des Graphen in x-Richtung mit dem Streckungsfaktor $1/a$
für $-1 < a < 0$	zusätzlich zur Streckung mit dem Faktor $\lvert 1/a \rvert$ eine Spiegelung des Graphen an der y-Achse
für $a < -1$	zusätzlich zur Stauchung mit dem Faktor $\lvert a \rvert$ eine Spiegelung des Graphen an der y-Achse



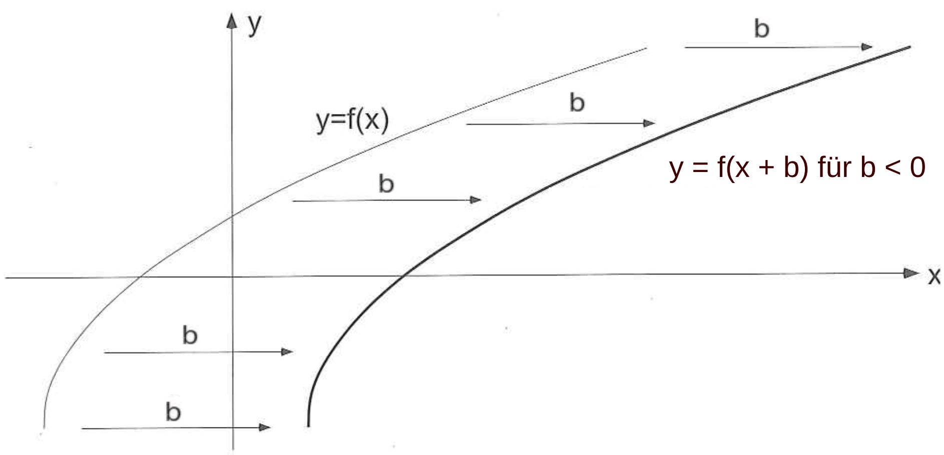
Spezialfall:

für $a = -1$ der Graph wird an der y-Achse gespiegelt

Regel 4

Die Transformation $\mathbf{y = f(x)} \rightarrow \mathbf{y = f(x + b)}$
bewirkt eine Verschiebung des Graphen in x-Richtung:

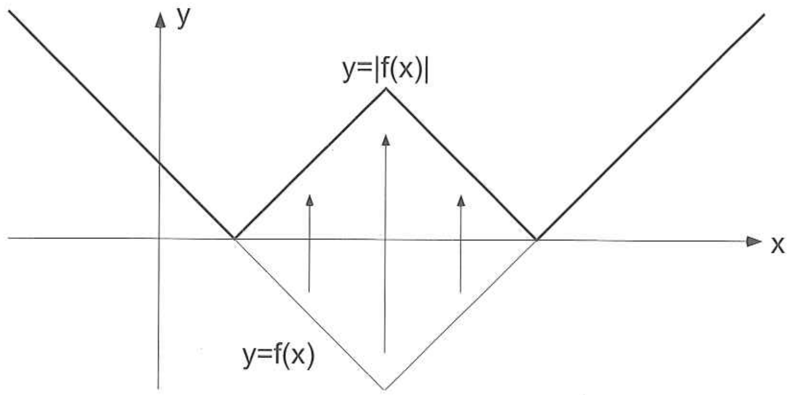
für $b > 0$	eine Verschiebung des Graphen um b nach links
für $b < 0$	eine Verschiebung des Graphen um –b nach rechts



Regel 5

Die Transformation $\mathbf{y = f(x)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y = |f(x)|}$
bewirkt:

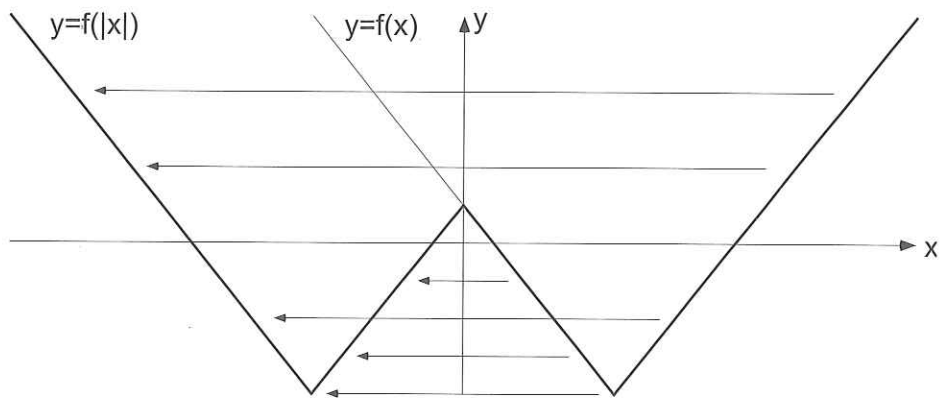
- Spiegelung des Graphen an der x-Achse für alle neg. Funktionswerte.
- Der Graph bleibt wie er ist für alle positiven Funktionswerte.



Regel 6

Die Transformation $\mathbf{y = f(x)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y = f(|x|)}$
bewirkt:

- Der Graph bleibt wie er ist für alle positiven x-Werte.
- Alle negativen x-Werte werden durch eine Spiegelung an der y-Achse durch die positiven x- Werte ersetzt.



Es entsteht ein symmetrischer Graph, wobei die y-Achse die Symmetrieachse ist.

Beispiel, Übungen

Beispiel

Skizzieren Sie ausgehend von einer geeigneten Grundfunktion den Graphen der Funktion $y = 3 \cdot \left|\frac{1}{5}(x+2)\right| - 4$.

a) Geben Sie die Abfolge der einzelnen Transformationsschritte in Form einer Kette von Funktionsgleichungen an: $y = \ldots \rightarrow y = \ldots \rightarrow y = \ldots$

b) Notieren Sie für jeden Transformationsschritt **in Worten** seine Auswirkung auf den Graphen und skizzieren Sie den jeweils resultierenden Graphen.

a) Eine geeignete Grundfunktion ist: $y = |x|$ (oder die Fkt. $y = x$)

Transformationskette:

$$y = |x| \xrightarrow{\text{I}} y = \left|\frac{1}{5}x\right| \xrightarrow{\text{II}} y = \left|\frac{1}{5}(x+2)\right| \xrightarrow{\text{III}} y = 3 \cdot \left|\frac{1}{5}(x+2)\right|$$

$$\xrightarrow{\text{IV}} y = 3 \cdot \left|\frac{1}{5}(x+2)\right| - 4$$

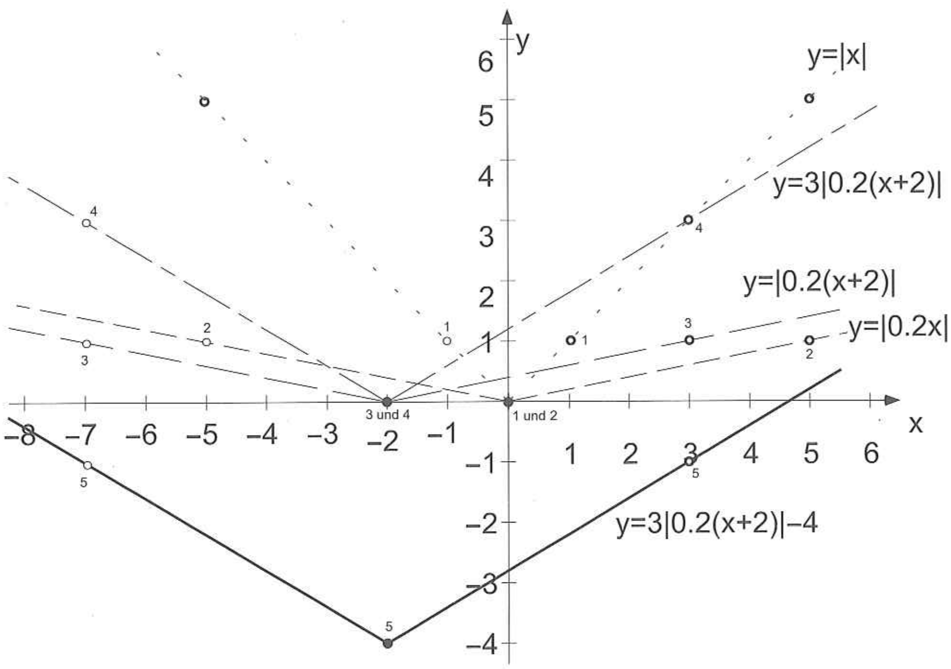
b) Erläuterung der Transformationsschritte in Worten:

I: Streckung des Graphen in x-Richtung um den Streckungsfaktor 5

II: Verschiebung des Graphen in x-Richtung um 2 nach links

III: Streckung des Graphen in y-Richtung um den Streckungsfaktor 3

IV: Verschiebung des Graphen in y-Richtung um 4 nach unten



Übung 1

Skizzieren Sie ausgehend von der Grundfunktion $y = |x|$ den Graphen der Funktion $y = -\frac{1}{2} \cdot |-x-3| + 3$.

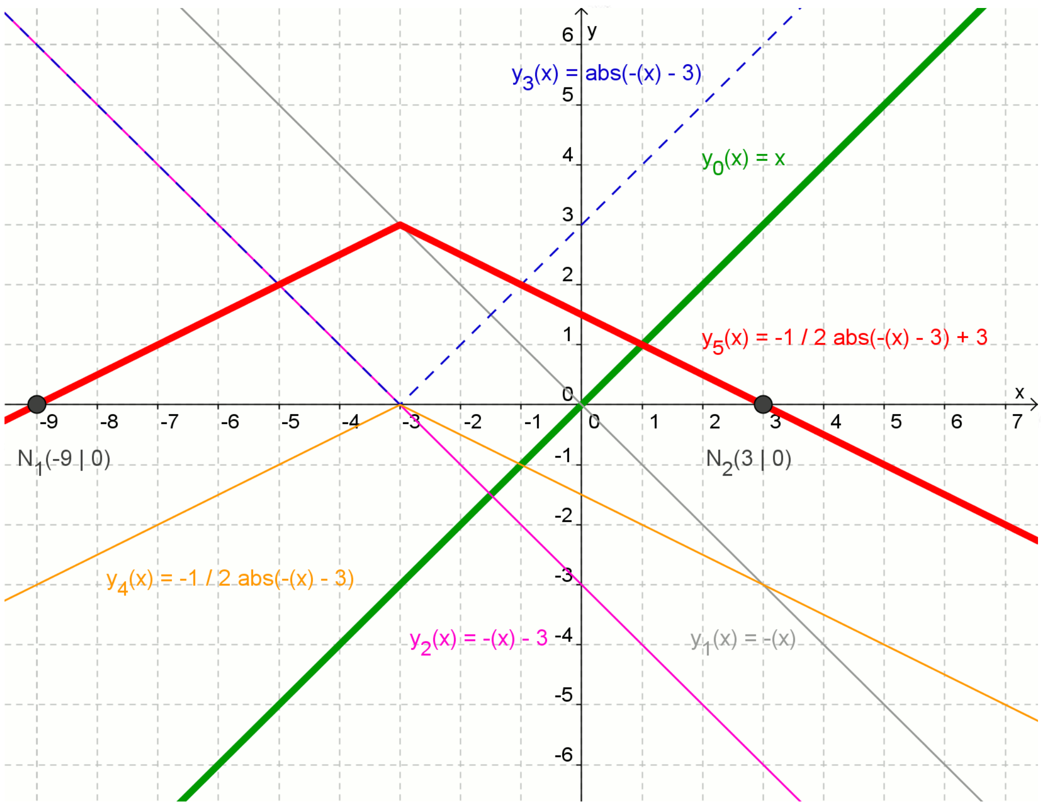
a) Geben Sie die Abfolge der einzelnen Transformationsschritte in Form einer Kette von Funktionsgleichungen an: $y = \ldots \to y = \ldots \to y = \ldots$

b) Notieren Sie für jeden Transformationsschritt **in Worten** seine Auswirkung auf den Graphen und skizzieren Sie den jeweils resultierenden Graphen. Verwenden Sie dazu verschiedene Farben.

c) Bestimmen Sie aus der Skizze die Nullstelle(n), den Definitions- und den Wertebereich der gezeichneten Funktion und geben Sie die Bereiche in korrekter Mengenschreibweise an.

$$y_0 = x \xrightarrow{\text{I}} y_1 = -x \xrightarrow{\text{II}} y_2 = -x - 3 \xrightarrow{\text{III}} y_3 = |-x-3| \xrightarrow{\text{IV}} y_4 = -\frac{1}{2} \cdot |-x-3| \xrightarrow{\text{V}} y_5 = -\frac{1}{2} \cdot |-x-3| + 3$$

I: Streckung/Stauchung in y-Richtung (Spezialfall bei Faktor – 1: Spiegelung an der x-Achse)
II: Verschiebung in y-Richtung um -3 nach unten
III: Spiegelung an der x-Achse für alle negativen Funktionswerte
IV: zusätzlich zur Stauchung eine Spiegelung an der x-Achse
V: Verschiebung in y-Richtung um +3 nach oben



Übung 2

Skizzieren Sie ausgehend von der Grundfunktion $y = x^2$ den Graphen der Funktion $y = \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 - 2$.

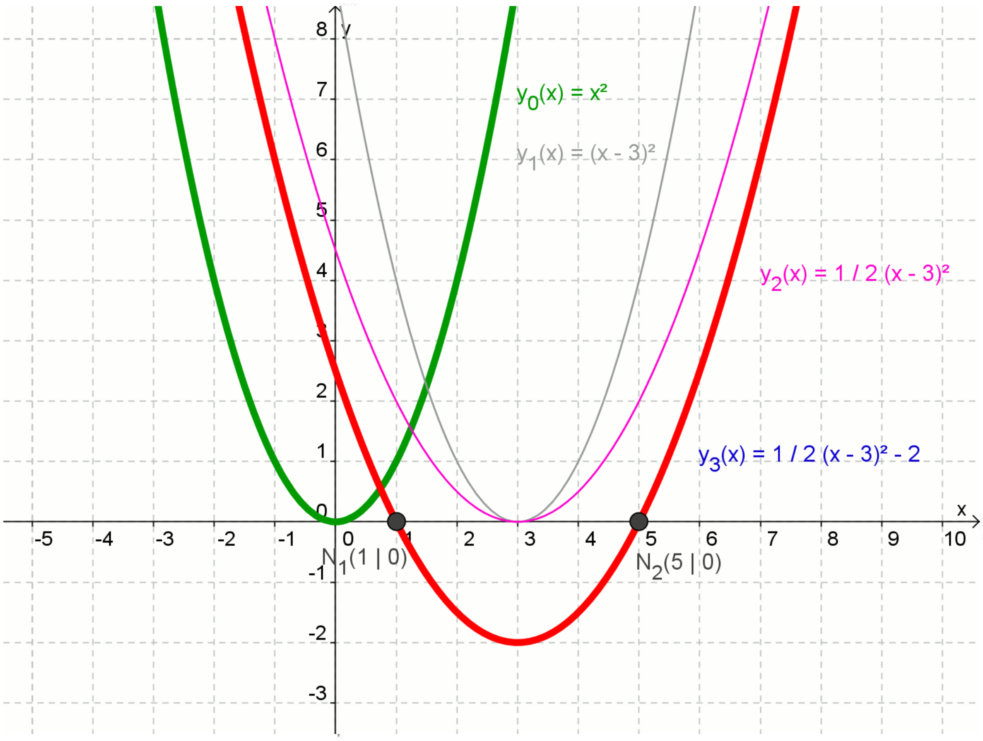
a) Geben Sie die Abfolge der einzelnen Transformationsschritte in Form einer Kette von Funktionsgleichungen an: $y = \ldots \rightarrow y = \ldots \rightarrow y = \ldots$

b) Notieren Sie für jeden Transformationsschritt **in Worten** seine Auswirkung auf den Graphen und skizzieren Sie den jeweils resultierenden Graphen. Verwenden Sie dazu verschiedene Farben.

c) Bestimmen Sie aus der Skizze die Nullstelle(n), den Definitions- und den Wertebereich der gezeichneten Funktion und geben Sie die Bereiche in korrekter Mengenschreibweise an.

$$y_0 = x^2 \xrightarrow{I} y_1 = (x-3)^2 \xrightarrow{II} y_2 = \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 \xrightarrow{III} y_3 = \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 - 2$$

I: Verschiebung in x-Richtung um +3 nach rechts
II: Stauchung in y-Richtung
III: Verschiebung in y-Richtung um -2 nach unten



Übung 3

Lösen Sie die Ungleichung $2 \cdot |x-2| > \left|-\frac{1}{2}x\right| + 2$ grafisch. Die beiden Funktionen sind mithilfe der Transformationsregeln zu zeichnen.