Einführung lineare Gleichungen

Lineare Gleichung

Eine Bestimmungsgleichung heisst **linear** (oder Gleichung ersten Grades), wenn sie auf folgende Form gebracht werden kann:

$ax + b = 0 \qquad a, b \in \mathbf{R}$

3 Beispiele: $3x + 2 = x - 1$ oder $3x = 7$ oder $x - 1 = 0$

Grundmenge G (Männel auf S. 97)

Die Menge, aus der man Zahlen zum Einsetzen für die Variablen nimmt, heisst **Grundmenge** oder **Grundbereich** G der Gleichung oder Ungleichung.
Wird zu einer Gleichung keine Grundmenge angegeben, so wird üblicherweise angenommen, dass sie gleich der Menge der reellen Zahlen ist: G = **R**.

Definitionsbereich D (Männel auf S. 103)

Die Menge der erlaubten Einsetzungen für die Variablen eines Terms nennt man **Definitionsmenge** oder **Definitionsbereich** D des Terms. Stehen zum Beispiel Variablen im Nenner eines Bruchterms, so kann es vorkommen, dass beim Einsetzen von Zahlen für die Variablen der Nenner den Wert 0 annimmt. Der Nenner darf den Wert 0 nicht annehmen, weil die Division mit 0 nicht definiert ist!

Bei der Bestimmung des Definitionsbereiches sind drei Fälle zu beachten:
a) Nenner ≠ Null
b) Radikand R einer Wurzel ≥ Null (d.h. $\sqrt[n]{R} \Rightarrow R \geq 0$)
c) Argument g eines Logarithmus > Null (d.h. $\ln(g) \Rightarrow g > 0$)

Beispiele: (G = **R**)

a) $\frac{4}{x} = \frac{5}{x+1}$ $\qquad D = \mathbf{R} \setminus \{0, -1\}$

b) $\sqrt{4x - 12} = 4$ $\qquad D = \{x \mid x \geq 3\}$

c) $\log x = 2$ $\qquad D = \{x \mid x > 0\}$

Lösungsmenge L (Männel auf S. 97)

Alle Einsetzungen für die Variable aus der der Grundmenge G, die eine Gleichung oder Ungleichung zu einer wahren Aussage machen, bilden die Lösungsmenge L.

teilgültig (Männel auf S. 99)

Gehört zur Lösungsmenge **wenigstens ein Element, aber nicht alle Elemente** des Grundbereiches, so ist die Gleichung bzw. Ungleichung **teilgültig**.

Beispiel: $x - 7 = 4$ $\qquad G = \mathbf{R}$

Lösung: $D = \mathbf{R}$

$x = 4 + 7 = \underline{11}$

$L = \underline{\underline{\{11\}}}$

allgemeingültig (Männel auf S. 99)

Gehören zur Lösungsmenge **alle Elemente** des Grundbereiches, so ist die Gleichung bzw. Ungleichung **allgemeingültig**.

Beispiel: $4x + 2x = 7x - x$ $\quad G = \mathbf{R}$

Lösung: $D = \mathbf{R}$

$6x = 6x$ $\quad$ (wahre Aussage)

$L = \underline{\underline{\mathbf{G}}}$ bzw. $L = \underline{\underline{\mathbf{R}}}$

unlösbar (Männel auf S. 99)

Gibt es kein Element des Grundbereiches, das die Aussageform zu einer wahren Aussage macht, so ist die Gleichung bzw. Ungleichung **unlösbar**.

Beispiel: $x + 5 = 2$ $\quad G = \mathbf{N}$

Lösung: $D = \mathbf{N}$

$x = 2 - 5$

$x = -3$ $\quad -3 \notin D$ $\;(-3$ ist keine natürliche Zahl$)$

$L = \underline{\underline{\{\ \}}}$

Achtung

Bei folgenden Umformungen einer Gleichung können Lösungen verlorengehen oder scheinbar Lösungen hinzukommen:

1. Wenn beide Seiten der Gleichung mit einem Term multipliziert oder dividiert werden, der die Variable enthält.
2. Wenn man auf beiden Seiten einen Term addiert oder subtrahiert, der die Variable im Nenner enthält.

Beispiel: $\frac{2x+1}{x+5} - \frac{2x-3}{x-5} = \frac{5 \cdot (1-3x)}{x^2-25}$ $\quad G = \mathbf{R}$

Lösung: $D = \mathbf{R} \setminus \{-5,\ 5\}$

$(2x+1)\cdot(x-5) - (2x-3)\cdot(x+5) = 5\cdot(1-3x)$

$2x^2 - 10x + x - 5 - (2x^2 + 10x - 3x - 15) = 5 - 15x$

$2x^2 - 10x + x - 5 - 2x^2 - 10x + 3x + 15 = 5 - 15x$

$-16x + 10 = 5 - 15x$

$x = \underline{5}$ $\quad 5 \notin D$

$L = \underline{\underline{\{\ \}}}$

x = 5 ist eine gültige Lösung der **umgeformten** Gleichung. Beim Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung, kommt es zur Division mit Null. Somit ist x = 5 eine scheinbare Lösung.

Die Lösungsmenge der **ursprünglichen** Gleichung ist leer!

Zusammenfassung

Aufgabenstellung

Bestimmen Sie die Lösungsmenge. (G = **R**)

$$\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-1} \qquad L = ?$$

Lösung:

Vorgehensschritte

1. Definitionsbereich D bestimmen (Hauptnenner $\neq$ 0):

$$\left.\begin{aligned} x+1\neq 0 &\rightarrow \underline{x\neq -1}\\ x-1\neq 0 &\rightarrow \underline{x\neq 1}\end{aligned}\right\}$$ Nenner $\neq 0$, da Division durch Null nicht erlaubt ist!

somit: $D=\mathbf{R}\setminus\{-1,\ 1\}$

2. Gleichnamig machen oder Multiplikation mit Hauptnenner:

$$\frac{x-1}{\cancel{(x+1)(x-1)}}=\frac{2(x+1)}{\cancel{(x+1)(x-1)}} \quad \text{oder} \quad \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}}=\frac{2(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

3. Lösung(en) der Gleichung bestimmen:

$$x-1=2(x+1)$$
$$x-1=2x+2$$
$$\underline{-3=x}$$

4. Lösung(en) mit D vergleichen und Lösungsmenge L bestimmen:

$$-3\in D \rightarrow \underline{\underline{L=\{-3\}}}$$

5. Probe: Lösungsmenge in **ursprüngliche** Gleichung einsetzen!

$$\frac{1}{\underbrace{-3+1}_{-\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\underbrace{-3-1}_{-\frac{1}{2}}} \rightarrow \text{Lösungsmenge ist korrekt!}$$

Hinweis: Werte einsetzen, Berechnung darf mit dem Taschenrechner erfolgen!

Aufgaben

Auftrag

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Aufgaben. G = **R**.
Kontrollieren Sie die Lösungsmenge!

1. $\frac{4x+1}{3}-\frac{7x-9}{8}=3x-\frac{5x-3}{2}$ (Männel, Aufg. 5a, S. 108)

2. $\frac{1}{3}-\frac{x}{4}-\frac{5}{6}+x=\frac{3x}{4}-\frac{1}{2}$ (Männel, Aufg. 8a, S. 109)

3. $\frac{4}{9}-\frac{x}{3}-\frac{13}{18}+x=\frac{2x}{3}-\frac{1}{6}$ (Männel, Aufg. 8b, S. 109)

4. $\frac{x-2}{3}-\frac{5x-3}{4}=\frac{4x+3}{6}-\frac{5}{12}$ (Männel, Aufg. 9a, S. 109)

5. $\frac{4x+5}{5}-\frac{x-1}{2}=\frac{8x+9}{10}-\frac{2x-3}{4}$ (Männel, Aufg. 9b, S. 109)

6. $\frac{x+1}{3}-\frac{x-1}{2}=\frac{x+1}{6}-\frac{x-2}{3}$ (Männel, Aufg. 10a, S. 109)

7. $\frac{2}{5x}+1=\frac{9}{10x}-\frac{1}{2x}$ (Männel, Aufg. 1c, S. 111)

8. $\frac{3}{x-3}=\frac{5}{x-5}$ (Männel, Aufg. 4a, S. 111)

9. $\frac{x+10}{x+2}=5-\frac{x-6}{x+2}$ (Männel, Aufg. 8c, S. 111)

10. Zum Nachdenken: (Arithmetik u. Algebra, Band 3, Sabe, Aufg. 441, S. 109)
    a) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$
    b) $\frac{2(x-x)}{3(x-x)}=\frac{2}{3}$
    c) $2x=3x$ (Internet)