

## 12 Quadratische Gleichungen

### 12.1 Rechnerische Lösung der reinquadratischen Gleichung $ax^2 + c = 0$

1. a)  $L = \{7; -7\}$     b)  $L = \{1; -1\}$     c)  $L = \left\{\frac{4}{5}; -\frac{4}{5}\right\}$     d)  $L = \left\{\frac{6}{11}; -\frac{6}{11}\right\}$   
 e)  $L = \{1,5; -1,5\}$     f)  $L = \{0,3; -0,3\}$     g)  $L = \{0,12; -0,12\}$     h)  $L = \{0,02; -0,02\}$
2. a)  $L = \{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\}$     b)  $L = \{2\sqrt{5}; -2\sqrt{5}\}$     c)  $L = \{5\sqrt{3}; -5\sqrt{3}\}$   
 d)  $L = \{10\sqrt{10}; -10\sqrt{10}\}$     e)  $L = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right\}$   
 f)  $L = \left\{\frac{3}{10}\sqrt{10}; -\frac{3}{10}\sqrt{10}\right\}$     g)  $L = \{0,5\sqrt{2}; -0,5\sqrt{2}\}$     h)  $L = \{0,2\sqrt{2}; -0,2\sqrt{2}\}$
3. a)  $L = \{5; -5\}$     b)  $L = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$     c)  $x^2 = -\frac{9}{4}; L = \emptyset$   
 d)  $L = \left\{\frac{1}{3}\sqrt{10}; -\frac{1}{3}\sqrt{10}\right\}$     e)  $x^2 = -\frac{1}{16}; L = \emptyset$   
 f)  $\left(5\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}\right) \quad L = \left\{\frac{5}{2}\sqrt{2}; -\frac{5}{2}\sqrt{2}\right\}$
4. a)  $L = \{2; -2\}$     b)  $L = \{6; -6\}$     c)  $L = \{1; -1\}$     d)  $L = \{3; -3\}$
5. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -2\}; L = \{-1\}$     b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}; L = \{4\}$
6. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{5; -3\}; L = \{-5\}$     b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2; -2\}; x^2 = -8; L = \emptyset$
7. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{4; -4\}; L = \{1; -1\}$     b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2; -2\}; L = \{0\}$
8. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{6; -6\}; x^2 = -1; L = \emptyset$     b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}; L = D$   
 Die Gleichung ist allgemeingültig bezüglich  $D$ . Es können also alle Zahlen aus  $\mathbb{R}$  mit Ausnahme der Zahlen 1 und  $-1$  in die Gleichung eingesetzt werden. Lassen Sie einige Proben durchführen, z. B. mit 0, 2 usw.!
9. a)  $L = \left\{x \mid x = \frac{a}{4} \vee x = -\frac{a}{4}\right\}$     b)  $L = \left\{x \mid x = \frac{a}{3}\sqrt{2} \vee x = -\frac{a}{3}\sqrt{2}\right\}$   
 c)  $L = \{x \mid x = 5a \vee x = -5a\}$     d)  $L = \left\{x \mid x = \frac{2a}{3} \vee x = -\frac{2a}{3}\right\}$
10. a)  $L = \{x \mid x = a + 2 \vee x = -(a + 2)\}$     b)  $L = \{x \mid x = 3a - b \vee x = -(3a - b)\}$   
 c)  $L = \{x \mid x = \sqrt{a^2 + b^2} \vee x = -\sqrt{a^2 + b^2}\}$
11. a)  $b \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq b$   
 1. bei  $a + b > 0; L = \{x \mid x = \sqrt{a+b} \vee x = -\sqrt{a+b}\}$     2. bei  $a + b = 0; L = \{0\}$   
 3. bei  $a + b < 0; L = \emptyset$   
 b)  $x \neq -a \wedge x \neq -b$   
 1. bei  $ab > 0; L = \{x \mid x = \sqrt{ab} \vee x = -\sqrt{ab}\}$     2. bei  $a = 0$  oder  $b = 0$  wird  $x = 0$ ; damit wird mindestens ein Nenner zu null, deshalb  $L = \emptyset$     3. bei  $ab < 0; L = \emptyset$   
 c)  $x \neq a \wedge x \neq b \wedge a \neq b; x^2 = 1; L = \{1; -1\}$   
 Probe mit (+1):  $T_1 = \frac{1-a}{a-1} = -1; T_2 = \frac{1-b}{b-1} = -1$   
 Probe mit (-1):  $T_1 = \frac{1+a}{a+1} = 1; T_2 = \frac{1+b}{b+1} = 1$

12.  $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{5} = 15$ ;  $L = \{15\}$        $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{5} = 135$ ;  $L = \{45\}$
13.  $4x \cdot \frac{x}{3} = 48$ ;  $L = \{6\}$        $4x \cdot \frac{x}{3} = 108$ ;  $L = \{9\}$
14.  $\frac{54}{x} = 6x$ ;  $L = \{3\}$        $\frac{96}{x} = 6x$ ;  $L = \{4\}$
15.  $\frac{x}{16} = \frac{1}{x}$ ;  $L = \{4\}$        $\frac{x}{4} = \frac{1}{x}$ ;  $L = \{2\}$
16. a)  $9 : x = x : 49$ ;  $L = \{21; -21\}$       b)  $\frac{1}{3} : x = x : \frac{16}{3}$ ;  $L = \left\{ \frac{4}{3}; -\frac{4}{3} \right\}$
17. Die kleinere Zahl sei  $x$ ; die größere Zahl ist  $(x + 1)$ .  
 $x \cdot (x + 1) = x + 9$ ;  $L = \{3\}$  · 3 und 4 sind die gesuchten Zahlen.  
 Bei ganzen Zahlen ist  $L = \{3; -3\}$ . Es kommen  $-3$  und  $-2$  als Lösung hinzu.

## 12.2 Rechnerische Lösung der gemischtquadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

### 12.2.1 Lösung durch quadratische Ergänzung

1. a)  $x^2 + 6x + 5 = 0$       b)  $x^2 + 8x - 9 = 0$       c)  $x^2 - 4x - 12 = 0$   
 $L = \{-1; -5\}$        $L = \{1; -9\}$        $L = \{6; -2\}$
- d)  $x^2 + 1,8x - 0,4 = 0$       e)  $x^2 + 0,8x - 0,2 = 0$       f)  $x^2 - 1,2x + 0,2 = 0$   
 $L = \{0,2; -2\}$        $L = \{0,2; -1\}$        $L = \{1; 0,2\}$
- g)  $x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$       h)  $x^2 - 2x - \frac{5}{4} = 0$       i)  $x^2 + 4x + \frac{7}{4} = 0$   
 $L = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right\}$        $L = \left\{ \frac{5}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$        $L = \left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{7}{2} \right\}$
2. a)  $L = \{-2; -10\}$       b)  $L = \{2; -8\}$       c)  $L = \{5; -1\}$       d)  $L = \{4\}$   
 e)  $x + 2 = \pm\sqrt{-1}$ ;  $L = \emptyset$       f)  $L = \{11; -1\}$
3. a)  $L = \{-0,2; -1\}$       b)  $L = \{1,8; -0,2\}$       c)  $x - 0,7 = \pm\sqrt{-0,01}$ ;  $L = \emptyset$   
 d)  $L = \{-0,4\}$       e)  $L = \{1,5; -0,5\}$       f)  $L = \{0,4; -2\}$
4. a)  $L = \left\{ \frac{2}{3}; -1 \right\}$       b)  $x - \frac{1}{4} = \pm\sqrt{-\frac{9}{16}}$ ;  $L = \emptyset$       c)  $L = \left\{ \frac{5}{4}; -\frac{1}{2} \right\}$   
 d)  $L = \left\{ 1; -\frac{1}{3} \right\}$       e)  $L = \left\{ \frac{3}{5}; -1 \right\}$       f)  $L = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$
5. a)  $L = \{0; -4\}$       b)  $L = \{0; 1\}$       c)  $L = \{0; 7\}$       d)  $L = \left\{ 0; -\frac{2}{3} \right\}$   
 e)  $L = \left\{ 0; \frac{1}{2} \right\}$       f)  $L = \left\{ 0; \frac{3}{2} \right\}$       g)  $L = \{0; 3\}$       h)  $L = \left\{ 0; -\frac{3}{2} \right\}$       i)  $L = \left\{ 0; -\frac{3}{5} \right\}$
6. a)  $L = \{-4\}$       b)  $L = \{5\}$       c)  $L = \{1\}$       d)  $L = \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$       e)  $L = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$   
 f)  $L = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$       g)  $L = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$       h)  $L = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$       i)  $L = \left\{ \frac{8}{9} \right\}$

## 12.2.2 Lösung mithilfe von Formeln

1. a)  $L = \{-1; -7\}$       b)  $L = \{1; -11\}$       c)  $L = \{4; -2\}$

2. a)  $L = \{11; 1\}$       b)  $L = \{2; -6\}$       c)  $L = \{10; -2\}$

3. a)  $L = \left\{\frac{1}{2}; -1\right\}$       b)  $L = \left\{\frac{5}{3}; -1\right\}$       c)  $L = \left\{1; -\frac{3}{4}\right\}$

5. a)  $L = \{2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$

$$T_1(x_1) = (2 + \sqrt{2})^2 - 4(2 + \sqrt{2}) + 2 = 4 + 4\sqrt{2} + 2 - 8 - 4\sqrt{2} + 2 = 0$$

$$T_1(x_2) = (2 - \sqrt{2})^2 - 4(2 - \sqrt{2}) + 2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 - 8 + 4\sqrt{2} + 2 = 0$$

b)  $L = \{-3 + \sqrt{3}; -3 - \sqrt{3}\}$

$$T_1(x_1) = (-3 + \sqrt{3})^2 + 6(-3 + \sqrt{3}) + 6 = 9 - 6\sqrt{3} + 3 - 18 + 6\sqrt{3} + 6 = 0$$

$$T_1(x_2) = (-3 - \sqrt{3})^2 + 6(-3 - \sqrt{3}) + 6 = 9 + 6\sqrt{3} + 3 - 18 - 6\sqrt{3} + 6 = 0$$

c)  $L = \{1 + \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}\}$

$$T_1(x_1) = (1 + \sqrt{5})^2 - 2(1 + \sqrt{5}) - 4 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2 - 2\sqrt{5} - 4 = 0$$

$$T_1(x_2) = (1 - \sqrt{5})^2 - 2(1 - \sqrt{5}) - 4 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 - 2 + 2\sqrt{5} - 4 = 0$$

d)  $L = \{-4 + \sqrt{10}; -4 - \sqrt{10}\}$

$$T_1(x_1) = 2(-4 + \sqrt{10})^2 + 16(-4 + \sqrt{10}) + 12 = 32 - 16\sqrt{10} + 20 - 64 + 16\sqrt{10} + 12 = 0$$

$$T_1(x_2) = 2(-4 - \sqrt{10})^2 + 16(-4 - \sqrt{10}) + 12 = 32 + 16\sqrt{10} + 20 - 64 - 16\sqrt{10} + 12 = 0$$

e)  $L = \{3 + 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}\}$

$$T_1(x_1) = \frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2})^2 - 3(3 + 2\sqrt{2}) + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} + 6\sqrt{2} + 4 - 9 - 6\sqrt{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$T_1(x_2) = \frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{2})^2 - 3(3 - 2\sqrt{2}) + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 6\sqrt{2} + 4 - 9 + 6\sqrt{2} + \frac{1}{2} = 0$$

f)  $L = \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right\}$

$$T_1(x_1) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} = 0$$

$$T_1(x_2) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} = 0$$

6. In folgenden Lösungen wurde die Diskriminante nach  $D = b^2 - 4ac$  bestimmt:

a)  $D = 100 - 96 = 4$

$x_1 \neq x_2; L = \{6; 4\}$

b)  $D = 36 - 40 = -4$

Keine Lösung in der Menge  $\mathbb{R}$ .  $L = \emptyset$ 

c)  $D = 64 - 64 = 0$

$x_1 = x_2; L = \{4\}$

d)  $x^2 - 2x + 4 = 0$

$D = 4 - 16 = -12$

Keine Lösung in der Menge  $\mathbb{R}$ .  $L = \emptyset$ 

e)  $x^2 + 10x + 25 = 0$

$D = 100 - 100 = 0$

$x_1 = x_2; L = \{-5\}$

f)  $x^2 - 6x - 40 = 0$

$D = 36 + 160 = 196$

$x_1 \neq x_2; L = \{10; -4\}$

7. In den folgenden Lösungen wurde die Diskriminante nach  $D = b^2 - 4ac$  bestimmt:

a)  $D = 4 - 40 = -36$   
Keine Lösung in  $\mathbb{R}$ .  
 $L = \emptyset$

b)  $D = 16 - 16 = 0$   
 $x_1 = x_2; L = \{2\}$

c)  $D = 64 - 60 = 4$   
 $x_1 \neq x_2; L = \{-5; -3\}$

d)  $x^2 + 12x + 36 = 0$   
 $D = 144 - 144 = 0$   
 $x_1 = x_2; L = \{-6\}$

e)  $D = 49 + 32 = 81$   
 $x_1 \neq x_2; L = \left\{2; -\frac{1}{4}\right\}$

f)  $D = 36 - 72 = -36$   
Keine Lösung in  $\mathbb{R}$ .  
 $L = \emptyset$

### 12.2.3 Satz von Vieta. Zerlegen in Linearfaktoren

1. a)  $p = 6; q = -7$   
 $x^2 + 6x - 7 = 0$

b)  $p = -10; q = 9$   
 $x^2 - 10x + 9 = 0$

c)  $p = -8; q = -20$   
 $x^2 - 8x - 20 = 0$

d)  $p = 12; q = 11$   
 $x^2 + 12x + 11 = 0$

e)  $p = -2; q = -8$   
 $x^2 - 2x - 8 = 0$

f)  $p = 2; q = 1$   
 $x^2 + 2x + 1 = 0$

g)  $p = -1; q = -\frac{3}{4}$

h)  $p = \frac{3}{4}; q = -\frac{5}{8}$

i)  $p = -\frac{5}{6}; q = \frac{1}{9}$

$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$

$x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{8} = 0$

$x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{9} = 0$

$4x^2 - 4x - 3 = 0$

$8x^2 + 6x - 5 = 0$

$18x^2 - 15x + 2 = 0$

2. a)  $p = -4; q = 4 - 3 = 1$   
 $x^2 - 4x + 1 = 0$

b)  $p = 2; q = 1 - 6 = -5$   
 $x^2 + 2x - 5 = 0$

c)  $p = -\frac{1}{2}; q = \frac{1}{16} - \frac{5}{16} = -\frac{1}{4}$

d)  $p = \frac{2}{3}; q = \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{9}$

$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$

$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} = 0$

$4x^2 - 2x - 1 = 0$

$9x^2 + 6x - 1 = 0$

3. a)  $(x + 2)(x + 4) = 0$   
 $L = \{-2; -4\}$

b)  $(x + 1)(x + 7) = 0$   
 $L = \{-1; -7\}$

c)  $(x - 4)(x - 3) = 0$   
 $L = \{4; 3\}$

d)  $(x - 6)(x - 4) = 0$   
 $L = \{6; 4\}$

e)  $(x - 7)(x + 3) = 0$   
 $L = \{7; -3\}$

f)  $(x - 2)(x + 1) = 0$   
 $L = \{2; -1\}$

g)  $(x - 4)(x + 5) = 0$   
 $L = \{4; -5\}$

h)  $(x - 2)(x + 6) = 0$   
 $L = \{2; -6\}$

i)  $(x - 8)(x + 3) = 0$   
 $L = \{8; -3\}$

4. a)  $x^2 + 6x + 5 = 0$   
 $(x + 1)(x + 5) = 0$   
 $L = \{-1; -5\}$

b)  $x^2 - 9x + 18 = 0$   
 $(x - 6)(x - 3) = 0$   
 $L = \{6; 3\}$

c)  $x^2 - 4x + 3 = 0$   
 $(x - 3)(x - 1) = 0$   
 $L = \{3; 1\}$

d)  $x^2 - 4x - 32 = 0$   
 $(x - 8)(x + 4) = 0$   
 $L = \{8; -4\}$

e)  $x^2 + 6x - 27 = 0$   
 $(x - 3)(x + 9) = 0$   
 $L = \{3; -9\}$

f)  $x^2 + 2x - 8 = 0$   
 $(x - 2)(x + 4) = 0$   
 $L = \{2; -4\}$

## 12.2.4 Vermischte Aufgaben

1. a)  $x^2 - 2x - 3 = 0$   
 $L = \{3; -1\}$
- b)  $x^2 + 4x - 5 = 0$   
 $L = \{1; -5\}$
- c)  $x^2 - 3x + 2 = 0$   
 $L = \{2; 1\}$
- d)  $x^2 - 8x + 16 = 0$   
 $D = 0; x_1 = x_2 = 4$   
 $L = \{4\}$
- e)  $x^2 + 2x + 2 = 0$   
 $x + 1 = \pm \sqrt{-1};$   
 $L = \emptyset$
- f)  $2x^2 + 5x - 3 = 0$   
 $L = \left\{\frac{1}{2}; -3\right\}$
2. a)  $x^2 + 14x + 24 = 0$   
 $L = \{-2; -12\}$
- b)  $x^2 - 4x + 4 = 0$   
 $D = 0; x_1 = x_2 = 2$   
 $L = \{2\}$
- c)  $x^2 - 16x + 15 = 0$   
 $L = \{15; 1\}$
- d)  $2x^2 - x - 3 = 0$   
 $L = \left\{\frac{3}{2}; -1\right\}$
- e)  $x^2 + 2x + 5 = 0$   
 $x + 1 = \pm \sqrt{-4}; L = \emptyset$
- f)  $x^2 - x - 6 = 0$   
 $L = \{3; -2\}$
3. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}; x^2 - 8x + 16 = 0; x_1 = x_2 = 4; L = \{4\}$
- b)  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}; x^2 - 3x + 2 = 0; L = \{2; 1\}$
4. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}; x^2 + 2x - 3 = 0; L = \{1; -3\}$
- b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}; x^2 + 4x + 5 = 0; x + 2 = \pm \sqrt{-1}; L = \emptyset$
5. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 5\}; 2x^2 - 7x + 6 = 0; L = \left\{2; \frac{3}{2}\right\}$
- b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}; x^2 - 5x = 0; L = \{0; 5\}$
6. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{3; -3\}; x^2 - 6x + 9 = 0; x_1 = x_2 = 3; 3 \notin D; L = \emptyset$
- b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{4; -4\}; x^2 - 16x + 48 = 0; x_1 = 12; x_2 = 4; 4 \notin D; L = \{12\}$
7. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}; x^2 - 4x + 3 = 0; x_1 = 3; x_2 = 1; 1 \notin D; L = \{3\}$
- b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{5; -5\}; x^2 - 10x + 25 = 0; x_1 = x_2 = 5; 5 \notin D; L = \emptyset$
8. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 0\}; x^2 - 2x + 1 = 0; x_1 = x_2 = 1; L = \{1\}$
- b)  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 0\right\}; x^2 + 3x + 2 = 0; L = \{-1; -2\}$
9. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2; -2\}; x^2 + 10x = x^2 + 10x; L = D$   
Zur Lösungsmenge gehören alle Zahlen aus  $\mathbb{R}$  mit Ausnahme der Zahlen 2 und  $-2$ .  
Lassen Sie einige Proben durchführen, z.B. mit 0, 1 usw.
- b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{3; -3\}; x^2 + 15x = x^2 + 15x; L = D$   
Zur Lösungsmenge gehören alle Zahlen aus  $\mathbb{R}$  mit Ausnahme der Zahlen 3 und  $-3$ .  
Lassen Sie einige Proben durchführen, z.B. mit 0, 1 usw.
10. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}; x^2 + 2x - 3 = 0; x_1 = 1; x_2 = -3; 1 \notin D, -3 \notin D; L = \emptyset$
- b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{3; 4\}; x^2 - 4x = 0; x_1 = 0; x_2 = 4; 4 \notin D; L = \{0\}$
11. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}; x^2 - 3x = 0; x_1 = 0; x_2 = 3; 3 \notin D; L = \{0\}$
- b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 2\}; x^2 + 3x - 10 = 0; x_1 = 2; x_2 = -5; 2 \notin D; L = \{-5\}$
12. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{3; 2; -1\}; x^2 - 4x + 3 = 0; x_1 = 3; x_2 = 1; 3 \notin D; L = \{1\}$
- b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{0; -3; 5\}; x^2 + 2x - 3 = 0; x_1 = 1; x_2 = -3; -3 \notin D; L = \{1\}$

13. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1; 3\}$ ;  $x^2 - x - 6 = 0$ ;  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = -2$ ;  $3, -2 \notin D$ ;  $L = \emptyset$   
 b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 2\}$ ;  $x^2 + 2x - 15 = 0$ ;  $x_1 = -5$ ;  $x_2 = 3$ ;  $L = \{-5; 3\}$

14. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 2\}$ ;  $x^2 - 2x - 3 = 0$ ;  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = -1$ ;  $-1 \notin D$ ;  $L = \{3\}$   
 b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$ ;  $x^2 - 11x + 18 = 0$ ;  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 9$ ;  $L = \{2; 9\}$

15. a)  $\frac{p}{2} = a$ ;  $q = -8a^2$

$$x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}$$

$$x_{1,2} = -a \pm 3a$$

$$x_1 = 2a; \quad x_2 = -4a$$

$$L = \{x \mid x = 2a \vee x = -4a\}$$

c)  $a = 2$ ;  $b = a$ ;  $c = -a^2$

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm 3a}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}a; \quad x_2 = -a$$

$$L = \left\{x \mid x = \frac{1}{2}a \vee x = -a\right\}$$

b)  $4x^2 - 4bx - 3b^2 = 0$

$$a = 4; \quad b = -4b; \quad c = -3b^2$$

$$x_{1,2} = \frac{4b \pm \sqrt{16b^2 + 48b^2}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{4b \pm 8b}{8}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}b; \quad x_2 = -\frac{1}{2}b$$

$$L = \left\{x \mid x = \frac{3}{2}b \vee x = -\frac{1}{2}b\right\}$$

d)  $a = 2$ ;  $b = -5b$ ;  $c = 3b^2$

$$x_{1,2} = \frac{5b \pm \sqrt{25b^2 - 24b^2}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{5b \pm b}{4}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}b; \quad x_2 = b$$

$$L = \left\{x \mid x = \frac{3}{2}b \vee x = b\right\}$$

16. a)  $\frac{p}{2} = -2$ ;  $q = -a^2 + 4$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + a^2 - 4}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm a$$

$$x_1 = a + 2; \quad x_2 = 2 - a$$

$$L = \{x \mid x = a + 2 \vee x = 2 - a\}$$

b)  $\frac{p}{2} = -b$ ;  $q = -a^2 + b^2$

$$x_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 + a^2 - b^2}$$

$$x_{1,2} = b \pm a$$

$$x_1 = a + b; \quad x_2 = b - a$$

$$L = \{x \mid x = a + b \vee x = b - a\}$$

c)  $\frac{p}{2} = -2$ ;  $q = -a^2 + 6a - 5$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + a^2 - 6a + 5}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{a^2 - 6a + 9}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm (a - 3)$$

$$x_1 = a - 1; \quad x_2 = 5 - a$$

$$L = \{x \mid x = a - 1 \vee x = 5 - a\}$$

d)  $\frac{p}{2} = 3$ ;  $q = -b^2 - 8b - 7$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + b^2 + 8b + 7}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{b^2 + 8b + 16}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm (b + 4)$$

$$x_1 = b + 1; \quad x_2 = -b - 7$$

$$L = \{x \mid x = b + 1 \vee x = -b - 7\}$$

17. a)  $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$

$$a = 1; \quad b = -3a; \quad c = 2a^2$$

$$x_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3a \pm a}{2}$$

$$x_1 = 2a; \quad x_2 = a$$

$$L = \{x \mid x = 2a \vee x = a\}$$

b)  $x^2 - bx - 2b^2 = 0$

$$a = 1; \quad b = -b; \quad c = -2b^2$$

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 8b^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{b \pm 3b}{2}$$

$$x_1 = 2b; \quad x_2 = -b$$

$$L = \{x \mid x = 2b \vee x = -b\}$$

c)  $3x^2 - 2ax - 5a^2 = 0$

$a = 3; \quad b = -2a; \quad c = -5a^2$

$$x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 60a^2}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{2a \pm 8a}{6}$$

$x_1 = \frac{5}{3}a; \quad x_2 = -a$

$$L = \left\{ x \mid x = \frac{5}{3}a \vee x = -a \right\}$$

d)  $3x^2 - bx - 2b^2 = 0$

$a = 3; \quad b = -b; \quad c = -2b^2$

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 24b^2}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{b \pm 5b}{6}$$

$x_1 = b; \quad x_2 = -\frac{2}{3}b$

$$L = \left\{ x \mid x = b \vee x = -\frac{2}{3}b \right\}$$

18. a)  $a \neq 0 \wedge x \neq 0$

$2x^2 - 5ax + 2a^2 = 0$

$a = 2; \quad b = -5a; \quad c = 2a^2$

$$x_{1,2} = \frac{5a \pm \sqrt{25a^2 - 16a^2}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{5a \pm 3a}{4}$$

$x_1 = 2a; \quad x_2 = \frac{1}{2}a$

$$L = \left\{ x \mid x = 2a \vee x = \frac{1}{2}a \right\}$$

b)  $b \neq 0 \wedge x \neq 0$

$3x^2 - 8bx - 3b^2 = 0$

$a = 3; \quad b = -8b; \quad c = -3b^2$

$$x_{1,2} = \frac{8b \pm \sqrt{64b^2 + 36b^2}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{8b \pm 10b}{6}$$

$x_1 = 3b; \quad x_2 = -\frac{1}{3}b$

$$L = \left\{ x \mid x = 3b \vee x = -\frac{1}{3}b \right\}$$

c)  $a \neq 0 \wedge x \neq 0$

$4x^2 - 3ax - a^2 = 0$

$a = 4; \quad b = -3a; \quad c = -a^2$

$$x_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 + 16a^2}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{3a \pm 5a}{8}$$

$x_1 = a; \quad x_2 = -\frac{1}{4}a$

$$L = \left\{ x \mid x = a \vee x = -\frac{1}{4}a \right\}$$

19. a)  $a \neq 1 \wedge x \neq 0$

$x^2 + ax - 2x + 1 - a = 0$

$x^2 + x(a-2) + 1 - a = 0$

$a = 1; \quad b = a - 2; \quad c = 1 - a$

$$x_{1,2} = \frac{2 - a \pm \sqrt{4 - 4a + a^2 - 4 + 4a}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 - a \pm a}{2}$$

$x_1 = 1; \quad x_2 = 1 - a$

$$L = \{ x \mid x = 1 \vee x = 1 - a \}$$

b)  $b \neq 0 \wedge x \neq 0$

$bx^2 - x - b^2x + b = 0$

$bx^2 - x(1 + b^2) + b = 0$

$a = b; \quad b = -1 - b^2; \quad c = b$

$$x_{1,2} = \frac{1 + b^2 \pm \sqrt{1 + 2b^2 + b^4 - 4b^2}}{2b}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 + b^2 \pm \sqrt{1 - 2b^2 + b^4}}{2b}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 + b^2 \pm (1 - b^2)}{2b}$$

$x_1 = \frac{1}{b}; \quad x_2 = b$

$$L = \left\{ x \mid x = \frac{1}{b} \vee x = b \right\}$$

c)  $a \neq 0 \wedge x \neq 0$

$ax^2 - 2x - a^2x + 2a = 0$

$ax^2 - x(2 + a^2) + 2a = 0$

$a = a; \quad b = -2 - a^2; \quad c = 2a$

$$x_{1,2} = \frac{2 + a^2 \pm \sqrt{4 + 4a^2 + a^4 - 8a^2}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 + a^2 \pm \sqrt{4 - 4a^2 + a^4}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 + a^2 \pm (2 - a^2)}{2a}$$

$x_1 = \frac{2}{a}; \quad x_2 = a$

$$L = \left\{ x \mid x = \frac{2}{a} \vee x = a \right\}$$

20. a)  $a \neq b \wedge x \neq 0$

$$x^2 - bx - a^2 + ab = 0$$

$$a = 1; \quad b = -b; \quad c = -a^2 + ab$$

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 - 4ab}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{b \pm (b - 2a)}{2}$$

$$x_1 = b - a; \quad x_2 = a$$

$$L = \{x | x = b - a \vee x = a\}$$

b)  $x \neq a + b \wedge b \neq 0$

$$x^2 - ax + ab - b^2 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -a; \quad c = ab - b^2$$

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{a \pm (a - 2b)}{2}$$

$$x_1 = a - b; \quad x_2 = b$$

$$L = \{x | x = a - b \vee x = b\}$$

c)  $a \neq b \wedge x \neq 0$

$$x^2 + ax - 2bx - ab + b^2 = 0$$

$$x^2 + x(a - 2b) - ab + b^2 = 0$$

$$a = 1; \quad b = a - 2b; \quad c = -ab + b^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2b - a \pm \sqrt{4b^2 - 4ab + a^2 + 4ab - 4b^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2b - a \pm \sqrt{a^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2b - a \pm a}{2}$$

$$x_1 = b; \quad x_2 = b - a$$

$$L = \{x | x = b \vee x = b - a\}$$

21. a)  $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

$$x^2 - x(3a + 2b) + 6ab = 0$$

$$a = 1; \quad b = -3a - 2b; \quad c = 6ab$$

$$x_{1,2} = \frac{3a + 2b \pm \sqrt{9a^2 + 12ab + 4b^2 - 24ab}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3a + 2b \pm \sqrt{9a^2 - 12ab + 4b^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3a + 2b \pm (3a - 2b)}{2}$$

$$x_1 = 3a; \quad x_2 = 2b$$

$$L = \{x | x = 3a \vee x = 2b\}$$

b)  $a \neq 0$

$$x^2 + 3ax - 3ab - b^2 = 0$$

$$a = 1; \quad b = 3a; \quad c = -3ab - b^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2 + 12ab + 4b^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3a \pm (3a + 2b)}{2}$$

$$x_1 = b; \quad x_2 = -3a - b$$

$$L = \{x | x = b \vee x = -3a - b\}$$

22. a)  $x \neq -a \wedge x \neq 0; \quad \text{HN } x(a+x)$

$$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -2a; \quad c = a^2 - 1$$

$$x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2a \pm 2}{2}$$

$$x_1 = a + 1; \quad x_2 = a - 1$$

$$L = \{x | x = a + 1 \vee x = a - 1\}$$

b)  $b \neq 0 \wedge x \neq \frac{a}{2}$

$$4x^2 - 4bx - a^2 + b^2 = 0$$

$$a = 4; \quad b = -4b; \quad c = -a^2 + b^2$$

$$x_{1,2} = \frac{4b \pm \sqrt{16b^2 + 16a^2 - 16b^2}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{4b \pm 4a}{8}$$

$$x_1 = \frac{a+b}{2}; \quad x_2 = \frac{b-a}{2}$$

$$L = \left\{ x \mid x = \frac{a+b}{2} \vee x = \frac{b-a}{2} \right\}$$



$$23. \quad a) \quad x_2 = \frac{q}{x_1}; \quad x_2 = \frac{6}{2} = 3$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0; \quad k = 5$$

$$c) \quad x_2 = \frac{12}{-3} = -4$$

$$(x+3)(x+4) = 0$$

$$x^2 + 7x + 12 = 0; \quad k = 7$$

$$24. \quad a) \quad x_2 = -p - x_1$$

$$x_2 = -(-4) - 1 = 3$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0; \quad k = 3$$

$$c) \quad x_2 = -5 - (-2) = -3$$

$$(x+2)(x+3) = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0; \quad k = 6$$

$$b) \quad x_2 = \frac{-15}{5} = -3$$

$$(x-5)(x+3) = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0; \quad k = 2$$

$$d) \quad x_2 = \frac{-12}{-6} = 2$$

$$(x+6)(x-2) = 0$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0; \quad k = 4$$

$$b) \quad x_2 = -(-2) - 4 = -2$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0; \quad k = 8$$

$$d) \quad x_2 = -6 - (-7) = 1$$

$$(x+7)(x-1) = 0$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0; \quad k = 7$$

## 12.3 Textaufgaben aus verschiedenen Gebieten

### 12.3.1 Zahlenrätsel

$$1. \quad a) \quad x^2 + x = 30$$

$$x^2 + x - 30 = 0$$

$$a = 1; \quad b = 1; \quad c = -30$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 11}{2}$$

$$\underline{x_1 = 5}; \quad \underline{x_2 = -6}$$

$$2. \quad a) \quad x(x+4) = 21$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$\frac{p}{2} = 2; \quad q = -21$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 21}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 5$$

$$\underline{x_1 = 3}; \quad \underline{x_2 = -7}$$

$$3 \text{ und } 7; \quad -7 \text{ und } -3$$

$$b) \quad x^2 - 42 = x$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -1; \quad c = -42$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 168}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 13}{2}$$

$$\underline{x_1 = 7}; \quad \underline{x_2 = -6}$$

$$b) \quad x(x-5) = 36$$

$$x^2 - 5x - 36 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -5; \quad c = -36$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 13}{2}$$

$$\underline{x_1 = 9}; \quad \underline{x_2 = -4}$$

$$9 \text{ und } 4; \quad -4 \text{ und } -9$$

3. a)  $x(x+1) = 56$   
 $x^2 + x - 56 = 0$   
 $a = 1; b = 1, c = -56$   
 $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2}$   
 $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 15}{2}$   
 $x_1 = 7$ ;  $x_2 = -8$   
 7 und 8; -8 und -7
- b)  $x(x+1) = 132$   
 $x^2 + x - 132 = 0$   
 $a = 1; b = 1; c = -132$   
 $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 528}}{2}$   
 $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 23}{2}$   
 $x_1 = 11$ ;  $x_2 = -12$   
 11 und 12; -12 und -11
4. a) Der eine Faktor sei  $x$ , dann ist der andere Faktor  $(14 - x)$ .  
 $x(14 - x) = 48$   
 $x^2 - 14x + 48 = 0$   
 $\frac{p}{2} = -7; q = 48$   
 $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 - 48}$   
 $x_{1,2} = 7 \pm 1$   
 $x_1 = 8$ ;  $x_2 = 6$   
 8 und 6
- b) Der größere Faktor sei  $x$ , dann ist der kleinere  $(x - 8)$ .  
 $x(x - 8) = 48$   
 $x^2 - 8x - 48 = 0$   
 $\frac{p}{2} = -4; q = -48$   
 $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 + 48}$   
 $x_{1,2} = 4 \pm 8$   
 $x_1 = 12$ ;  $x_2 = -4$   
 12 und 4; -4 und -12
5. a) Der eine Summand sei  $x$ , dann ist der andere Summand  $(8 - x)$   
 $x^2 + (8 - x)^2 = 40$   
 $x^2 - 8x + 12 = 0$   
 $\frac{p}{2} = -4; q = 12$   
 $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12}$   
 $x_{1,2} = 4 \pm 2$   
 $x_1 = 6$ ;  $x_2 = 2$   
 6 und 2
- b) Der eine Summand sei  $x$ , dann ist der andere Summand  $(12 - x)$   
 $x^2 + (12 - x)^2 = 90$   
 $x^2 - 12x + 27 = 0$   
 $\frac{p}{2} = -6; q = 27$   
 $x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 27}$   
 $x_{1,2} = 6 \pm 3$   
 $x_1 = 9$ ;  $x_2 = 3$   
 9 und 3
6. a)  $(11 - x)(9 - x) = 35$   
 $x^2 - 20x + 64 = 0$   
 $\frac{p}{2} = -10; q = 64$   
 $x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64}$   
 $x_{1,2} = 10 \pm 6$   
 $x_1 = 16$ ;  $x_2 = 4$
- b)  $(17 - x)(23 - x) = 160$   
 $x^2 - 40x + 231 = 0$   
 $\frac{p}{2} = -20; q = 231$   
 $x_{1,2} = 20 \pm \sqrt{400 - 231}$   
 $x_{1,2} = 20 \pm 13$   
 $x_1 = 33$ ;  $x_2 = 7$

7. a)  $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$a = 2; \quad b = -5; \quad c = 2$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$\underline{x_1 = 2}; \quad \underline{x_2 = \frac{1}{2}}$$

$$2 \text{ und } \frac{1}{2}$$

b)  $x + \frac{1}{x} = \frac{29}{10}$

$$10x^2 - 29x + 10 = 0$$

$$a = 10; \quad b = -29; \quad c = 10$$

$$x_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{20}$$

$$x_{1,2} = \frac{29 \pm 21}{20}$$

$$\underline{x_1 = \frac{5}{2}}; \quad \underline{x_2 = \frac{2}{5}}$$

$$\frac{5}{2} \text{ und } \frac{2}{5}$$

8. a) Der Zähler sei  $x$ .

$$\frac{x}{x+3} + \frac{x+3}{x} = \frac{5}{2}$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$a = 1; \quad b = 3; \quad c = -18$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 9}{2}$$

$$\underline{x_1 = 3}; \quad \underline{x_2 = -6}$$

$$\frac{3}{6} \text{ und } \frac{-6}{-3}$$

b)  $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = \frac{34}{15}$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$\frac{p}{2} = 1; \quad q = -15$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 15}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm 4$$

$$\underline{x_1 = 3}; \quad \underline{x_2 = -5}$$

$$\frac{3}{5} \text{ und } \frac{-5}{-3}$$

### 12.3.2 Aufgaben aus der Geometrie

1. a) Die kleinere Seite sei  $x$  cm, dann ist die größere  $(x + 3)$  cm.

$$x(x + 3) = 54$$

$$x^2 + 3x - 54 = 0$$

$$a = 1; \quad b = 3; \quad c = -54$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 216}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 15}{2}$$

$$\underline{x_1 = 6}; \quad \underline{x_2 = -9} \text{ (keine Lösung)}$$

$$6 \text{ cm und } 9 \text{ cm}$$

b) Die kleinere Seite sei  $x$  cm, dann ist die größere  $(x + 4)$  cm.

$$x(x + 4) = 96$$

$$x^2 + 4x - 96 = 0$$

$$\frac{p}{2} = 2; \quad q = -96$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 96}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 10$$

$$\underline{x_1 = 8}; \quad \underline{x_2 = -12} \text{ (keine Lösung)}$$

$$8 \text{ cm und } 12 \text{ cm}$$

2. a) Der halbe Umfang beträgt 26 cm.

Die eine Seite sei  $x$  cm, dann ist die andere  $(26 - x)$  cm.

$$x(26 - x) = 160$$

$$x^2 - 26x + 160 = 0$$

$$\frac{p}{2} = -13; \quad q = 160$$

$$x_{1,2} = 13 \pm \sqrt{169 - 160}$$

$$x_{1,2} = 13 \pm 3$$

$$\underline{x_1 = 16}; \quad \underline{x_2 = 10}$$

16 cm und 10 cm

- b) Der halbe Umfang beträgt 13 cm.

Die eine Seite sei  $x$  cm, dann ist die andere  $(13 - x)$  cm.

$$x(13 - x) = 40$$

$$x^2 - 13x + 40 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -13; \quad c = 40$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm 3}{2}$$

$$\underline{x_1 = 8}; \quad \underline{x_2 = 5}$$

8 cm und 5 cm

3. Die Seite des ursprünglichen Quadrates sei
- $x$
- cm, dann ist die Seite des neuen Quadrates
- $(x + 2)$
- cm.

$$\frac{9}{4}x^2 = (x + 2)^2$$

$$5x^2 - 16x - 16 = 0$$

$$a = 5; \quad b = -16; \quad c = -16$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 320}}{10}$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm 24}{10}$$

$$\underline{x_1 = 4}; \quad \underline{x_2 = -\frac{4}{5}} \text{ (keine Lösung)}$$

ursprüngliche Seite 4 cm, neue Seite 6 cm

4. Die kleinere Seite sei
- $x$
- cm, dann ist die größere
- $(x + 2)$
- cm.

$$x^2 + (x + 2)^2 = 10^2$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\frac{p}{2} = 1; \quad q = -48$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 48}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm 7$$

$$\underline{x_1 = 6}; \quad \underline{x_2 = -8} \text{ (keine Lösung)}$$

6 cm und 8 cm

5. Der halbe Umfang beträgt 23 cm.

Die eine Seite sei  $x$  cm, dann ist die andere  $(23 - x)$  cm.

$$x^2 + (23 - x)^2 = 17^2$$

$$x^2 - 23x + 120 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -23; \quad c = 120$$

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 480}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm 7}{2}$$

$$\underline{x_1 = 15}; \quad \underline{x_2 = 8}$$

15 cm und 8 cm

6. Die Hypotenuse sei
- $x$
- cm, dann sind Kathete
- $a$
- $(x - 6)$
- cm und Kathete
- $b$
- $(x - 3)$
- cm.

$$(x - 6)^2 + (x - 3)^2 = x^2$$

$$x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$\frac{p}{2} = -9; \quad q = 45$$

$$x_{1,2} = 9 \pm \sqrt{81 - 45}$$

$$x_{1,2} = 9 \pm 6$$

$$\underline{x_1 = 15}; \quad \underline{x_2 = 3} \text{ (keine Lösung)}$$

$a = 9$  cm;  $b = 12$  cm;  $c = 15$  cm

7. Die Hypotenuse sei  $x$  cm, dann sind Kathete  $a$  ( $x - 3$ ) cm und Kathete  $b$  [ $18 - x - (x - 3) = 21 - 2x$ ] cm.

$$(x - 3)^2 + (21 - 2x)^2 = x^2$$

$$4x^2 - 90x + 450 = 0$$

$$2x^2 - 45x + 225 = 0$$

$$a = 2; \quad b = -45; \quad c = 225$$

$$x_{1,2} = \frac{45 \pm \sqrt{2025 - 1800}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{45 \pm 15}{4}$$

$$\underline{x_1 = 15}; \quad \underline{x_2 = 7,5}$$

$x_1$  ist keine Lösung, weil Kathete  $b$  keine negative Länge haben kann.  
 $c = 7,5$  cm;  $a = 4,5$  cm;  $b = 6$  cm

8. Kathete  $a$  sei die größere und  $x$  cm, dann sind Kathete  $b$  ( $17 - x$ ) cm und die Hypotenuse [ $2(17 - x) + 3 = 37 - 2x$ ] cm.

$$x^2 + (17 - x)^2 = (37 - 2x)^2$$

$$x^2 - 57x + 540 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -57; \quad c = 540$$

$$x_{1,2} = \frac{57 \pm \sqrt{3249 - 2160}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{57 \pm 33}{2}$$

$$\underline{x_1 = 45} \text{ (keine Lösung); } \underline{x_2 = 12}$$

$$a = 12 \text{ cm; } b = 5 \text{ cm; } c = 13 \text{ cm}$$

9. Die Kathete sei  $x$  cm, dann sind der nichtanliegende Hypotenusenabschnitt ( $x + 1$ ) cm und die Hypotenuse [ $9 + (x + 1) = x + 10$ ] cm.

$$x^2 = (x + 10)9$$

$$x^2 - 9x - 90 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -9; \quad c = -90$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 360}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 21}{2}$$

$$\underline{x_1 = 15}; \quad \underline{x_2 = -6} \text{ (keine Lösung)}$$

Die Katheten sind 15 cm und 20 cm, die Hypotenuse 25 cm.

### 12.3.3 Verteilungsrechnung

1. B benötige  $x$  Tage, A ( $x + 15$ ) Tage. Die gesamte Arbeitsmenge sei 1.

$$\frac{1}{x + 15} + \frac{1}{x} = \frac{1}{18}$$

$$x^2 - 21x - 270 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -21; \quad c = -270$$

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 + 1080}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm 39}{2}$$

$$\underline{x_1 = 30}; \quad \underline{x_2 = -9} \text{ (keine Lösung)}$$

B 30 Tage; A 45 Tage

2. A benötige  $x$  Monate, B ( $x + 5$ ) Monate. Die gesamte Arbeitsmenge sei 1.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 5} = \frac{1}{6}$$

$$x^2 - 7x - 30 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -7; \quad c = -30$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 13}{2}$$

$$\underline{x_1 = 10}; \quad \underline{x_2 = -3} \text{ (keine Lösung)}$$

A 10 Monate; B 15 Monate

3.  $A_1$  benötigt  $x$  Tage,  $A_2$   $(x + 3)$  Tage,  
 $A_3$   $2x$  Tage. Die gesamte Arbeitsmenge  
 sei 1.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - 7x - 18 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -7; \quad c = -18$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 11}{2}$$

$$\underline{x_1 = 9; \quad \underline{x_2 = -2}} \text{ (keine Lösung)}$$

$A_1$  9 Tage,  $A_2$  12 Tage,  $A_3$  18 Tage

5.  $x$  Mitglieder ursprünglich.  
 $(x - 5)$  Mitglieder, die Anteil erhalten.

$$\frac{2400}{x} \text{ EUR ursprünglicher Anteil.}$$

$$\frac{2400}{x-5} \text{ EUR ausbezahlter Anteil.}$$

$$\frac{2400}{x-5} - \frac{2400}{x} = 2$$

$$x^2 - 5x - 6000 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -5; \quad c = -6000$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24000}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 155}{2}$$

$$\underline{x_1 = 80; \quad \underline{x_2 = -75}} \text{ (keine Lösung)}$$

80 Mitglieder ursprünglich;  
 75 Mitglieder, die Anteil erhalten;  
 32,00 EUR ausbezahlter Anteil.

7.  $x$  Flaschen ursprünglich,  $(x - 20)$   
 Flaschen nach der Preiserhöhung.

$$\frac{540}{x} \text{ EUR ursprünglicher Preis je Fl.}$$

$$\frac{540}{x-20} \text{ EUR Preis je Fl. nach Erhöhung}$$

$$\frac{540}{x-20} - \frac{540}{x} = 0,3$$

$$x^2 - 20x - 36000 = 0$$

4.  $A_1$  benötigt  $x$  Tage,  $A_2$   $(x - 5)$  Tage,  
 $A_3$   $2x$  Tage. Die gesamte Arbeitsmenge sei  
 1.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{5}$$

$$2x^2 - 35x + 75 = 0$$

$$a = 2; \quad b = -35; \quad c = 75$$

$$x_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 600}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{35 \pm 25}{4}$$

$$\underline{x_1 = 15; \quad \underline{x_2 = \frac{5}{2}}} \text{ (keine Lösung)}$$

$A_1$  15 Tage,  $A_2$  10 Tage,  $A_3$  30 Tage

6.  $x$  Schüler ursprünglich,  $(x - 3)$  teil-  
 nehmende Schüler.

$$\frac{165}{x} \text{ EUR ursprünglicher Anteil.}$$

$$\frac{165}{x-3} \text{ EUR tatsächlicher Anteil.}$$

$$\frac{165}{x-3} - \frac{165}{x} = 0,5$$

$$x^2 - 3x - 990 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -3; \quad c = -990$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 3960}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 63}{2}$$

$$\underline{x_1 = 33; \quad \underline{x_2 = -30}} \text{ (keine Lösung)}$$

33 Schüler ursprünglich; 30 teilnehmende  
 Schüler; 5,50 EUR je teilnehmender Schü-  
 ler.

$$\frac{p}{2} = -10; \quad q = -36000$$

$$x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 + 36000}$$

$$x_{1,2} = 10 \pm 190$$

$$\underline{x_1 = 200; \quad \underline{x_2 = -180}} \text{ (keine Lösung)}$$

200 Flaschen ursprünglich;  
 2,70 EUR ursprünglicher Preis je Flasche.

## 12.3.4 Prozent- und Zinsrechnung

## 1. x% Abschreibung

$$1. \text{ Abschreibung } \left[ \frac{12000 \cdot x}{100} = 120x \right] \text{ EUR}$$

$$1. \text{ Restbuchwert } (12000 - 120x) \text{ EUR}$$

$$2. \text{ Abschreibung } \frac{(12000 - 120x)x}{100} \text{ EUR}$$

## 2. x% Erhöhung

$$1. \text{ Erhöhung } \left[ \frac{1250x}{100} = 12,5x \right] \text{ EUR}$$

$$\text{Preis nach Erh. } (1250 + 12,5x) \text{ EUR}$$

$$2. \text{ Erhöhung } \frac{(1250 + 12,5x)x}{100} \text{ EUR}$$

## 3. x% Erhöhung bzw. Senkung

$$\text{Erhöhung } \left[ \frac{250000 \cdot x}{100} = 2500x \right] \text{ EUR}$$

$$\text{Umsatz nach Erh. } (250000 + 2500x) \text{ EUR}$$

$$\text{Rückgang } \frac{(250000 + 2500x)x}{100} \text{ EUR}$$

## 4. x EUR Einstandspreis

$$\underline{x\% \text{ Kalkulationszuschlag}}$$

$$x + \frac{x \cdot x}{100} = 31,25$$

$$x^2 + 100x - 3125 = 0$$

$$\frac{p}{2} = 50; \quad q = -3125$$

$$120x + \frac{(12000 - 120x)x}{100} = 5250$$

$$x^2 - 200x + 4375 = 0$$

$$\frac{p}{2} = -100; \quad q = 4375$$

$$x_{1,2} = 100 \pm \sqrt{10000 - 4375}$$

$$x_{1,2} = 100 \pm 75$$

$$\underline{x_1 = 175} \text{ (keine Lösung); } \underline{x_2 = 25}$$

25% Abschreibung

$$12,5x + \frac{(1250 + 12,5x)x}{100} = 208$$

$$x^2 + 200x - 1664 = 0$$

$$\frac{p}{2} = 100; \quad q = -1664$$

$$x_{1,2} = -100 \pm \sqrt{10000 + 1664}$$

$$x_{1,2} = -100 \pm 108$$

$$\underline{x_1 = 8}; \quad \underline{x_2 = -208} \text{ (keine Lösung)}$$

8% Erhöhung

$$2500x - \frac{(250000 + 2500x)x}{100} = -900$$

$$25x^2 = 900$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{36}$$

$$\underline{x_1 = 6}; \quad \underline{x_2 = -6} \text{ (keine Lösung)}$$

6% Erhöhung bzw. Senkung

$$x_{1,2} = -50 \pm \sqrt{2500 + 3125}$$

$$x_{1,2} = -50 \pm 75$$

$$\underline{x_1 = 25}; \quad \underline{x_2 = -125} \text{ (keine Lösung)}$$

25,00 EUR Einstandspreis

25% Kalkulationszuschlag

5. x% Zinsfuß

$$\text{Zinsen 1. Jahr } \left[ \frac{2000x}{100} = 20x \right] \text{ EUR}$$

$$\text{Guthaben am Beginn d. 2. J. } [2000 + 20x - 280 = 1720 + 20x] \text{ EUR}$$

$$\text{Zinsen 2. Jahr } \frac{(1720 + 20x)x}{100} \text{ EUR}$$

$$2000 + 20x - 280 + \frac{(1720 + 20x)x}{100} = 1872$$

$$x^2 + 186x - 760 = 0$$

$$\frac{p}{2} = 93; \quad q = -760$$

$$x_{1,2} = -93 \pm \sqrt{8649 + 760}$$

$$x_{1,2} = -93 \pm \sqrt{9409}$$

$$x_{1,2} = -93 \pm 97$$

$$\underline{x_1 = 4; \quad \underline{x_2 = -190} \text{ (keine Lösung)}}$$

4% Verzinsung

6. x% Zinsfuß

$$\text{Zinsen 1. Jahr } \left[ \frac{1000x}{100} = 10x \right] \text{ EUR}$$

$$\text{Guth. am Beginn d. 2. J. } [1000 + 10x + 165 = 1165 + 10x] \text{ EUR}$$

$$\text{Zinsen 2. Jahr } \frac{(1165 + 10x)x}{100} \text{ EUR}$$

$$1000 + 10x + 165 + \frac{(1165 + 10x)x}{100} = 1242$$

$$2x^2 + 433x - 1540 = 0$$

$$a = 2; \quad b = 433; \quad c = -1540$$

$$x_{1,2} = \frac{-433 \pm \sqrt{187489 + 12320}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-433 \pm 447}{4}$$

$$\underline{x_1 = \frac{7}{2}; \quad \underline{x_2 = -220} \text{ (keine Lösung)}}$$

3,5% Verzinsung

7. x% ursprünglicher Zinsfuß

(x - 0,5% Zinsfuß im 2. Jahr)

$$\text{Zinsen 1. Jahr } \left[ \frac{4000x}{100} = 40x \right] \text{ EUR}$$

$$\text{Guthaben am Ende des 1. Jahres } (4000 + 40x) \text{ EUR}$$

$$\frac{(4000 + 40x)(x - 0,5)}{100} = 145,6$$

$$2x^2 + 199x - 828 = 0$$

$$a = 2; \quad b = 199; \quad c = -828$$

$$x_{1,2} = \frac{-199 \pm \sqrt{39601 + 6624}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-199 \pm 215}{4}$$

$$\underline{x_1 = 4; \quad \underline{x_2 = -103,5} \text{ (keine Lösung)}}$$

Ursprünglich 4% Verzinsung



8.  $x\%$  ursprünglicher Zinsfuß $(x + 0,5)\%$  Zinsfuß im 2. Jahr

$$\text{Zinsen 1. Jahr } \left[ \frac{2000x}{100} = 20x \right] \text{ EUR}$$

Guthaben am Anfang des 2. Jahres  $[2000 + 20x + 230 = 2230 + 20x]$  EUR

$$\text{Zinsen 2. Jahr } \frac{(2230 + 20x)(x + 0,5)}{100} \text{ EUR}$$

$$2000 + 20x + 230 + \frac{(2230 + 20x)(x + 0,5)}{100} = 2392$$

$$x^2 + 212x - 754,25 = 0$$

$$\frac{p}{2} = 106; \quad q = -754,25$$

$$x_{1,2} = -106 \pm \sqrt{11\,236 + 754,25}$$

$$x_{1,2} = -106 \pm \sqrt{11\,990,25}$$

$$x_{1,2} = -106 \pm 109,5$$

$$\underline{x_1 = 3,5; \quad x_2 = -215,5 \text{ (keine Lösung)}}$$

ursprünglich  $3,5\%$  Verzinsung9.  $x\%$  neuer Zinsfuß:  $(x + 0,5)\%$  alter Zinsfuß.

$$\text{Zinsen 1. Jahr } \left[ \frac{6000(x + 0,5)}{100} = 60x + 30 \right] \text{ EUR}$$

Guthaben am Anfang des 2. Jahres:  $[6000 + (60x + 30) + 700 = 6730 + 60x]$  EUR

$$\text{Zinsen 2. Jahr } \frac{(6730 + 60x)x}{100} \text{ EUR}$$

$$6000 + (60x + 30) + 700 + \frac{(6730 + 60x)x}{100} = 7315$$

$$6x^2 + 1273x - 5850 = 0$$

$$a = 6; \quad b = 1273; \quad c = -5850$$

$$x_{1,2} = \frac{-1273 \pm \sqrt{1\,620\,529 + 140\,400}}{12}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1273 \pm \sqrt{1\,760\,929}}{12}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1273 \pm 1327}{12}$$

$$\underline{x_1 = 4,5; \quad x_2 = -216\frac{2}{3} \text{ (keine Lösung)}}$$

4,5% neuer Zinsfuß, 5% alter Zinsfuß

**12.4 Grafische Lösung der gemischtquadratischen Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$** 

Erstes Verfahren:

$$1. \text{ a) } y = x^2 + x - \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1; \quad S\left(-\frac{1}{2} \mid -1\right); \quad L = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$$

$$\text{b) } y = x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow y = (x + 1)^2 - 4; \quad S(-1 \mid -4); \quad L = \{1; -3\}$$

$$\text{c) } y = x^2 - 5x + \frac{25}{4} \Leftrightarrow y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2; \quad S\left(\frac{5}{2} \mid 0\right); \quad L = \{2; 5\}$$

$$2. \text{ a) } y = x^2 - 2x \Leftrightarrow y = (x - 1)^2 - 1; \quad S(1 \mid -1); \quad L = \{2; 0\}$$

$$\text{b) } y = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow y = (x + 2)^2; \quad S(-2 \mid 0); \quad L = \{-2\}$$

$$\text{c) } y = x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow y = (x + 1)^2 + 1; \quad S(-1 \mid 1); \quad L = \emptyset$$

3. a)  $y = x^2 - 4x + 8 \Leftrightarrow y = (x - 2)^2 + 4$ ;  $S(2|4)$ ;  $L = \emptyset$   
 b)  $y = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ ;  $S\left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{9}{4}\right)$ ;  $L = \{-2; 1\}$   
 c)  $y = x^2 + 3x + \frac{9}{4} \Leftrightarrow y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ ;  $S\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right)$ ;  $L = \{-1,5\}$
4. a)  $y = x^2 + 3x - 1,75 \Leftrightarrow y = (x + 1,5)^2 - 4$ ;  $S(-1,5 \mid -4)$ ;  $L = \{-3,5; 0,5\}$   
 b)  $y = x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow y = (x - 1)^2 + 2$ ;  $S(1 \mid 2)$ ;  $L = \emptyset$   
 c)  $y = x^2 - x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = (x - 0,5)^2$ ;  $S(0,5 \mid 0)$ ;  $L = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Zweites Verfahren:

1. a)  $y = x^2$ ;  $y = -x + \frac{3}{4}$ ;  $L = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$   
 b)  $y = x^2$ ;  $y = -2x + 3$ ;  $L = \{1; -3\}$   
 c)  $y = x^2$ ;  $y = 5x - 6,25$ ;  $L = \{2,5\}$
2. a)  $y = x^2$ ;  $y = 2x$ ;  $L = \{2; 0\}$   
 b)  $y = x^2$ ;  $y = -4x - 4$ ;  $L = \{-2\}$   
 c)  $y = x^2$ ;  $y = -2x - 2$ ;  $L = \emptyset$
3. a)  $y = x^2$ ;  $y = 4x - 8$ ;  $L = \emptyset$   
 b)  $y = x^2$ ;  $y = -x + 2$ ;  $L = \{-2; 1\}$   
 c)  $y = x^2$ ;  $y = -3x - 2,25$ ;  $L = \{-1,5\}$
4. a)  $y = x^2$ ;  $y = -3x + 1,75$ ;  $L = \{-3,5; 0,5\}$   
 b)  $y = x^2$ ;  $y = 2x - 3$ ;  $L = \emptyset$   
 c)  $y = x^2$ ;  $y = x - 0,25$ ;  $L = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

## 12.5 Berechnung der Nullstellen von quadratischen Funktionen

- |                                 |                                |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 1. a) $P_1(1 0)$ , $P_2(3 0)$   | b) $P_1(-3 0)$ , $P_2(1 0)$ ,  |
| c) $P_1(0,5 0)$ , $P_2(4,5 0)$  | d) $P_1(-3 0)$ , $P_2(-1 0)$   |
| e) $P_1(-3,5 0)$ , $P_2(0,5 0)$ | f) $P_1(1,5 0)$ , $P_2(4,5 0)$ |
| 2. a) $P_1(-1 0)$ , $P_2(3 0)$  | b) $P_1(-4 0)$ , $P_2(2 0)$ ,  |
| c) $P_1(-1 0)$ , $P_2(5 0)$     | d) $P_1(-2 0)$ , $P_2(4 0)$    |
| e) $P_1(-3 0)$ , $P_2(1 0)$     | f) $P_1(-3 0)$ , $P_2(5 0)$    |