

14 Logarithmen

14.1 Einführung

- $\log_2 64 = 6$
 - $\log_3 81 = 4$
 - $\log_4 64 = 3$
 - $\log_6 36 = 2$
 - $\log_4 4 = 1$
 - $\log_5 1 = 0$
 - $\log_3 \frac{1}{3} = -1$
 - $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$
 - $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$
 - $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} = 3$
 - $\log_{\frac{9}{5}} \frac{9}{25} = 2$
 - $\log_{\frac{5}{6}} 1 = 0$
 - $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
 - $\log_8 2 = \frac{1}{3}$
 - $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$
 - $\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$
- $3^4 = 81$
 - $5^3 = 125$
 - $7^2 = 49$
 - $2^7 = 128$
 - $3^0 = 1$
 - $6^1 = 6$
 - $2^{-1} = \frac{1}{2}$
 - $4^{-2} = \frac{1}{16}$
 - $9^{\frac{1}{2}} = 3$
 - $27^{\frac{1}{3}} = 3$
 - $16^{\frac{1}{4}} = 2$
 - $32^{\frac{1}{5}} = 2$
- $3^2 = x; x = 9$
 - $4^3 = x; x = 64$
 - $8^2 = x; x = 64$
 - $2^5 = x; x = 32$
 - $5^0 = x; x = 1$
 - $6^1 = x; x = 6$
 - $3^{-1} = x; x = \frac{1}{3}$
 - $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = x; x = \frac{1}{9}$
 - $2^{-3} = x \Leftrightarrow \frac{1}{2^3} = x; x = \frac{1}{8}$
 - $4^{-1} = x; x = \frac{1}{4}$
 - $5^{-2} = x \Leftrightarrow \frac{1}{5^2} = x; x = \frac{1}{25}$
 - $3^{-3} = x \Leftrightarrow \frac{1}{3^3} = x; x = \frac{1}{27}$
- $2^x = 8; x = 3$
 - $3^x = 9; x = 2$
 - $2^x = 16; x = 4$
 - $4^x = 16; x = 2$
 - $10^x = 1000; x = 3$
 - $10^x = 10; x = 1$
 - $10^x = 1; x = 0$
 - $10^x = 100; x = 2$
 - $4^x = 4; x = 1$
 - $4^x = 1; x = 0$
 - $5^x = 25; x = 2$
 - $5^x = \frac{1}{25}; x = -2$
 - $10^x = 0,1; x = -1$
 - $2^x = 0,5; x = -1$
 - $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}; x = 3$
 - $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9}; x = 2$
- $2^x = 32; x = 5$
 - $3^x = 27; x = 3$
 - $2^x = 2; x = 1$
 - $5^x = 125; x = 3$
 - $5^x = 5; x = 1$
 - $5^x = 1; x = 0$
 - $3^x = 3; x = 1$
 - $2^x = 1; x = 0$
 - $2^x = \frac{1}{2}; x = -1$
 - $2^x = \frac{1}{4}; x = -2$
 - $2^x = \frac{1}{8}; x = -3$
 - $2^x = \frac{1}{16}; x = -4$
 - $3^x = \frac{1}{9}; x = -2$
 - $4^x = \frac{1}{4}; x = -1$
 - $4^x = \frac{1}{16}; x = -2$
 - $3^x = \frac{1}{27}; x = -3$

14.2 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

14.2.1 Die Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$

1. Rechenbeispiel: $4^{-1,5} = 4^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$

	x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
a)	4^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4		
	$\left(\frac{1}{4}\right)^x$			4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
b)	$\left(\frac{5}{2}\right)^x$	0,16	0,25	0,4	0,63	1	1,58	2,5	3,95	6,25
	$\left(\frac{2}{5}\right)^x$	6,25	3,95	2,5	1,58	1	0,63	0,4	0,25	0,16
c)	$\left(\frac{3}{2}\right)^x$	0,44	0,54	0,67	0,82	1	1,22	1,5	1,84	2,25
	$\left(\frac{2}{3}\right)^x$	2,25	1,84	1,5	1,22	1	0,82	0,67	0,54	0,44
d)	$\left(\frac{3}{4}\right)^x$	1,78	1,54	1,33	1,15	1	0,87	0,75	0,65	0,56
	$\left(\frac{4}{3}\right)^x$	0,56	0,65	0,75	0,87	1	1,15	1,33	1,54	1,78

2.

x	-2	-1	-0,5	0	0,25	0,5	0,75	1
10^x	0,01	0,1	0,32	1	1,78	3,16	5,62	10

Rechenbeispiel: $10^{0,25} = 10^{\frac{1}{4}} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt{3,16} = 1,78$

y	0,5	2	4	8
x	-0,3	0,3	0,6	0,9

14.2.2 Die Logarithmusfunktion $x \mapsto \log_a x$

1.	x	-2	-1	-0,5	0	0,25	0,5	0,75	1
	10^x	0,01	0,1	0,32	1	1,78	3,16	5,62	10

Der Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden entspricht vorstehende Wertetafel mit getauschten x-Werten und y-Werten.

	x	0,01	0,1	0,32	1	1,78	3,16	5,62	10
$y = \lg x \Leftrightarrow 10^y = x$	$\lg x$	-2	-1	-0,5	0	0,25	0,5	0,75	1

x	2	3,5	5	6,5	8
$\lg x$	0,30	0,54	0,70	0,81	0,90

14.3 Die Logarithmensätze

1. a) $\log x + \log y$
 c) $\log 7 + \log y$
 e) $\log a + \log b + \log c$
 g) $\log 2 + \log 3 + \log x$
2. a) $\log x - \log y$
 c) $\log z - \log 7$
 e) $\log a + \log b - \log c$
 g) $\log 1 - \log 3 - \log x = -\log 3 - \log x$
3. a) $2 \cdot \log a$
 e) $\log 1 - 2 \cdot \log x = -2 \cdot \log x$
 g) $-3 \cdot \log a$
4. a) $\frac{1}{2} \cdot \log a$
 e) $\log x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log x$
 g) $\log a^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \log a$
5. a) $3 \cdot \log x + 2 \cdot \log y$
 c) $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log y$
 e) $2 \cdot \log a + \frac{1}{3} \cdot \log b$
 g) $\frac{1}{2} \cdot \log x - \frac{2}{3} \cdot \log y$
6. a) $\log \frac{ac}{b}$
 d) $\log \frac{a^4}{b^5}$
- b) $\log \frac{x}{yz}$
 e) $\log \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}$
- b) $\log 3 + \log x$
 d) $\log 4 + \log 5$
 f) $\log 2 + \log x + \log y$
 h) $\log 5 + \log 5 + \log 3$
- b) $\log 5 - \log x$
 d) $\log 3 - \log 5$
 f) $\log a - \log b - \log c$
 h) $\log 2 + \log x - \log 5 - \log y$
- c) $5 \cdot \log y$
 f) $\log 2 - 3 \cdot \log y$
 h) $\log 3 - 2 \cdot \log x$
- c) $\frac{2}{3} \cdot \log x$
 f) $\log y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log y$
 h) $\log b^{-\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4} \cdot \log b$
- d) 0
 d) $3 \cdot (\log a + \log b)$
 d) $4 \cdot (\log a - \log b)$
 f) $\frac{1}{2} \cdot (\log x + \log y)$
 h) $\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \log a - \log b)$
- c) $\log x^2 y^3$
 f) $\log \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{y^3}$

14.4 Zehnerlogarithmen

1. a) 3,19590 b) 0,39270 c) 2,56467 d) 1,71096 e) 4,93095
2. a) 0,31806 b) -0,48678 c) -2,32790 d) -3,09691 e) -1,02687
3. a) -0,83564 b) 0,60314 c) -1,28904 d) -2,17393 e) -3,52288
4. a) 1,37107 b) -0,49621 c) 0,70501 d) -1,13194 e) -0,04191
5. a) 3,26951 b) 1,49969 c) 0,58995 d) -0,34008 e) 4,73957
6. a) 1,77960 b) 3,77960 c) -0,07007 d) 4,92993 e) -1,03012
7. a) 2,02857 b) 3,25406 c) 1,28646 d) 3,39111 e) 0,43902
8. a) 3,53491 b) 1,59890 c) 0,66332 d) 4,75800 e) 5,78739
9. a) -0,12430 b) 0,90352 c) -1,05923 d) -0,02292 e) 0,98552
10. a) 2,96654 b) 0,92341 c) -0,18030 d) 3,75058 e) 4,58598
11. a) 195,00 b) 2650,0 c) 38,500
12. a) 4,7200 b) 0,5070 c) 0,0569
13. a) 0,0004 b) 0,0035 c) 0,4780
14. a) 7,8401 b) 87,201 c) 989,01
15. a) 0,4080 b) 0,0550 c) 0,6030
16. a) 39,550 b) 345,20 c) 3,0970
17. a) 2931,0 b) 27,880 c) 0,26390
18. a) 2,4940 b) 0,02394 c) 204,20
19. a) 1918,0 b) 15,540 c) 1,3690
20. a) 0,11320 b) 1,0470 c) 1005,0

14.5 Exponentialgleichungen

1. a) 3 b) 5 c) 0 d) 2 e) $\frac{1}{2}$ f) 0
 g) $\frac{1}{3}$ h) $\frac{1}{5}$ i) -2 k) -3 l) -4 m) -1
2. a) 0 b) 1 c) 3 d) 0 e) 1 f) 0
 g) $\frac{1}{3}$ h) $\frac{1}{2}$ i) -1 k) -3 l) -1 m) -4
3. a) $x \cdot \lg 1,04 = \lg 1,5$

$$x = \frac{\lg 1,5}{\lg 1,04}$$

$$x \approx \frac{0,1761}{0,0170}$$

$$\underline{\underline{x \approx 10,36}}$$
- b) $x \cdot \lg 1,045 = \lg 2$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1,045}$$

$$x \approx \frac{0,3010}{0,0191}$$

$$\underline{\underline{x \approx 15,76}}$$
- c) $x \cdot \lg 1,055 = \lg 2,5$

$$x = \frac{\lg 2,5}{\lg 1,055}$$

$$x \approx \frac{0,3979}{0,0233}$$

$$\underline{\underline{x \approx 17,08}}$$

4. a) $\lg 1800 + x \cdot \lg 1,04 = \lg 3450$

$$x = \frac{\lg 3450 - \lg 1800}{\lg 1,04}$$

$$x \approx \frac{3,5378 - 3,2553}{0,0170}$$

$$x \approx \frac{0,2825}{0,0170}$$

$$x \approx \underline{\underline{16,62}}$$

b) $\lg 950 + x \cdot \lg 1,05 = \lg 1625$

$$x = \frac{\lg 1625 - \lg 950}{\lg 1,05}$$

$$x \approx \frac{3,2109 - 2,9777}{0,0212}$$

$$x \approx \frac{0,2332}{0,0212}$$

$$x \approx \underline{\underline{11}}$$

c) $\lg 1685 + x \cdot \lg 1,053 = \lg 3560$

$$x = \frac{\lg 3560 - \lg 1685}{\lg 1,053}$$

$$x \approx \frac{3,5514 - 3,2266}{0,0224}$$

$$x \approx \frac{0,3248}{0,0224}$$

$$x \approx \underline{\underline{14,5}}$$

5. a) $x \cdot \lg 7 = (x + 1) \cdot \lg 5$

$$x \cdot \lg 7 = x \cdot \lg 5 + \lg 5$$

$$x \cdot \lg 7 - x \cdot \lg 5 = \lg 5$$

$$x(\lg 7 - \lg 5) = \lg 5$$

$$x = \frac{\lg 5}{\lg 7 - \lg 5}$$

$$x \approx \frac{0,6990}{0,8451 - 0,6990}$$

$$x \approx \frac{0,6990}{0,1461}$$

$$x \approx \underline{\underline{4,784}}$$

b) $x \cdot \lg 3 = (x - 1) \lg 4$

$$x \cdot \lg 3 = x \cdot \lg 4 - \lg 4$$

$$x \cdot \lg 3 - x \cdot \lg 4 = -\lg 4$$

$$x(\lg 3 - \lg 4) = -\lg 4$$

$$x = \frac{-\lg 4}{\lg 3 - \lg 4}$$

$$x \approx \frac{-0,6021}{0,4771 - 0,6021}$$

$$x \approx \frac{-0,6021}{-0,1250}$$

$$x \approx \underline{\underline{4,817}}$$

c) $2x \cdot \lg 7 = (x + 2) \lg 10$

$$2x \cdot \lg 7 = x \cdot \lg 10 + 2 \cdot \lg 10$$

$$2x \cdot \lg 7 - x \cdot \lg 10 = 2 \cdot \lg 10$$

$$x(2 \cdot \lg 7 - \lg 10) = 2 \cdot \lg 10$$

$$x = \frac{2 \cdot \lg 10}{2 \cdot \lg 7 - \lg 10}$$

$$x \approx \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 0,8451 - 1}$$

$$x \approx \frac{2}{0,6902}$$

$$x \approx \underline{\underline{2,898}}$$

6. a) $x \cdot \lg 0,7 = \lg 0,2401$

$$x = \frac{\lg 0,2401}{\lg 0,7}$$

$$x \approx \frac{0,3804 - 1}{0,8451 - 1}$$

$$x \approx \frac{-0,6196}{-0,1549}$$

$$x \approx \underline{\underline{4}}$$

b) $x \cdot \lg 0,45 = \lg 0,0911$

$$x = \frac{\lg 0,0911}{\lg 0,45}$$

$$x \approx \frac{0,9595 - 2}{0,6532 - 1}$$

$$x \approx \frac{-1,0405}{-0,3468}$$

$$x \approx \underline{\underline{3}}$$

c) $x \cdot \lg 0,52 = \lg 0,038$

$$x = \frac{\lg 0,038}{\lg 0,52}$$

$$x \approx \frac{0,5798 - 2}{0,7160 - 1}$$

$$x \approx \frac{-1,4202}{-0,284}$$

$$x \approx \underline{\underline{5}}$$

$$7. \quad a) \quad x \cdot \lg 0,95 = \lg 0,6124 + \lg 1,4$$

$$x = \frac{\lg 0,6124 + \lg 1,4}{\lg 0,95}$$

$$x \approx \frac{(0,7871 - 1) + 0,1461}{0,9777 - 1}$$

$$x \approx \frac{-0,2129 + 0,1461}{-0,0223}$$

$$x \approx \frac{-0,0668}{-0,0223}$$

$$\underline{\underline{x \approx 3}}$$

$$b) \quad x \cdot \lg 0,28 = \lg 0,058 + \lg 0,106$$

$$x = \frac{\lg 0,058 + \lg 0,106}{\lg 0,28}$$

$$x \approx \frac{(0,7634 - 2) + (0,0253 - 1)}{(0,4472 - 1)}$$

$$x \approx \frac{(-1,2366) + (-0,9747)}{-0,5528}$$

$$x \approx \frac{-2,2113}{-0,5528}$$

$$\underline{\underline{x \approx 4}}$$

$$c) \quad x \cdot \lg 0,165 = \lg 0,0226 - \lg 0,83$$

$$x = \frac{\lg 0,0226 - \lg 0,83}{\lg 0,165}$$

$$x \approx \frac{(0,3541 - 2) - (0,9191 - 1)}{(0,2175 - 1)}$$

$$x \approx \frac{(-1,6459) - (-0,0809)}{-0,7825}$$

$$x \approx \frac{-1,5650}{-0,7825}$$

$$\underline{\underline{x \approx 2}}$$

$$8. \quad a) \quad \lg 10 + x \cdot \lg 6 = \lg 3 + (x+1) \lg 5$$

$$\lg 10 + x \cdot \lg 6 = \lg 3 + x \cdot \lg 5 + \lg 5$$

$$x \cdot \lg 6 - x \cdot \lg 5 = \lg 3 + \lg 5 - \lg 10$$

$$x(\lg 6 - \lg 5) = \lg 3 + \lg 5 - \lg 10$$

$$x = \frac{\lg 3 + \lg 5 - \lg 10}{\lg 6 - \lg 5}$$

$$x \approx \frac{0,4771 + 0,6990 - 1}{0,7782 - 0,6990}$$

$$x \approx \frac{0,1761}{0,0792}$$

$$\underline{\underline{x \approx 2,223}}$$

$$b) \quad \lg 24 + (x-1) \lg 3 = \lg 13,5 + (x+1) \lg 2$$

$$\lg 24 + x \cdot \lg 3 - \lg 3 = \lg 13,5 + x \cdot \lg 2 + \lg 2$$

$$x \cdot \lg 3 - x \cdot \lg 2 = \lg 13,5 + \lg 2 - \lg 24 + \lg 3$$

$$x(\lg 3 - \lg 2) = \lg 13,5 + \lg 2 - \lg 24 + \lg 3$$

$$x = \frac{\lg 13,5 + \lg 2 - \lg 24 + \lg 3}{\lg 3 - \lg 2}$$

$$x \approx \frac{1,1303 + 0,3010 - 1,3802 + 0,4771}{0,4771 - 0,3010}$$

$$x \approx \frac{0,5282}{0,1761}$$

$$\underline{\underline{x \approx 3}}$$

$$c) \quad (x+2) \lg 5 + \lg 12,5 = (x+1) \lg 4 + \lg 32$$

$$x \cdot \lg 5 + 2 \cdot \lg 5 + \lg 12,5 = x \cdot \lg 4 + \lg 4 + \lg 32$$

$$x \cdot \lg 5 - x \cdot \lg 4 = \lg 4 + \lg 32 - 2 \cdot \lg 5 - \lg 12,5$$

$$x(\lg 5 - \lg 4) = \lg 4 + \lg 32 - 2 \cdot \lg 5 - \lg 12,5$$

$$x = \frac{\lg 4 + \lg 32 - 2 \cdot \lg 5 - \lg 12,5}{\lg 5 - \lg 4}$$

$$x = \frac{0,6021 + 1,5051 - 1,3980 - 1,0969}{0,6990 - 0,6021}$$

$$x = \frac{-0,3877}{0,0969}$$

$$\underline{\underline{x = -4}}$$

Hinweis: $4^{x+1} \cdot 32$ lässt sich zerlegen in $(2^2)^{x+1} \cdot 2^5 = 2^{2x+7}$

14.6 Wachstumsprozesse

1. a) $y = 2000 \cdot 1,08^x$

b) $y = 2000 \cdot 1,08^5 = 2939$; 2939 Tsd. EUR

c)

x	0	1	2	3	4	5
$2000 \cdot 1,08^x$	2000	2160	2333	2519	2721	2939

2. a) $y = -500 \cdot 0,9^x$

b) $y = -500 \cdot 0,9^8 = -215$; 215 Tsd. EUR Restverlust

c)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$-500 \cdot 0,9^x$	-500	-450	-405	-365	-328	-295	-266	-239	-215

3. a) $y = 4,5 \cdot 1,04^x$

b) Jahr 2008 $y = 4,5 \cdot 1,04^{10} = 6,661$ 6,661 Mio. Einwohner

Jahr 2018 $y = 4,5 \cdot 1,04^{20} = 9,860$ 9,860 Mio. Einwohner

4. a) $y = 4 \cdot 1,08^x$

b) $4 \cdot 1,08^x = 8$

$1,08^x = 2$

$x \cdot \lg 1,08 = \lg 2$

$x = \frac{\lg 2}{\lg 1,08}$

$x = 9,006 \approx 9$

Nach 9 Jahren hat sich der Umsatz etwa verdoppelt (= 7996 Tsd. EUR).

5. a) $y = 2000 \cdot 2^x$

b) $2000 \cdot 2^x = 200000$

$2^x = 100$

$x \cdot \lg 2 = \lg 100$

$x = \frac{\lg 100}{\lg 2}$

$x = 6,644 \approx 7$

Nach 7 Stunden ist die Anzahl über 100-mal größer (= 256000 Keime).

6. a) $y = 3 \cdot 2^{24}$

$y = 50331648$ (Bakterien)

b) $3 \cdot 2^x = 3000$

$2^x = 1000$

$x \cdot \lg 2 = \lg 1000$

$x = \frac{\lg 1000}{\lg 2}$

$x = 9,966 \approx 10$

Nach 10 Stunden ist die Anzahl 1000-mal größer (= 3072 Bakterien).