2 Grundbegriffe der Aussagenlogik und ihre Verwendung in der Datenverarbeitung

2.1 Aussagen

1. a) w b) f c) f d) w e) e f) f g) f h) w
2. a) f b) w c) f d) f e) w f) f g) w h) f i) f
3. a) f b) keine Aussage c) w d) keine Aussage e) f f) f
   g) keine Aussage h) w
4. Beispiele für wahre Aussagen:
   Das Kassekonto ist ein Aktivkonto. Der Wechsel ist ein Zahlungsmittel. Bremen liegt an der Weser. Franz Beckenbauer ist ein bekannter Fußballspieler. $9^2 > 80$.
   Beispiele für falsche Aussagen:
   Das Gehaltskonto ist ein Bestandskonto. Moskau ist die Hauptstadt von Belgien. Der Harz liegt in Bayern. 4711 ist ein Düngemittel. $2 + 5 < 7$.
5. Beispiele für Sätze, die keine Aussagen sind:
   Frohe Weihnachten! Wann ist Ostern? Rot ist eine Glücksfarbe. Mit 50 ist man noch jung. Glücklich ist, wer vergisst.

2.2 Aussageformen

1. a) Geburtsjahr angeben b) Dezember
   c) Dr. Adenauer d) Paris
   e) Elbe f) Quadrat
2. Es sind jeweils mehrere wahre oder falsche Aussagen möglich. Gegeben wird je ein Beispiel:
   a) Das Konto Verbindlichkeiten ist ein Passivkonto. (w)
   Das Kassekonto ist ein Passivkonto. (f)
   b) Franz Beckenbauer ist ein bekannter Fußballspieler. (w)
   Boris Becker ist ein bekannter Boxer. (f)
   c) Bremen liegt an der Weser. (w)
   Frankfurt liegt am Rhein. (f)
   d) 5 ist Teiler von 10. (w)
   4 ist Teiler von 9. (f)
   e) $1 + 7 = 8$. (w) $2 + 5 = 8$. (f)
   f) $3 - 0 = 3$. (w) $5 - 1 = 5$. (f)

2.3 Äquivalenz von Aussageformen

1. a) $5x = 10 \Leftrightarrow 3x = 6$; $L = \{2\}$
   b) Es liegt keine Äquivalenz vor.
   c) Es liegt keine Äquivalenz vor.
   d) $x - 2 = 3 \Leftrightarrow 10 : x = 2$; $L = \{5\}$
   e) x hat drei gleiche Winkel $\Leftrightarrow$ x hat drei gleich lange Seiten;
   $L = \{\text{gleichseitiges Dreieck}\}$.

2. a) $7 + x = 11 \Leftrightarrow x + 11 = 15$; $L = \{4\}$
   b) $4x = 12 \Leftrightarrow 5x = 15$; $L = \{3\}$
   c) $x - 1 = 1 \Leftrightarrow 7 - x = 5$; $L = \{2\}$
   d) $12 : x = 6 \Leftrightarrow 7 + x = 9 \Leftrightarrow 4x = 8$; $L = \{2\}$
   e) Es liegt keine Äquivalenz vor.

2.4. Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen

2.4.1. Und-Aussage (Konjunktion) und Und-Schaltung

1. a) (Goethe war ein deutscher Dichter) $\wedge$ (Beethoven war ein deutscher Komponist).
   b) (London ist eine Millionenstadt) $\wedge$ (London liegt in Großbritannien).
   c) (Fritz ist hungrig) $\wedge$ (Fritz ist durstig)
   d) (2 ist Teiler von 6) $\wedge$ (3 ist Teiler von 6).
   e) $(0 < 1) \wedge (1 < 2)$.
   f) $(2^4 = 16) \wedge (4^2 = 16)$.

2.

	a	b	a ∧ b
a)	w	f	f
b)	w	w	w
c)	f	f	f
d)	w (f)	f (w)	f
e)	w	f	f
f)	w	w	w

3.

	a	b	a ∧ b
a)	f	w	f
b)	w	w	w
c)	f	f	f
d)	w	f	f
e)	f	f	f
f)	f	w	f

2.4.2. Oder-Aussage (Disjunktion) und Oder-Schaltung

1. a) ausschließend
   b) nicht ausschließend
   c) nicht ausschließend
   d) ausschließend
   e) nicht ausschließend

2. a) (Herr Ehrlich zahlt bar) $\vee$ (Herr Ehrlich zahlt mit Scheck).
   b) (Frau Flott kauft einen Hut) $\vee$ (Frau Flott kauft 1 Paar Handschuhe).
   c) (Melanie hat Husten) $\vee$ (Melanie hat Schnupfen).
   d) (Patrick ist hungrig) $\vee$ (Patrick ist durstig).
   e) (6 ist Teiler von 18) $\vee$ (5 ist kein Teiler von 18).

3.

	a	b	a ∨ b
a)	f	w	w
b)	w	w	w
c)	f	f	f
d)	w	f	w
e)	f	f	f
f)	f	w	w

4.

	a	b	a ∨ b
a)	w	f	w
b)	w	w	w
c)	f	f	f
d)	w (f)	f (w)	w
e)	w	f	w
f)	w	w	w

2.4.3. Die Verneinung (Negation)

1. a) ¬ (Moskau ist die Hauptstadt von Indien). (w)
   b) ¬ (Weihnachten ist im Monat Dezember). (f)
   c) ¬ (Goethe ist ein französischer Dichter). (w)
   d) ¬ (Karl läuft 100 m in 9,5 Sekunden). (w)
   e) ¬ (7 ist Teiler von 42). (f)
   f) ¬ (50 ist eine Quadratzahl). (w)

2. a) ¬ (Der Monat April hat 30 Tage). (f)
   b) ¬ (Das Warenbestandskonto ist ein Passivkonto). (w)
   c) ¬ ($2^4 > 16$). (w)
   d) ¬ ($7 \cdot 17 < 120$). (f)
   e) ¬ (Die Zahl 37 ist eine Primzahl). (f)
   f) ¬ (19 ist Teiler von 76). (f)

3. a) Der Umsatz steigt oder der Gewinn nimmt zu.
   b) Der Umsatz steigt und der Gewinn nimmt zu.
   c) Der Umsatz steigt nicht oder der Gewinn nimmt zu.
   d) Der Umsatz steigt oder der Gewinn nimmt nicht zu.
   e) Der Umsatz steigt nicht oder der Gewinn nimmt nicht zu.
   f) Der Umsatz steigt nicht und der Gewinn nimmt zu.
   g) Der Umsatz steigt und der Gewinn nimmt nicht zu.
   h) Der Umsatz steigt nicht und der Gewinn nimmt nicht zu.

4. a) $a \vee b$. Der Betrieb investiert oder die Rentabilität steigt.
   b) $a \wedge b$. Der Betrieb investiert und die Rentabilität steigt.
   c) $\bar{a} \vee b$. Der Betrieb investiert nicht oder die Rentabilität steigt.
   d) $a \vee \bar{b}$. Der Betrieb investiert oder die Rentabilität steigt nicht.
   e) $\bar{a} \vee \bar{b}$. Der Betrieb investiert nicht oder die Rentabilität steigt nicht.
   f) $\bar{a} \wedge b$. Der Betrieb investiert nicht und die Rentabilität steigt.
   g) $a \wedge \bar{b}$. Der Betrieb investiert und die Rentabilität steigt nicht.
   h) $\bar{a} \wedge \bar{b}$. Der Betrieb investiert nicht und die Rentabilität steigt nicht.

5. a) Wir rufen an und wir schreiben nicht einen Brief.
   b) Wir rufen an oder wir schreiben einen Brief.
   c) Wir rufen nicht an und wir schreiben nicht einen Brief.
   d) Wir rufen nicht an oder wir schreiben einen Brief.

6.

a	b	$\bar{b}$	$a \lor \bar{b}$	$a \land \bar{b}$
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0

a	b	$\bar{a}$	$\bar{a} \land b$	$a \land \bar{a}$
1	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

7.

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \lor \bar{b}$	$\bar{a} \land \bar{b}$	$\overline{a \lor b}$	$\overline{a \land b}$
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1

8. a)

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a \land b$	$\bar{a} \land \bar{b}$	$(a \land b) \lor (\bar{a} \land \bar{b})$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1

b)

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \lor b$	$\bar{b} \lor a$	$a \lor b$	$\bar{a} \lor \bar{b}$	$(a \lor b) \land (\bar{a} \lor \bar{b})$
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0

2.4.4 Wenn-dann-Aussage (Subjunktion und Implikation)

1. a) Wenn es regnet, dann werden wir nass.
   b) Wenn die Löhne steigen, dann steigen die Preise.
   c) Wenn Sabrina fleißig ist, dann bekommt Sabrina gute Noten.
   d) Wenn London eine Millionenstadt ist, dann ist London eine Großstadt.
   e) Wenn Lukas Stabhochspringer ist, dann ist Lukas Leichtathlet.

2. a) x ist eine Raute → x ist ein Parallelogramm.
   Wenn x eine Raute ist, dann ist x ein Parallelogramm.

   b) y ist ein Aktivkonto → y ist ein Bilanzkonto.
   Wenn y ein Aktivkonto ist, dann ist y ein Bilanzkonto.

   c) z ist durch 6 teilbar → z ist durch 3 teilbar.
   Wenn z durch 6 teilbar ist, dann ist z durch 3 teilbar.

   d) x ist ein Scheck → x ist ein Zahlungsmittel.
   Wenn x ein Scheck ist, dann ist x ein Zahlungsmittel.

e) y ist eine Aktie → y ist ein Wertpapier.
Wenn y eine Aktie ist, dann ist y ein Wertpapier.

f) z ist Schüler unserer Klasse → z ist Schüler unserer Schule.
Wenn z Schüler unserer Klasse ist, dann ist z Schüler unserer Schule.

3. a) $\bar{a} \vee b$ b) $\bar{b} \vee a$ c) $\bar{p} \vee q$ d) $\bar{q} \vee p$

4. a) Und-Aussage:

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Eine Und-Aussage ist wahr, wenn alle Teilaussagen wahr sind.

b) Oder-Aussage:

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Eine Oder-Aussage ist wahr, wenn wenigstens eine Teilaussage wahr ist.
Eine Oder-Aussage ist falsch, wenn alle Teilaussagen falsch sind.

c) Wenn-dann-Aussage:

a	b	$a \rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Die Aussagenverknüpfung $a \rightarrow b$ ist falsch, wenn a wahr und b falsch ist.

5. a)

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a \rightarrow \bar{b}$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

b)

a	b	$\bar{a}$	$\bar{a} \vee b$	$a \rightarrow (\bar{a} \vee b)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

c)

a	b	$\bar{a}$	$a \vee b$	$\bar{a} \rightarrow (a \vee b)$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

d)

a	b	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$	$a \wedge b$	$(a \vee b) \rightarrow (a \wedge b)$
1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1

e)

a	b	$\bar{a}$	$a \rightarrow b$	$a \wedge b$	$(a \rightarrow b) \rightarrow (a \wedge b)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0

6. a)

a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \Rightarrow a$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

b)

a	b	$a \vee b$	$a \wedge (a \vee b)$	$a \wedge (a \vee b) \Rightarrow a$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

c)

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

d)

a	b	$\bar{a}$	$\bar{a} \vee b$	$(\bar{a} \vee b) \wedge a$	$[(\bar{a} \vee b) \wedge a] \Rightarrow b$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1

e)

a	b	$\bar{a}$	$a \rightarrow b$	$(a \rightarrow b) \wedge a$	$[(a \rightarrow b) \wedge a] \Rightarrow a$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1

f)

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a \rightarrow b$	$(a \rightarrow b) \wedge \bar{b}$	$[(a \rightarrow b) \wedge \bar{b}] \Rightarrow \bar{a}$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

2.4.5. Die Verknüpfungen Bijunktion und Äquivalenz

1. a) $a \rightarrow b$ Wenn x ein Passivkonto ist, dann ist x ein Bilanzkonto.

   b) $b \rightarrow a$ Wenn y ein gleichseitiges Dreieck ist, dann ist y ein gleichschenkliges Dreieck.

   c) $a \leftrightarrow b$ Wenn die Geraden g und h parallel sind, dann schneiden sich die Geraden g und h nicht.
   Wenn die Geraden g und h sich nicht schneiden, dann sind die Geraden g und h parallel oder liegen nicht in einer Ebene.

   d) $a \leftrightarrow b$ Wenn die Dreiecke x und y deckungsgleich sind, dann stimmen die Dreiecke x und y in drei Seiten überein.
   Wenn die Dreiecke x und y in drei Seiten übereinstimmen, dann sind die Dreiecke x und y deckungsgleich.

   e) $b \rightarrow a$ Wenn y und z deckungsgleiche Dreiecke sind, dann sind y und z flächengleiche Dreiecke.

   f) $a \rightarrow b$ Wenn z in Deutschland liegt, dann liegt z in Europa.

2. a)

a	b	$a \vee b$	$a \wedge (a \vee b)$	$[a \wedge (a \vee b)] \Leftrightarrow a$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

b)

a	b	$a \wedge b$	$a \vee (a \wedge b)$	$[a \vee (a \wedge b)] \Leftrightarrow a$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

c)

a	b	$\bar{a}$	$\bar{a} \vee b$	$(\bar{a} \vee b) \rightarrow b$	$a \vee b$	$[(\bar{a} \vee b) \rightarrow b] \Leftrightarrow (a \vee b)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0

d)

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{b} \rightarrow \bar{a}$	$a \rightarrow b$	$(\bar{b} \rightarrow \bar{a}) \Leftrightarrow (a \rightarrow b)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

e)

a	b	$a \vee b$	$(a \vee b) \rightarrow b$	$a \rightarrow b$	$[(a \vee b) \rightarrow b] \Leftrightarrow (a \rightarrow b)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

f)

a	b	$\bar{b}$	$a \wedge \bar{b}$	$(a \wedge \bar{b}) \rightarrow b$	$a \rightarrow b$	$[(a \wedge \bar{b}) \rightarrow b] \Leftrightarrow (a \rightarrow b)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1