

4 Das Rechnen in der Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen

4.1 Variablen, Terme, Grundbereich

- | | | | |
|------------------|--------------|---------|------|
| 1. a) 12, 21, 30 | b) 18, 12, 6 | 4. a) 5 | b) 4 |
| 2. a) 48 | b) 55 | 5. a) 1 | b) 9 |
| 3. a) 28 | b) 18 | | |

4.2 Der Betrag einer Zahl

1. -9 ; $+7$; -16 ; $+19$; 0 ; $-a$; $+b$; $-x$; $+y$;
 2. $|+8| = 8$; $|-8| = 8$; $|+15| = 15$; $|-15| = 15$; $|+21| = 21$; $|-24| = 24$; $|0| = 0$;
 $|+x| = x$ bei $x \in \mathbb{N}^*$; $|-x| = x$ bei $x \in \mathbb{N}^*$.

Ist $x \in \mathbb{Z}$, so gilt:

$$|x| = x \text{ bei } x > 0; \text{ zum Beispiel } x = 3; |3| = 3$$

$$|x| = -x \text{ bei } x < 0; \text{ zum Beispiel } x = -3; |-3| = -(-3) = 3$$

$$|-x| = x \text{ bei } x > 0; \text{ zum Beispiel } x = 3 \Leftrightarrow -x = -3; |-3| = 3$$

$$|-x| = -x \text{ bei } x < 0; \text{ zum Beispiel } x = -3 \Leftrightarrow -x = 3; |-3| = -(-3) = 3$$

Der Betrag einer Zahl spielt u.a. eine Rolle bei der Berechnung der Quadratwurzel. Die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl a ist die positive Zahl b , deren Quadrat gleich a ist.

Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt also:

$$\sqrt{x^2} = |x|; \text{ Beispiele: } \sqrt{5^2} = |5| = 5; \sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$$

$$\sqrt{(x+2)^2} = |x+2|; \quad 1. |x+2| = x+2 \text{ für } x \geq -2$$

$$2. |x+2| = -(x+2) \text{ für } x \leq -2$$

Beispiel zu 1. x sei -1 , dann ist $|x+2| = |-1+2| = |1| = 1$

Beispiel zu 2. x sei -4 , dann ist $|x+2| = |-4+2| = |-2| = 2$

$$\text{oder } |x+2| = -(x+2) = -(-4+2) = -(-2) = 2$$

4.3 Die Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

4.3.1 Die Addition

- | | | |
|-------------------------|---|----------------|
| 1. a) 11; 2; -3; -14; 3 | 2. a) $-2a$; $-14a$; $6a$; 0 ; $-4a$ | |
| b) 0; -5; -13; 0; -4 | b) $-16b$; $-6b$; 0 ; $17b$ | |
| c) -9; -31; 11; 9; -15 | c) $-9c$; $-33c$; $23c$; 0 | |
| 3. a) $4a + 9b$ | b) $-5m - 6n$ | c) $x - y + z$ |

4.3.2 Die Subtraktion

- | | | |
|-------------------------|---------------------------------------|-----------------|
| 1. a) 2; 11; -7; 5; -5 | 2. a) $-2a$; $-a$; 0 ; $7a$; a | |
| b) 8; 0; -6; 0; 6 | b) 0 ; $-15b$; b ; 0 ; $-b$ | |
| c) 35; -27; 4; -11; -12 | c) $27c$; c ; $-29c$; $-3c$ | |
| 3. a) $a - 2b + 3c$ | b) 0 | c) $-x + y - z$ |

4.3.3 Die Addition und Subtraktion von Summen und Differenzen

- a) $a - b$ b) $4p - 7q$ c) $-14n$ d) $2x - y$
- a) $-2a + 5b - 7c$ b) $-p + q - 1$
 c) $12x - 5y$ d) $5x - 3y - 1$
- a) $2a - 3b = 10 - 9 = 1$ c) $3p - 2q + 1 = 9 - 10 + 1 = 0$
 b) $3m - 5n = 24 - 15 = 9$
- a) $a - b + c$ b) $2m + 4n + 2$ c) $2r - 6s - 5$
 d) $7p + 10q - 7$ e) $6x - 9y + 5z + 15$
- a) $2a - 5b = 12 - 10 = 2$ c) $2p - 3q = 10 - 12 = -2$
 b) $-m - 3n + 6 = -3 - 3 + 6 = 0$

4.4 Die Multiplikation und Division ganzer Zahlen

4.4.1 Die Multiplikation. Erster Potenzsatz

- a) $5 \cdot 8$ b) $4a$ c) $3(a + b)$ d) $4(x - y)$
 e) $3(4m - 3n)$ f) $4(3a + 1)$
- a) $5 + 5 + 5 + 5$ b) $9 + 9 + 9$ c) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
 d) $x + x + x + x + x$ e) $(m + n) + (m + n) + (m + n)$
 f) $(p - q) + (p - q) + (p - q) + (p - q)$
 g) $(x + y + z) + (x + y + z)$
 h) $(5a - 4b) + (5a - 4b) + (5a - 4b)$
- a) $(25 \cdot 4)^9 = 900$ b) $(20 \cdot 5)^{27} = 2\,700$ c) $(125 \cdot 8)^{13} = 13\,000$
 d) $(6 \cdot 5)^{33} = 990$ e) $(2 \cdot 50)(7 \cdot 9) = 6\,300$
- a) $24a = 24 \cdot 3 = 72$ b) $30b = 30 \cdot 4 = 120$
 c) $21x = 21 \cdot 5 = 105$ d) $52y = 52 \cdot 2 = 104$
 e) $12ab = 12 \cdot 3 \cdot 4 = 144$ f) $45ab = 45 \cdot 3 \cdot 4 = 540$
 g) $56xy = 56 \cdot 5 \cdot 2 = 560$ h) $20abxy = 20 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 = 2\,400$
 i) 0 k) $24abxy = 24 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 = 2\,880$
- a) 15 b) -8 c) -14 d) 36
 e) $-12ab$ f) $30mn$ g) $-21pq$ h) $32xy$
- a) -42 b) 45 c) 0 7. a) $10a + 25b$ b) $24m - 16n$ c) $12p + 21q$
 d) $60abc$ e) $-84pqr$ f) $-54xyz$ d) $20x - 12y$ e) $6ab + 12ac$ f) $28p + 20pq$
 g) $8xy - y$ h) $12xz + 3yz$
- a) $3ab + 3ac = 3 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot 2 = 75$
 b) $5a + 10b + 15c = 5 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 15 \cdot 2 = 85$
 c) $8ab + 6bc + 10b = 8 \cdot 5 \cdot 3 + 6 \cdot 3 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 186$
 d) $6ab - 2ac = 6 \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 2 = 90 - 20 = 70$
 e) $20a - 4b - 8c = 20 \cdot 5 - 4 \cdot 3 - 8 \cdot 2 = 100 - 12 - 16 = 72$
 f) $9ac - 6bc - 3c = 9 \cdot 5 \cdot 2 - 6 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 90 - 36 - 6 = 48$
- a) $4a + 10b$ und $8a + 10b$ b) $3m + 20n$ und $15m + 20n$
 c) $18p + 7q$ und $18p + 42q$ d) $36x + 8y$ und $36x + 32y$
- a) $8a - 6b$ und $16a - 6b$ b) $5x - 3y$ und $15x - 3y$
 c) $12a - 2b$ und $12a - 8b$ d) $20x - 3y$ und $20x - 15y$

11. a) $52a - 67b$ b) $3u - 69v$ c) $24m + 3n + 35mn$
 d) $-46p + 7pq + 12q$
12. a) $-14a + 26 = (-14) \cdot (-2) + 26 = 54$
 b) $22p + 9 = 22 \cdot (-3) + 9 = -57$
 c) $38x + 1 = 38 \cdot (-4) + 1 = -151$
13. a) $4 \cdot 5$ b) 5^4 c) $3x$ d) x^3 e) $(x + y)^2$ f) $2(x + y)$
 g) $(ab)^2$ h) $2ab$
14. a) $6 \cdot 6 \cdot 6$ b) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ c) $a \cdot a \cdot a \cdot a$
 d) $a + a + a + a$ e) $(a + b)(a + b)$ f) $(a + b) + (a + b)$
15. a) 9 und 8 b) 16 und 256 c) 4 und 4 d) 10 und 25
 e) 12; 12; 64; 81 f) 16 und 16
- Ausnahme: $4^2 = 16$; $2^4 = 16$
16. a) 1 b) -1 c) -8 d) 9 e) -32
 f) $-a^3$ g) a^4 h) $-8a^3$ i) $-64x^3$ k) $81y^4$
17. a) 1 000 b) 100 000 c) 3 000 000 d) 4 000 000 000
 e) 1 500 000 f) 120 000 000
18. a) 10^5 b) $3 \cdot 10^6$ c) $4 \cdot 10^7$ d) $25 \cdot 10^9$
19. a) $3^5 = 243$ b) $2^7 = 128$ c) $4^4 = 256$ d) $5^5 = 3125$
 e) $2^6 = 64$ f) $10^6 = 1\,000\,000$ g) a^6 h) b^5
 i) c^8 k) x^4 l) y^5 m) z^4
20. a) $15a^2$ b) $21b^2$ c) $6c^2$ d) $24m^3$ e) $5n^4$
 f) $16p^5$ g) $35q^7$ h) $24x^5$ i) $9y^6$ k) $25z^{10}$
21. a) $3a^2b^2$ b) $9a^2b^2$ c) $2x^3y^3$ d) $8x^3y^3$ e) $48a^2b^2$
22. a) $10a^2b^3 = 10 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 1\,080$ b) $20a^3b^3 = 20 \cdot 2^3 \cdot 3^3 = 4\,320$
 c) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 4^2 = 10\,368$ d) $30a^3b^3 = 30 \cdot 2^3 \cdot 3^3 = 6\,480$
23. a) $-36a^2$ b) $-35m^3$ c) $8p^3$ d) $-x^3$
 e) $-3a^3b^2$ f) $-12a^3b^2$ g) $-x^4y^5$ h) $-15z^6$
24. a) $12a^2b^2$ b) $-60p^3q^2$ c) $-14x^3y^2$
 d) $-6a^5b^3$ e) $5p^3q^3$ f) $12x^2y^6$
25. a) $35a^4 - 42ab^3$ b) $8p^3q^3 + 6pq^4$ c) $3a^3b^2 + a^2b^3$
 d) $-15a^3b^2 + 12a^4b$ e) $-10p^4q^2 - 6p^3q$ f) $8x^6y^3 - 3x^4y^5$

4.4.2 Die Division. Zweiter Potenzsatz

1. a) $5b$ b) $2c$ c) p d) $14q$
 e) $-4a$ f) $-3b$ g) $-2p$ h) $3q$
2. a) 3 b) 9 c) 1 d) 12z
 e) -3 f) -5 g) $6x$ h) $-y$
3. a) $4n$ b) 3 c) 4 d) 1
 e) -9 f) $-4p$ g) y h) $-12xyz$
4. a) $7x$ b) nicht möglich c) 0 d) nicht möglich
 e) -1 f) 0 g) nicht möglich h) 1

5. a) $4a + 3b$ b) $5m - 3n$ c) $5x - 3y$
 d) $-3a + 2b$ e) $-6p - 7q$ f) $5x + 4y$
 g) $-6b + 4c$ h) $-7m - 4n$ i) $19r - 17s$
6. a) $4a + 7$ b) $5n - 3$ c) $2x - 1$
 d) $-5a + 3$ e) $8n - 6$ f) $-5x - 4$
 g) $7c + 9$ h) $-3 - 8s$ i) $-13 + 15q$
7. $18 : 1; 2; 3; 6; 9; 18$
 $28 : 1; 2; 4; 7; 14; 28$
 $40 : 1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40$
 $48 : 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48$
 $60 : 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60$
 $84 : 1; 2; 3; 4; 6; 7; 12; 14; 21; 28; 42; 84$
8. a) $1 \cdot 24; 2 \cdot 12; 3 \cdot 8; 4 \cdot 6$ b) $1 \cdot 36; 2 \cdot 18; 3 \cdot 12; 4 \cdot 9; 6 \cdot 6$
 c) $1 \cdot 42; 2 \cdot 21; 3 \cdot 14; 6 \cdot 7$ d) $1 \cdot 48; 2 \cdot 24; 3 \cdot 16; 4 \cdot 12; 6 \cdot 8$
 e) $1 \cdot 60; 2 \cdot 30; 3 \cdot 20; 4 \cdot 15; 5 \cdot 12; 6 \cdot 10$ f) $1 \cdot 64; 2 \cdot 32; 4 \cdot 16; 8 \cdot 8$
 g) $1 \cdot 75; 3 \cdot 25; 5 \cdot 15$ h) $1 \cdot 84; 2 \cdot 42; 3 \cdot 28; 4 \cdot 21; 6 \cdot 14; 7 \cdot 12$
 i) $1 \cdot 96; 2 \cdot 48; 3 \cdot 32; 4 \cdot 24; 6 \cdot 16; 8 \cdot 12$
9. $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29;$
 $31; 37; 41; 43; 47; 53; 59;$
 $61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97$
10. a) $2^3 \cdot 3$ b) $2^2 \cdot 3^2$ c) $2^2 \cdot 11$ d) $3 \cdot 17$
 e) $2 \cdot 3 \cdot 11$ f) $2^3 \cdot 3^2$ g) $3 \cdot 5^2$ h) $2^3 \cdot 11$
 i) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ k) $2^2 \cdot 3^3$ l) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ m) 5^3
 n) $2 \cdot 3 \cdot 23$ p) $2 \cdot 73$ q) $3 \cdot 5 \cdot 11$ r) $3^2 \cdot 19$
 s) $3 \cdot 61$ t) $2 \cdot 3 \cdot 37$
11. a) 4 b) $2^2 = 4$ c) $3^3 = 27$ d) 5 e) 1
 f) a^2 g) b^2 h) 1 i) x k) $1^3 = 1$
12. a) $(-3)^2 = 9$ b) $(-2)^3 = -8$ c) $(-2)^2 = 4$ d) $(-1)^4 = 1$
 e) -2 f) 1 g) $-a$ h) 1
13. a) $4b$ b) $3c^2$ c) $4p^7$ d) 1
 e) $-3a$ f) $-6b$ g) $6z$ h) -1
14. a) $4a$ b) $7m^2n$ c) $7p^2$ d) x
 e) $-9b$ f) $-4p$ g) x h) -1
15. a) $-x^2$ b) nicht möglich c) 0 d) $-x$
 e) 0 f) nicht möglich g) 1 h) 0
16. a) $2a = 2 \cdot 3 = 6$ b) $3b^2 = 3 \cdot 2^2 = 12$
 c) $6a = 6 \cdot 3 = 18$ d) $a = 3$
17. a) $5a + 6$ b) $3p^2 - 2p$ c) $2y - 1$
 d) $-7a + 3$ e) $-4 - q$ f) $1 + x$
18. a) $9y^2 + 8y - 2$ b) $z^2 + 2z + 3$ 19. a) $-9a + 4b$ b) $9p + 7q$
 c) $-3x^2 + 2x + 1$ d) $1 - 3y + 5y^2$ c) $2x - 1$ d) $a^2b - ab^2$
20. a) $12a + 4b$ und $3a + 4b$ b) $5x - 4y$ und $30x - 4y$
 c) $20a^2 - 3b$ und $4a - 3b$ d) $7x + 3y$ und $21x^2y + 3y$

4.4.3 Die Multiplikation von Summen

1. a) $a^2 + 2a - 15$ b) $b^2 - 2b - 24$ c) $c^2 - 13c + 40$
2. a) $12p^2 + pq - 35q^2$ b) $54r^2 - 57rs + 10s^2$ c) $28u^2 - 17uv - 3v^2$
3. a) $45ac - 20bc + 27a - 12b$ b) $25mp - 40np - 35m + 56n$
c) $24ux + 56vx - 27uy - 63vy$
4. a) $4a^2 + ab - 14b^2$ b) $32p^2 - 68pq + 21q^2$
c) $5x^2 + 2xy - 3y^2$
5. a) $10a^4 - a^3 - 3a^2$ b) $4m^3 - m^2 - 3m$ c) $32p^4 - 28p^3 + 5p^2$
6. a) $6xy^2 - 15xy + 2x^2y^2 - 5x^2y$ b) $7b^2c + 3b^2c^2 - 28bc - 12bc^2$
c) $-24m^2n - 20mn^2 + 6m + 5n$
7. a) $20p^3 - 29p^2 + p + 6$ b) $q^4 - 1$
8. a) $3 - 8x - 4x^2 + 4x^3 - 3x^4$
b) $x^3 - x^2y + 2x^2 - xy^2 + y^3 - 2y^2 - x + y - 2$
9. a) $48a^2 - 6ab - 43b^2$ b) $2ab - 27b^2$
10. a) $20x^2 - 7xy - 6y^2 + 63x - 54y$ b) $20x^2 - 7xy - 6y^2 - 63x + 54y$

4.4.4 Binomische Formeln

1. a) $m^2 + 2mn + n^2$ b) $4p^2 + 4p + 1$ c) $16r^2 + 24rs + 9s^2$
d) $u^2 + 10uv + 25v^2$ e) $49x^2 + 112xy + 64y^2$
2. a) $b^2 - 2bc + c^2$ b) $1 - 8m + 16m^2$ c) $25m^2 - 60mn + 36n^2$
d) $9x^2 - 42xy + 49y^2$ e) $z^2 - 2z + 1$
3. a) $x^2 - y^2$ b) $16a^2 - 25$ c) $49m^2 - 9n^2$ d) $p^2 - 16q^2$
4. a) $a^4 + 2a^3 + a^2$ b) $25a^4 - 30a^2b^2 + 9b^4$
c) $36m^4 - 12m^2n^2 + n^4$ d) $16p^4 + 24p^5 + 9p^6$
e) $9x^6 - 12x^5 + 4x^4$
5. a) $a^2 - 2ab + b^2$ b) $25 + 10t + t^2$ c) $16r^2 - 56rs + 49s^2$
d) $9u^2 + 30uv + 25v^2$ e) $1 + 2z + z^2$
6. a) $64a^4 - 25b^4$ b) $16m^4 - 25n^6$ c) $49y^6 - 36y^4$
7. a) $25x^4 - x^2$ b) $36x^6 - 25y^4$ c) $z^6 - 9z^4$
8. a) $a^2 - 16b^2$ b) $9m^2 - 25n^2$ c) $49y^2 - 16x^2$
9. a) $25p^2 + 60pq + 36q^2$ b) $16r^2 + 16rs + 4s^2$ c) $36x^2 - 12xy + y^2$
10. a) 729 b) 1 849 c) 3 481
11. a) $25a^2 + 18ab + 10b^2$ b) $16m^2 + 94mn + 33n^2$
c) $39x^2 - 68xy + 5y^2$
12. a) $69x^2 - 142xy - 105y^2$ b) $54p^2 + 60pq + 6q^2$
13. a) $4a^2 - 58ab - 8b^2$ b) $-18x^2 + 18x + 1$
14. a) $19m^2 + 14mn - 33n^2$ b) $10p^2 + 4p - 21$
15. a) $36a^2 - 24ab - b^2$ b) $-89x^2 + 49y^2$
16. a) $(2a + b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$ b) $(a - 4b)^2 = a^2 - 8ab + 16b^2$
c) $(3a - 2)^2 = 9a^2 - 12a + 4$ d) $(6 + 5b)^2 = 36 + 60b + 25b^2$
17. a) $(3x - 5y)^2 = 9x^2 - 30xy + 25y^2$ b) $(1 + 2y)^2 = 1 + 4y + 4y^2$
c) $(7x + 1)^2 = 49x^2 + 14x + 1$ d) $(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

4.4.5 Zerlegen von Summen in Faktoren

1. a) $4(2a - 3b)$ b) $3(5m + 3n)$ c) $7(3r - 2s)$
d) $8(3u + v)$ e) $11(2x - 1)$
2. a) $a(b + c)$ b) $b(x - y)$ c) $q(p + r)$
d) $y(x + y)$ e) $y(y - z)$
3. a) $5a(3b + 5)$ b) $6n(3m - 4)$ c) $9p(3q + 4)$
d) $7y(3x - 1)$ e) $8z(y - 2)$
4. a) $3a(7a - 8)$ b) $8p(4 + 5p)$ c) $9x(5x - 4)$
d) $4y(5 + 7y)$ e) $6z(2z - 3)$
5. a) $8ab(2a - 3b)$ b) $2pq(7q + 4p)$ c) $5uv(3u - 2)$ d) $7xy(6xy - 7)$
6. a) $6a(3x - 2y + 4z)$ b) $5pq(4 + p - 3q)$ c) $7xy(2y - 3x + 1)$
7. a) $3ab(3ab - 2a + 5b)$ b) $4pq(6q + 3p - pq)$ c) $8x(2xy + y - 3)$
8. a) $(p + q)(a + b)$ b) $(a - b)(p - q)$ c) $(x + y)(m - n)$
9. a) $(c - d)(a + 1)$ b) $(m + n)(b - 1)$ c) $(x - y)(p - 1)$
10. a) $(c + d)(a - 1)$ b) $(m - n)(b - 1)$ c) $(x + y)(p - 1)$
11. a) $(a + 5)(a - 5)$ b) $(m + 1)(m - 1)$ c) $(1 + p)(1 - p)$
d) $(q + 4)(q - 4)$ e) $(2 + x)(2 - x)$
12. a) $(3a + 2b)(3a - 2b)$ b) $(5m + 6n)(5m - 6n)$
c) $(7p + 9q)(7p - 9q)$ d) $(10x + 11y)(10x - 11y)$
e) $(12y + 13z)(12y - 13z)$
13. a) $(4a + 7b)(4a - 7b)$ b) $(8p + 5q)(8p - 5q)$ c) $(uv + 1)(uv - 1)$
d) $(1 + 2uv)(1 - 2uv)$ e) $(x + yz)(x - yz)$
14. a) $(a + a^2)(a - a^2)$ b) $(3b^2 + 2b)(3b^2 - 2b)$ c) $(6p + 7p^2)(6p - 7p^2)$
d) $(4q^2 + 5q)(4q^2 - 5q)$ e) $(x^2y^2 + z^2)(x^2y^2 - z^2)$
15. a) $(a + 5)^2$ b) $(p - 6)^2$ c) $(x + 7)^2$ d) $(y - 1)^2$
16. a) $(1 + 2a)^2$ b) $(3 - 4b)^2$ c) $(4 + x)^2$ d) $(1 - 5y)^2$
17. a) $(2a - b)^2$ b) $(4p + 3q)^2$ c) $(7u - 5v)^2$ d) $(9x + 2y)^2$
18. a) $(3a^2 - 2)^2$ b) $(5m^2 + 4)^2$ c) $(p^2 - 3q^2)^2$ d) $(6x^2 + 7y^2)^2$
19. a) $(4a - 1)^2$ b) $(5p + 1)^2$ c) $(8u - 5v)^2$ d) $(4x + 9y)^2$
20. a) $(a + 3)(a + 5)$ b) $(p + 3)(p + 6)$ c) $(x + 1)(x + 6)$
d) $(y + 4)(y + 1)$
21. a) $(b - 5)(b - 2)$ b) $(m - 8)(m - 2)$ c) $(q - 1)(q - 10)$
d) $(z - 1)(z - 2)$
22. a) $(a - 2)(a + 4)$ b) $(p + 8)(p - 2)$ c) $(x + 4)(x - 3)$
d) $(y + 9)(y - 4)$
23. a) $(b - 6)(b + 4)$ b) $(n - 5)(n + 4)$ c) $(q - 9)(q + 1)$
d) $(z - 12)(z + 1)$
24. a) $(a + 2b)(a + 3b)$ b) $(p - 3q)(p - 4q)$ c) $(m + 8n)(m - 3n)$
d) $(x - 3y)(x + 2y)$
25. a) $(4a + b)(2a + b)$ b) $(7m - n)(2m - n)$ c) $(7p + q)(p + q)$
d) $(9x - y)(x - y)$

26. a) $(p + q)(r + s)$ b) $(a - b)(x + y)$ c) $(p - q)(x - y)$
 27. a) $(a + 2b)(3c + d)$ b) $(a^2 + b)(a - 2)$ c) $(3p - 2q)(4x - y)$
 28. a) $3x(4p^2 - 20p + 25) = 3x(2p - 5)^2$ b) $2a(16x^2 + 8xy + y^2) = 2a(4x + y)^2$
 c) $4x(y^2 - 10yz + 25z^2) = 4x(y - 5z)^2$
 29. a) $3(4a^2 - x^2) = 3(2a + x)(2a - x)$ b) $5a(x^2 - 9y^2) = 5a(x + 3y)(x - 3y)$
 c) $4a^2(p^2 - 16q^2) = 4a^2(p + 4q)(p - 4q)$
 30. a) $x(b^2 + 7b + 12) = x(b + 3)(b + 4)$ b) $y(a^2 - 9a + 20) = y(a - 5)(a - 4)$
 c) $2z(x^2 + 3xy - 4y^2) = 2z(x + 4y)(x - y)$

4.4.6 Die Division von Summen

1. a) $7x + 6y$ b) $5a + 3b$ 5. a) $p + 2$ b) $2m - n$
 2. a) $4p - 3q$ b) $5m - 4n$ 6. a) $3a - 5b - 2$ b) $x^2 - x + 1$
 3. a) $5a + 2c$ b) $4x - 3z$ 7. a) $x^2 - xy + y^2$ b) $2a - 3b$
 4. a) $4a - 1 + b$ b) $3x - 4$ 8. a) $27r^3 - 9r^2s + 3rs^2 - s^3$ b) $p - 2q$

4.5. Das dekadische und das duale Zahlensystem

4.5.1. Das dekadische Zahlensystem

- a) $3 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$
 b) $1 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$
 c) $4 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
 d) $8 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$
 e) $3 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$
 f) $2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
 g) $3 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$
 h) $5 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$
 i) $3 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$
 k) $7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$
 l) $1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$
 m) $4 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
 n) $6 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$
 o) $8 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$
 p) $4 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$

4.5.2. Das duale Zahlensystem

Bei modernen Computern erfolgt die Eingabe und Ausgabe der Zahlen dezimal. Die Umformung der Zahlen in das und aus dem Dualsystem übernimmt der Computer. Man sollte deshalb die Bedeutung des Rechnens mit Dualzahlen nicht überbewerten.

- | | | | |
|----------------|------------------|------------------|-------------------|
| 1. 1 \cong 1 | 6 \cong 110 | 11 \cong 1 011 | 16 \cong 10 000 |
| 2 \cong 10 | 7 \cong 111 | 12 \cong 1 100 | 17 \cong 10 001 |
| 3 \cong 11 | 8 \cong 1 000 | 13 \cong 1 101 | 18 \cong 10 010 |
| 4 \cong 100 | 9 \cong 1 001 | 14 \cong 1 110 | 19 \cong 10 011 |
| 5 \cong 101 | 10 \cong 1 010 | 15 \cong 1 111 | 20 \cong 10 100 |

	Dezimalzahl	256	128	64	32	16	8	4	2	1	Dualzahl
2. a)	27					1	1	0	1	1	11 011
b)	34				1	0	0	0	1	0	100 010
c)	47				1	0	1	1	1	1	101 111
d)	54				1	1	0	1	1	0	110 110
e)	68			1	0	0	0	1	0	0	1 000 100
f)	81			1	0	1	0	0	0	1	1 010 001
g)	87			1	0	1	0	1	1	1	1 010 111
h)	99			1	1	0	0	0	1	1	1 100 011
i)	105			1	1	0	1	0	0	1	1 101 001
j)	158		1	0	0	1	1	1	1	0	10 011 110
k)	255		1	1	1	1	1	1	1	1	11 111 111
l)	312	1	0	0	1	1	1	0	0	0	100 111 000

Bei mehrziffrigen Dezimalzahlen kann man auch nach folgender Regel verfahren: Man dividiert die Zahl fortgesetzt durch 2 und schreibt die jeweiligen Reste 1 oder 0 der Reihe nach von rechts nach links auf.

$$312 : 2 = 156 \text{ Rest } 0 \quad 312 \cong 100\ 111\ 000$$

$$156 : 2 = 78 \text{ Rest } 0$$

$$78 : 2 = 39 \text{ Rest } 0$$

$$39 : 2 = 19 \text{ Rest } 1$$

$$19 : 2 = 9 \text{ Rest } 1$$

$$9 : 2 = 4 \text{ Rest } 1$$

$$4 : 2 = 2 \text{ Rest } 0$$

$$2 : 2 = 1 \text{ Rest } 0$$

$$1 : 2 = 0 \text{ Rest } 1$$

	dezimal	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	Dualzahl
3. a)	448				1	1	1	0	0	0	0	0	0	111 000 000
b)	523			1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1 000 001 011
c)	687			1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1 010 101 111
d)	708			1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1 011 000 100
e)	835			1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1 101 000 011
f)	971			1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1 111 001 011
g)	1 000			1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1 111 101 000
h)	1 368		1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	10 101 011 000
i)	1 789		1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	11 011 111 101
k)	2 124	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	100 001 001 100
l)	2 943	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	101 101 111 111
m)	3 955	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	111 101 110 011

	Dualzahl	128	64	32	16	8	4	2	1	Dezimalzahl
4. a)	1 010					8	0	2	0	10
b)	10 010				16	0	0	2	0	18
c)	10 111				16	0	4	2	1	23
d)	11 000				16	8	0	0	0	24
e)	11 010				16	8	0	2	0	26
f)	11 101				16	8	4	0	1	29
g)	100 100			32	0	0	4	0	0	36
h)	101 001			32	0	8	0	0	1	41
i)	110 011			32	16	0	0	2	1	51
k)	111 100			32	16	8	4	0	0	60
l)	1 001 100		64	0	0	8	4	0	0	76
m)	1 100 111		64	32	0	0	4	2	1	103

	Dualzahl	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	Dezimalzahl
5. a)	1 101 100				64	32	0	8	4	0	0	108
b)	1 110 110				64	32	16	0	4	2	0	118
c)	10 010 000			128	0	0	16	0	0	0	0	144
d)	10 101 111			128	0	32	0	8	4	2	1	175
e)	11 001 001			128	64	0	0	8	0	0	1	201
f)	11 011 111			128	64	0	16	8	4	2	1	223
g)	100 000 101		256	0	0	0	0	0	4	0	1	261
h)	100 010 010		256	0	0	0	16	0	0	2	0	274
i)	101 000 111		256	0	64	0	0	0	4	2	1	327
k)	111 000 010		256	128	64	0	0	0	0	2	0	450
l)	1 011 011 100	512	0	128	64	0	16	8	4	0	0	732
m)	1 100 110 111	512	256	0	0	32	16	0	4	2	1	823

6. a)
$$\begin{array}{r} 1\ 101\ (13) \\ \underline{1\ 011\ (11)} \\ 11\ 000\ (24) \end{array}$$
 b)
$$\begin{array}{r} 10\ 111\ (23) \\ \underline{11\ 010\ (26)} \\ 110\ 001\ (49) \end{array}$$
 c)
$$\begin{array}{r} 110\ 110\ (54) \\ \underline{10\ 011\ (19)} \\ 1\ 001\ 001\ (73) \end{array}$$
 d)
$$\begin{array}{r} 100\ 011\ (35) \\ \underline{11\ 001\ (25)} \\ 111\ 100\ (60) \end{array}$$

7. a)
$$\begin{array}{r} 110\ 100\ (52) \\ \underline{101\ 101\ (45)} \\ 1\ 100\ 001\ (97) \end{array}$$
 b)
$$\begin{array}{r} 101\ 111\ (47) \\ \underline{110\ 111\ (55)} \\ 1\ 100\ 110\ (102) \end{array}$$
 c)
$$\begin{array}{r} 100\ 011\ (35) \\ \underline{110\ 101\ (53)} \\ 1\ 011\ 000\ (88) \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 110\ 100\ (52) \\ \underline{101\ 010\ (42)} \\ 1\ 011\ 110\ (94) \end{array}$$

$$8. \quad \begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{r} 1\ 101\ 101\ (109) \\ \underline{110\ 010\ (50)} \\ 10\ 011\ 111\ (159) \end{array} \\ \text{b) } \begin{array}{r} 1\ 001\ 010\ (74) \\ \underline{1\ 101\ 001\ (105)} \\ 10\ 110\ 011\ (179) \end{array} \\ \text{c) } \begin{array}{r} 11\ 011\ 100\ (220) \\ \underline{1\ 101\ 011\ (107)} \\ 101\ 000\ 111\ (327) \end{array} \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{array}{r} 10\ 100\ 011\ (163) \\ \underline{11\ 010\ 111\ (215)} \\ 101\ 111\ 010\ (378) \end{array}$$

$$9. \quad \begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{r} 1\ 010\ (10) \\ \underline{1\ 111\ (15)} \\ 1\ 001\ (9) \\ \underline{100\ 010\ (34)} \end{array} \\ \text{b) } \begin{array}{r} 10\ 011\ (19) \\ \underline{11\ 101\ (29)} \\ 10\ 101\ (21) \\ \underline{1\ 000\ 101\ (69)} \end{array} \\ \text{c) } \begin{array}{r} 101\ 101\ (45) \\ \underline{11\ 001\ (25)} \\ 110\ 101\ (53) \\ \underline{1\ 111\ 011\ (123)} \end{array} \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{array}{r} 110\ 011\ (51) \\ \underline{110\ 101\ (53)} \\ 11\ 110\ (30) \\ \underline{10\ 000\ 110\ (134)} \end{array}$$

$$10. \quad \begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{r} 1\ 110\ (14) \\ \underline{1\ 011\ (11)} \\ 10\ 011\ (19) \\ \underline{11\ 011\ (27)} \\ 1\ 000\ 111\ (71) \end{array} \\ \text{b) } \begin{array}{r} 11\ 001\ (25) \\ \underline{10\ 110\ (22)} \\ 1\ 110\ (14) \\ \underline{10\ 111\ (23)} \\ 1\ 010\ 100\ (84) \end{array} \\ \text{c) } \begin{array}{r} 110\ 111\ (55) \\ \underline{10\ 100\ (20)} \\ 101\ 111\ (47) \\ \underline{111\ 011\ (59)} \\ 10\ 110\ 101\ (181) \end{array} \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{array}{r} 101\ 010\ (42) \\ \underline{11\ 011\ (27)} \\ 110\ 110\ (54) \\ \underline{10\ 111\ (23)} \\ 10\ 010\ 010\ (146) \end{array}$$

$$11. \quad \begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{r} 1001 \cdot 111\ (9 \cdot 7) \\ \underline{1001} \\ 1001 \\ \underline{1001} \\ 111111\ (63) \end{array} \\ \text{b) } \begin{array}{r} 1111 \cdot 100\ (15 \cdot 4) \\ \underline{111100} \\ 111100\ (60) \end{array} \\ \text{c) } \begin{array}{r} 1010 \cdot 1010\ (10 \cdot 10) \\ \underline{10100} \\ 10100 \\ \underline{1100100} \\ 1100100\ (100) \end{array} \end{array}$$

$$12. \quad \begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{r} 10101 \cdot 1101\ (21 \cdot 13) \\ \underline{10101} \\ 101010 \\ \underline{10101} \\ 100010001\ (273) \end{array} \\ \text{b) } \begin{array}{r} 11001 \cdot 1100\ (25 \cdot 12) \\ \underline{11001} \\ 1100100 \\ \underline{100101100} \\ 100101100\ (300) \end{array} \\ \text{c) } \begin{array}{r} 10001 \cdot 1011\ (17 \cdot 11) \\ \underline{100010} \\ 10001 \\ \underline{10001} \\ 10111011\ (187) \end{array} \end{array}$$

$$13. \quad \begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{r} 11111 \cdot 110\ (31 \cdot 6) \\ \underline{11111} \\ 111110 \\ \underline{10111010} \\ 10111010\ (186) \end{array} \\ \text{b) } \begin{array}{r} 101101 \cdot 111\ (45 \cdot 7) \\ \underline{101101} \\ 101101 \\ \underline{101101} \\ 100111011\ (315) \end{array} \\ \text{c) } \begin{array}{r} 100111 \cdot 101\ (39 \cdot 5) \\ \underline{1001110} \\ 100111 \\ \underline{11000011} \\ 11000011\ (195) \end{array} \end{array}$$

14. a) $\begin{array}{r} 110101 \cdot 1001 \quad (53 \cdot 9) \\ \underline{11010100} \\ \underline{110101} \\ 111011101 \quad (477) \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 101100 \cdot 1111 \quad (44 \cdot 15) \\ \underline{101100} \\ \underline{101100} \\ \underline{101100} \\ \underline{101100} \\ 1010010100 \quad (660) \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 100011 \cdot 10011 \quad (35 \cdot 19) \\ \underline{10001100} \\ \underline{100011} \\ \underline{100011} \\ 1010011001 \quad (665) \end{array}$
15. a) $\begin{array}{r} 1100 \quad (12) \\ - 101 \quad (5) \\ \hline 111 \quad (7) \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 10011 \quad (19) \\ - 1001 \quad (9) \\ \hline 1010 \quad (10) \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 11001 \quad (25) \\ - 1110 \quad (14) \\ \hline 1011 \quad (11) \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 110010 \quad (50) \\ - 100101 \quad (37) \\ \hline 1101 \quad (13) \end{array}$
16. a) $\begin{array}{r} 1001 \quad (9) \\ - 111 \quad (7) \\ \hline 10 \quad (2) \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 11110 \quad (30) \\ - 1111 \quad (15) \\ \hline 1111 \quad (15) \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 10110 \quad (22) \\ - 10001 \quad (17) \\ \hline 101 \quad (5) \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 101110 \quad (46) \\ - 10011 \quad (19) \\ \hline 11011 \quad (27) \end{array}$
17. a) $\begin{array}{r} 110111 \quad (55) \\ - 100101 \quad (37) \\ \hline 10010 \quad (18) \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 100101 \quad (37) \\ - 1111 \quad (15) \\ \hline 10110 \quad (22) \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 1011011 \quad (91) \\ - 101101 \quad (45) \\ \hline 101110 \quad (46) \end{array}$
- d) $\begin{array}{r} 1101100 \quad (108) \\ - 1000101 \quad (69) \\ \hline 100111 \quad (39) \end{array}$
18. a) $\begin{array}{r} 1001101 \quad (77) \\ - 110010 \quad (50) \\ \hline 11011 \quad (27) \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 10100111 \quad (167) \\ - 1101010 \quad (106) \\ \hline 111101 \quad (61) \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 11011100 \quad (220) \\ - 10100110 \quad (166) \\ \hline 110110 \quad (54) \end{array}$
- d) $\begin{array}{r} 11100011 \quad (227) \\ - 10011010 \quad (154) \\ \hline 1001001 \quad (73) \end{array}$
19. a) $11001 : 101 = 101$
 $\begin{array}{r} 101 \\ \underline{101} \\ 101 \quad (25 : 5 = 5) \\ \underline{101} \\ 0 \end{array}$
- b) $10010 : 1001 = 10$
 $\begin{array}{r} 1001 \\ \underline{1001} \\ 00 \quad (18 : 9 = 2) \end{array}$
- c) $10101 : 11 = 111$
 $\begin{array}{r} 11 \\ \underline{100} \quad (21 ; 3 = 7) \\ 11 \\ \underline{11} \\ 11 \\ \underline{11} \\ 0 \end{array}$
20. a) $110110 : 110 = 1001$
 $\begin{array}{r} 110 \\ \underline{0110} \quad (54 : 6 = 9) \\ \underline{110} \\ 0 \end{array}$
- b) $1000010 : 1011 = 110$
 $\begin{array}{r} 1011 \\ \underline{1011} \\ \underline{1011} \\ \underline{1011} \\ 00 \end{array}$

c) $1\ 000\ 110 : 111 = 1\ 010$

$$\begin{array}{r} \underline{111} \\ 0\ 001\ 11 \quad (70 : 7 = 10) \\ \underline{111} \\ 00 \end{array}$$

21. a) $111\ 100 : 1\ 111 = 100$

$$\begin{array}{r} \underline{111\ 1} \\ 000 \quad (60 : 15 = 4) \end{array}$$

b) $10\ 010\ 000 : 1\ 100 = 1\ 100$

$$\begin{array}{r} \underline{1\ 100} \\ 110\ 0 \quad (144 : 12 = 12) \\ \underline{110\ 0} \\ 000 \end{array}$$

c) $10\ 111\ 011 : 10\ 001 = 1\ 011$

$$\begin{array}{r} \underline{10\ 001} \\ 110\ 01 \quad (187 : 17 = 11) \\ \underline{100\ 01} \\ 10\ 001 \\ \underline{10\ 001} \\ 0 \end{array}$$

22. a) $101\ 000\ 010 : 10\ 111 = 1\ 110$

$$\begin{array}{r} \underline{10\ 111} \\ 10\ 001\ 0 \quad (322 : 23 = 14) \\ \underline{1\ 011\ 1} \\ 101\ 11 \\ \underline{101\ 11} \\ 00 \end{array}$$

b) $11\ 100\ 000 : 100\ 000 = 111$

$$\begin{array}{r} \underline{10\ 000\ 0} \\ 1\ 100\ 00 \quad (224 : 32 = 7) \\ \underline{1\ 000\ 00} \\ 100\ 000 \\ \underline{100\ 000} \\ 0 \end{array}$$

c) $11\ 110\ 011 : 1\ 001 = 11\ 011$

$$\begin{array}{r} \underline{10\ 01} \\ 1\ 100 \quad (243 : 9 = 27) \\ \underline{1\ 001} \\ 11\ 01 \\ \underline{10\ 01} \\ 1\ 001 \\ \underline{1\ 001} \\ 0 \end{array}$$