8 Lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme

8.1 Grafische Lösung von linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen

1. a) $L = \{(3; 1)\}$ b) $L = \{(-2; 1)\}$ c) $L = \{(1{,}5; 0)\}$
   d) $L = \{(-3; -2)\}$ e) $L = \{(2; -2)\}$ f) $L = \{(0; 2)\}$

2. a) parallele Geraden. $L = \varnothing$
   b) zusammenfallende Gerade. Es gibt unendlich viele Lösungspaare.
   c) parallele Geraden. $L = \varnothing$

3. a) $\{(-1; 1)\}$ b) parallele Geraden. $L = \varnothing$ c) $\{(2; -3)\}$
   d) zusammenfallende Geraden. Es gibt unendlich viele Lösungspaare.
   e) $\{(2{,}5; 1{,}5)\}$ f) $\{(3{,}5; -1{,}5)\}$

4. a) $y = 27{,}5x \wedge y = 15x + 15000$

	x	0	1000	2000	1200	
y = 27,5x	y	0	27500	55000	33000	
y = 15x + 15000	y	15000	30000	45000	33000	S(1200|33000)

   b) Die Nutzenschwelle liegt bei 1200 Stück. Gesamtertrag und Gesamtkosten betragen je 33000,00 EUR. Bei weniger als 1200 Stück wird mit Verlust, bei mehr als 1200 Stück mit Gewinn gearbeitet.

5. a) $y = 75x + 25000 \wedge y = 137{,}5x$

	x	0	600	800	400	
y = 75x + 25000	y	25000	70000	85000	55000	
y = 137,5x	y	0	82500	110000	55000	S(400|55000)

   b) Die Nutzenschwelle liegt bei 400 Stück. Gesamtkosten und Gesamtertrag betragen je 55000,00 EUR.
   c) (22500 + 25000) EUR − 41250 EUR = 6250 EUR Verlust
   68750 EUR − (37500 + 25000) EUR = 6250 EUR Gewinn
   d) $$137{,}5x - (75x + 25000) = 12500$$
   $$62{,}5x = 37500$$
   $$\underline{\underline{x = 600}}$$

   600 Stück Produktionsmenge ergeben 12500 EUR Gewinn.

6. a) $y = 0{,}17x + 20 \wedge y = 0{,}13x + 30$

	x	0	200	500	250	
y = 0,17x + 20	y	20	54	105	62,50	
y = 0,13x + 30	y	30	56	95	62,50	S(250|62,5)

   b) Bei einem monatlichen Verbrauch von 250 kWh ergeben beide Tarife gleiche Kosten (62,50 EUR). Bei einem Verbrauch von weniger als 250 kWh ist Tarif I günstiger, bei größerem Verbrauch Tarif II.
   c) 88,00 EUR nach Tarif I; 82,00 EUR nach Tarif II.

7. a) $y = 0{,}16x + 11 \wedge y = 0{,}10x + 20$

	x	0	100	200	150
$y = 0{,}16x + 11$	y	11	27	43	35
$y = 0{,}10x + 20$	y	20	30	40	35

S(150|35)

b) Bei einem monatlichen Verbrauch von 150 kWh ergeben beide Tarife gleiche Kosten (35,00 EUR). Bis zu 150 kWh ist Tarif I günstiger, bei mehr als 150 kWh Tarif II.

8. a) $y = 1{,}5x + 180 \wedge y = 1{,}8x + 120$

	x	0	300	500	200
$y = 1{,}5x + 180$	y	180	630	930	480
$y = 1{,}8x + 120$	y	120	660	1020	480

S(200|480)

b) Bei einer Fahrtstrecke von 200 km ergeben beide Tarife gleiche Kosten. Bis zu 200 km ist Tarif II günstiger, über 200 km Tarif I.

9. $y = 0{,}5x + 85 \wedge y = 0{,}6x + 60$

	x	0	200	500	250
$y = 0{,}5x + 85$	y	85	185	335	210
$y = 0{,}6x + 60$	y	60	180	360	210

S(250|210)

Bei einer Fahrtstrecke von 250 km ergeben beide Tarife gleiche Kosten in Höhe von 210,00 EUR. Bis zu 250 km ist Tarif II günstiger, über 250 km Tarif I.

10. a) $y = 0{,}05x + 4000 \wedge y = 0{,}1x + 3000$

	x	10000	40000	20000
$y = 0{,}05x + 4000$	y	4500	6000	5000
$y = 0{,}10x + 3000$	y	4000	7000	5000

S(20000|5000)

b) Bei einem Monatsumsatz von 20000,00 EUR beträgt das Einkommen nach beiden Angeboten 5000,00 EUR. Bei einem größeren Umsatz ist Angebot II günstiger.

11. $y = 20x + 250 \wedge y = 30x + 150$

	x	0	6	12	10
$y = 20x + 250$	y	250	370	490	450
$y = 30x + 150$	y	150	330	510	450

S(10|450)

Nach 10 Monaten haben beide 450,00 EUR auf ihrem Sparkonto.

8.2 Rechnerische Lösung von linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen

	a)	b)	c)
1.	$L=\{(3;1)\}$	$L=\{(4;5)\}$	$L=\{(2;-1)\}$
2.	$L=\{(2;-3)\}$	$L=\{(-1;-1)\}$	$L=\{(-1{,}5;2)\}$
3.	$L=\{(4;-2)\}$	$L=\{(-3;3)\}$	$L=\{(5;-2)\}$
4.	$L=\left\{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)\right\}$	$L=\left\{\left(-\frac{4}{3};\frac{5}{6}\right)\right\}$	$L=\left\{\left(\frac{5}{7};-\frac{2}{3}\right)\right\}$
5.	$L=\{(3;-2)\}$	$L=\{(6;5)\}$	$L=\{(-2;-5)\}$
6.	$L=\{(-4;3)\}$	$L=\{(2;-1)\}$	$L=\{(1{,}5;0)\}$
7.	$L=\{(6;-4)\}$	$L=\{(5;-3)\}$	$L=\{(-1;0)\}$
8.	$L=\{(4;1)\}$	$L=\{(2;-3)\}$	$L=\{(-2;0)\}$
9.	$L=\{(1;-1)\}$	$L=\{(-2;-5)\}$	$L=\{(0{,}8;1{,}2)\}$
10.	$L=\{(1;-2)\}$	$L=\{(-3;4)\}$	$L=\{(-2;4)\}$
11.	$L=\{(5;4)\}$	$L=\{(1;-3)\}$	$L=\{(5;0)\}$
12.	$L=\{(1;4)\}$	$L=\{(-3;0)\}$	
13.	$L=\{(6;-2)\}$	$L=\{(-3;-4)\}$	
14.	$L=\{(4;0)\}$	$L=\{(-1;2)\}$	

15\. a) $L=\{(2;-2)\}$

b) $\begin{aligned} 2x+2y&=2 \\ \wedge\ x+y&=1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} y&=-x+1 \\ \wedge\, y&=-x+1 \end{aligned}$ Beide Geraden fallen zusammen. Das System hat unendlich viele Lösungen.

16\. a) $L=\{(8;6)\}$

b) $\begin{aligned} 2x+3y&=18 \\ \wedge\, 2x+3y&=12 \end{aligned}$ parallele Geraden. $L=\phi$

c) $L=\{(12;-12)\}$

17\. a) $\begin{aligned} 4x+5y&=3 \\ \wedge\, 4x+5y&=3 \end{aligned}$ Beide Geraden fallen zusammen. Das System hat unendlich viele Lösungen.

b) $L=\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)\right\}$

c) $L=\left\{\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{5}\right)\right\}$

18\. a) $\begin{aligned} 3x+4y&=9 \\ \wedge\, 3x+4y&=5{,}5 \end{aligned}$ Parallele Geraden; $L=\phi$

b) $L=\{(3;-2)\}$

19\. a) $L=\{(2;0)\}$

b) $L=\{(-1;1)\}$

c) $\begin{aligned} 4x-3y&=1 \\ \wedge\, 4x-3y&=3{,}5 \end{aligned}$ parallele Geraden. $L=\phi$

	a)	b)	c)
20.	$L=\{(6;-5)\}$	$L=\{(3;3)\}$	$L=\{(0;-3)\}$
21.	$L=\{(3;4)\}$	$L=\{(2;-1)\}$	$L=\{(-1;3)\}$

(Wenden Sie bei Aufg. 21 das Additionsverfahren an, ohne vorher die Nenner zu beseitigen!)

	a)	b)	c)
22.	$L=\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{5}\right)\right\}$	$L=\{(1;3)\}$	$L=\left\{\left(\frac{1}{2};2\right)\right\}$
23.	$L=\{(2;-3)\}$	$L=\{(-2;1)\}$	

24\. a) $L=\{(-3;3)\}$

b) $\begin{aligned} 3x-5y&=2 \\ \wedge\, 3x-5y&=2 \end{aligned}$ Beide Geraden fallen zusammen. Das System hat unendlich viele Lösungen.

25. a) $L = \{(-1;3)\}$ b) $L = \{(3;-2)\}$
(Wenden Sie bei Aufg. 25 das Additionsverfahren an, ohne vorher die Nenner zu beseitigen!)

8.3 Lineare Gleichungssysteme mit Formvariablen

1. a) $L = \{(2a;a)\}$ b) $L = \{(a+b;2a)\}$ c) $L = \{(3a+2b;2a+3b)\}$

2. a) $L = \{(2a;-b)\}$, $a \neq 0;\ b \neq 0$ b) $L = \{(2b;3ab)\}$, $a \neq 0$ c) $L = \{(a;-2b)\}$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

3. a) $L = \{(2a;b)\}$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ b) $L = \{(a;3b)\}$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ c) $L = \left\{\left(\frac{a}{b};\frac{b}{a}\right)\right\}$, $b \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq -b$

4. a) $L = \{(3a;2b)\}$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ b) $L = \left\{\left(\frac{a+b}{a};\frac{a-b}{b}\right)\right\}$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ c) $L = \{(a-b;a+b)\}$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b$

5. a) $L = \left\{\left(\frac{1}{a};-b\right)\right\}$, $a \neq 0 \wedge 2a+b \neq 0$ b) $L = \left\{\left(\frac{b}{a};-\frac{a}{b}\right)\right\}$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a+b \neq 0$ c) $L = \{(a+b;b-a)\}$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

8.4 Textaufgaben zu linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen

8.4.1 Zahlenrätsel

1. $x + y = 45$, $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ $\quad L = \{(18;27)\}$

2. $x - y = 21$, $\frac{x}{y} = 4$ $\quad L = \{(28;7)\}$

3. $x + y = 15$, $2x = 3y$ $\quad L = \{(9;6)\}$

4. $x - y = 13$, $x = 3y - 1$ $\quad L = \{(20;7)\}$

5. $2x - 3 = y$, $3x + 2 = 2y$ $\quad L = \{(8;13)\}$

6. $x - 5 = y$, $x - 13 = \frac{y}{3}$ $\quad L = \{(17;12)\}$

7. $x - y = 18$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 10$ $\quad L = \{(30;12)\}$

8. $\frac{x}{y} = 4$, $\frac{x-3}{y-3} = 7$ $\quad L = \{(24;6)\}$

9. $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, $\frac{x-4}{y-4} = \frac{2}{3}$ $\quad L = \{(12;16)\};\ \frac{12}{16}$

10. $\frac{x+3}{y+3} = \frac{2}{3}$, $\frac{x-4}{y-4} = \frac{1}{2}$ $\quad L = \{(11;18)\};\ \frac{11}{18}$

8.4.2 Verteilungs- und Mischungsrechnung

1. A: x EUR alter Anteil
   B: y EUR alter Anteil

   $x : y = 7 : 6$
   $(x + 6000) : (y + 8000) = 9 : 8)$

   $L = \{(84000; 72000)\}$
   neues Kapital A: 90000 EUR
   neues Kapital B: 80000 EUR

2. A: x EUR alter Anteil
   B: y EUR alter Anteil

   $x : y = 8 : 7$
   $(x + 20000) : (y + 20000) = 10 : 9$

   $L = \{(80000; 70000)\}$
   neues Kapital A: 100000 EUR
   neues Kapital B: 90000 EUR

3. A: (x + y − 6000) EUR
   B: x EUR
   C: y EUR

   $(x + y - 6000) + x + y = 36000$
   $x : y = 4 : 3$

   $L = \{(12000; 9000)\}$
   A: 15000 EUR
   B: 12000 EUR
   C: 9000 EUR

   36000 EUR

4. A: x EUR
   B: y EUR
   C: (x + y − 5000) EUR

   $x + y + (x + y - 5000) = 35000$
   $x : y = 2 : 3$

   $L = \{(8000; 12000)\}$
   A: 8000 EUR
   B: 12000 EUR
   C: 15000 EUR

   35000 EUR

5. x Schüler der Oberstufe
   y Schüler der Mittelstufe

   $x \cdot 1 + y \cdot 0{,}8 = 520 - 8$
   $x \cdot 0{,}95 + y \cdot 0{,}85 = 520 + 6$

   $L = \{(160; 440)\}$
   160 Schüler der Oberstufe
   440 Schüler der Mittelstufe

6. x EUR je kg der Sorte I
   y EUR je kg der Sorte II

   $80x + 70y = 150 \cdot 7{,}4$
   $100x + 50y = 150 \cdot 7$

   $L = \{(6; 9)\}$
   6,00 EUR je kg der Sorte I
   9,00 EUR je kg der Sorte II

7. x EUR je kg der Sorte I
   y EUR je kg der Sorte II

   $5x + 3y = 8 \cdot 13{,}5$
   $3x + 2y = 5 \cdot 13{,}6$

   $L = \{(12; 16)\}$
   12,00 EUR je kg der Sorte I
   16,00 EUR je kg der Sorte II

8. zuerst x kg der Sorte I
   zuerst y kg der Sorte II

   $x \cdot 6 + y \cdot 5 = 540$
   $x \cdot 5 + y \cdot 6 = 560$

   $L = \{(40; 60)\}$
   zuerst 40 kg der Sorte I
   zuerst 60 kg der Sorte II

9. zuerst x Liter der Sorte I
   zuerst y Liter der Sorte II

   $$\frac{x \cdot 50}{100} + \frac{y \cdot 75}{100} = \frac{100 \cdot 65}{100}$$
   $$\frac{x \cdot 75}{100} + \frac{y \cdot 50}{100} = \frac{100 \cdot 60}{100}$$

   $L = \{(40; 60)\}$
   zuerst 40 Liter der Sorte I
   zuerst 60 Liter der Sorte II

10. x% Alkoholgehalt der Sorte I
    y% Alkoholgehalt der Sorte II

    $$\frac{30 \cdot x}{100} + \frac{20 \cdot y}{100} = \frac{50 \cdot 66}{100}$$
    $$\frac{20 \cdot x}{100} + \frac{30 \cdot y}{100} = \frac{50 \cdot 69}{100}$$

    $L = \{(60; 75)\}$
    Sorte I ist 60%ig
    Sorte II ist 75%ig

8.4.3 Prozent- und Zinsrechnung

1. x EUR EPr je Stück von I
   y EUR EPr je Stück von II

   $100x + 200y = 1700$

   $\frac{100x \cdot 20}{100} + \frac{200y \cdot 25}{100} = 2100 - 1700$

   $L = \{(5; 6)\}$
   5,00 EUR EPr je Stück von I
   6,00 EUR EPr je Stück von II

2. x EUR Rechnungsbetrag I
   y EUR Rechnungsbetrag II

   $\frac{x \cdot 2}{100} + \frac{y \cdot 3}{100} = 108$

   $\frac{x \cdot 2{,}5}{100} + \frac{y \cdot 2{,}5}{100} = 100$

   $L = \{(1200; 2800)\}$
   1200,00 EUR Rechnungsbetrag I
   2800,00 EUR Rechnungsbetrag II

3. zuerst x% Skonto von 1400,00 EUR
   zuerst y% Skonto von 2200,00 EUR

   $\frac{1400 \cdot x}{100} + \frac{2200 \cdot y}{100} = 3600 - 3499$

   $\frac{2200 \cdot x}{100} + \frac{1400 \cdot y}{100} = 3600 - 3503$

   $L = \{(2{,}5; 3)\}$
   zuerst 2,5% Skonto von 1400,00 EUR
   zuerst 3 % Skonto von 2200,00 EUR

4. x EUR für 1 Liter Rotwein
   y EUR für 1 Liter Weißwein

   $100x - \frac{100x \cdot 10}{100} + 200y - \frac{200y \cdot 12}{100} = 843$

   $100x - \frac{100x \cdot 12}{100} + 200y - \frac{200y \cdot 10}{100} = 848$

   $L = \{(3{,}5; 3)\}$
   3,50 EUR für 1 Liter Rotwein
   3,00 EUR für 1 Liter Weißwein

5. x EUR je Dose von Sorte I
   y EUR je Dose von Sorte II

   $150x - \frac{150x \cdot 8}{100} + 250y - \frac{250y \cdot 10}{100} = 681$

   $150x - \frac{150x \cdot 10}{100} + 250y - \frac{250 \cdot 8}{100} = 684$

   $L = \{(2; 1{,}8)\}$
   2,00 EUR je Dose von Sorte I
   1,80 EUR je Dose von Sorte II

6. x EUR Darlehen
   y% Zinsfuß

   $\frac{x \cdot y}{100 \cdot 2} = 180$

   $\frac{(x + 800)y}{100 \cdot 2} = 200$

   $L = \{(7200; 5)\}$
   7200,00 EUR Darlehen
   5% Verzinsung

7. x EUR Darlehen zu 7% Verzinsung
   y EUR Darlehen zu 6% Verzinsung

   $\frac{x \cdot 7}{100 \cdot 2} + \frac{y \cdot 6}{100 \cdot 2} = 300$

   $\frac{(x + y)6{,}5}{100 \cdot 2} = 325$

   $L = \{(6000; 4000)\}$
   6000,00 EUR zu 7% Verzinsung
   4000,00 EUR zu 6% Verzinsung

8. x EUR Kapital
y% ursprünglicher Zinsfuß

$$\frac{x \cdot y \cdot 165}{100 \cdot 360} = 132$$

$$\frac{x \cdot (y + 1) \cdot 165}{100 \cdot 360} = 154$$

$L = \{(4800; 6)\}$
4800,00 EUR Kapital
6% ursprünglicher Zinsfuß

9. x EUR Darlehen I
y EUR Darlehen II

$$x : y = 4 : 3$$

$$\frac{x \cdot 7}{100 \cdot 4} = \frac{x \cdot 6}{100 \cdot 4} = 230$$

$L = \{(8000; 6000)\}$
8000,00 EUR Darlehen I
6000,00 EUR Darlehen II

10. zuerst x% Zinsen von 7200,00 EUR
zuerst y% Zinsen con 4800,00 EUR

$$\frac{7200 \cdot x \cdot 5}{100 \cdot 12} + \frac{4800 \cdot y \cdot 5}{100 \cdot 12} = 370$$

$$\frac{4800 \cdot x \cdot 5}{100 \cdot 12} + \frac{7200 \cdot y \cdot 5}{100 \cdot 12} = 380$$

$L = \{(7; 8)\}$
zuerst 7% von 7200,00 EUR
zuerst 8% von 4800,00 EUR

11. x% Zinsen
y Tage

$$\frac{12000 \cdot x \cdot y}{100 \cdot 360} = 350$$

$$\frac{12000 \cdot x \cdot (y + 20)}{100 \cdot 360} = 400$$

$L = \{(7,5; 140)\}$
7,5% Zinsen
140 Tage

12. x EUR ursprüngliches Darlehen
y Tage ursprünglich ausgeliehen

$$\frac{x \cdot 7 \cdot y}{100 \cdot 360} = 420$$

$$\frac{2x \cdot 7 \cdot (y - 60)}{100 \cdot 360} = 630$$

$L = \{(9000; 240)\}$
9000,00 EUR ursprüngliches Darlehen
240 Tage ursprünglich ausgeliehen

8.5 Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen

1. a) $L = \{(2; 1; 3)\}$ b) $L = \{(1; -2; -1)\}$ c) $L = \{(3; 0; -2)\}$
2. a) $L = \{(-1; 2; -2)\}$ b) $L = \{(4; -3; 0)\}$ c) $L = \{(-3; 4; -4)\}$
3. a) $L = \{(4; 3; 2)\}$ b) $L = \{12; 20; 16)\}$
4. a) $L = \{(0; -1; -2)\}$ b) $L = \{(9; 7; 4)\}$ c) $L = \{(7; 5; 2)\}$
5. x EUR je kWh Strom, y EUR je m^3 Gas, z EUR je m^3 Wasser

$$70x + 15y + 12z = 25$$
$$50x + 20y + 8z = 21$$
$$60x + 25y + 10z = 26$$

$L = \{(0,1; 0,4; 1)\}$

1 kWh Strom kostet	0,10 EUR
1 m^3 Gas kostet	0,40 EUR
1 m^3 Wasser kostet	1,00 EUR

8.6 Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen

8.6.1 Grafische Lösung von linearen Ungleichungen

1. a) Bei $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist die Relation $y < x + 2$ die Menge aller Bildpunkte mit ganzen Koordinaten, die unterhalb der Geraden $y = x + 2$ liegen.
   b) Bei $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ stellt die Relation $y < x + 2$ die Halbebene unterhalb der Geraden $y = x + 2$ dar.

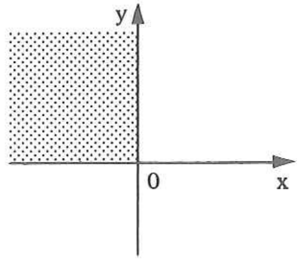
2. a) Bei $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist die Relation $y > 2x - 1$ die Menge aller Bildpunkte mit ganzen Koordinaten, die oberhalb der Geraden $y = 2x - 1$ liegen.
   b) Bei $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ stellt die Relation $y > 2x - 1$ die Halbebene oberhalb der Geraden $y = 2x - 1$ dar.

3. a) Halbebene oberhalb der Geraden $y = x - 2$ mit Randgeraden.
   b) Halbebene unterhalb der Geraden $y = x + 1$ mit Randgeraden.
   c) Halbebene oberhalb der Geraden $y = 2x - 1$ mit Randgeraden.
   d) Halbebene unterhalb der Geraden $y = -2x + 4$ ohne Randgerade.
   e) Halbebene oberhalb der Geraden $y = \frac{1}{2}x$ ohne Randgerade.
   f) Halbebene unterhalb der Geraden $y = -\frac{1}{2}x + 3$ mit Randgeraden.

4. a) Halbebene oberhalb der Geraden $y = 1{,}5x + 2$ mit der Randgeraden.
   b) Halbebene unterhalb der Geraden $y = -\frac{2}{3}x - 1$ ohne Randgerade.
   c) Halbebene oberhalb der Geraden $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ ohne Randgerade.
   d) Halbebene unterhalb der Parallelen zur x-Achse $y = 3$ mit Randgeraden.
   e) Halbebene links der Parallelen zur y-Achse $x = -2$ ohne Randgerade.
   f) Halbebene rechts der Parallelen zur y-Achse $x = 2{,}5$ mit der Randgeraden.

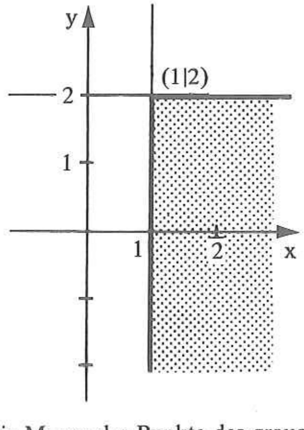
8.6.2 Grafische Lösung von linearen Ungleichungssystemen mit zwei Variablen

1. a)



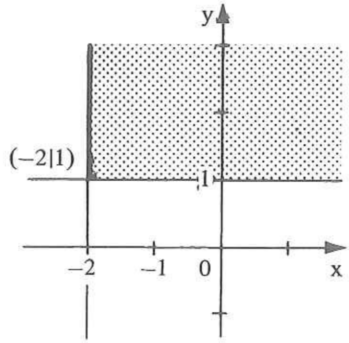
L ist die Menge der Punkte im II. Quadranten ohne die Randpunkte.

b)



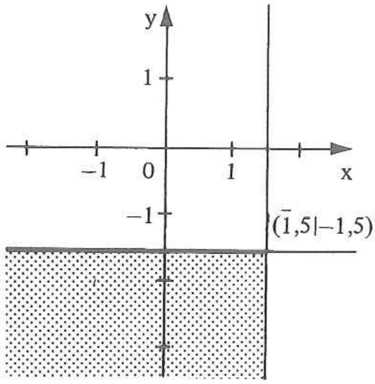
L ist die Menge der Punkte des grauen Feldes einschließlich der Punkte auf den Randgeraden. S(1|2).

c)



L ist die Menge der Punkte des grauen Feldes einschließlich der Punkte auf der senkrechten Randgeraden, aber ohne die Punkte auf der waagerechten Randgeraden. S(−2|1). S gehört nicht zu *L*.

d)

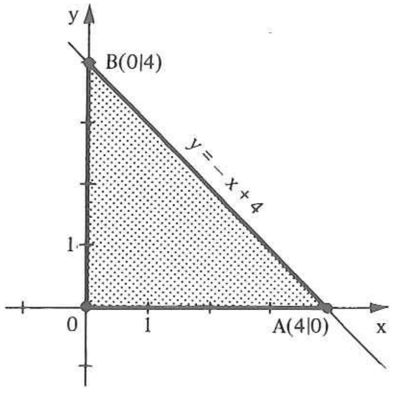


L ist die Menge der Punkte des grauen Feldes einschließlich der Punkte auf der waagerechten Randgeraden, aber ohne die Punkte auf der senkrechten Randgeraden. S(1,5|−1,5).
S gehört nicht zu *L*.

2. a) $x < 0$
$\wedge\ y < 0$ (ohne x-Achse und y-Achse)

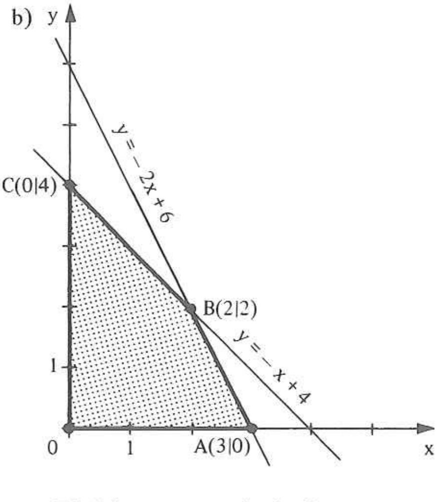
b) $x > 0$
$\wedge\ y < 0$ (ohne x-Achse und y-Achse)

3. a)



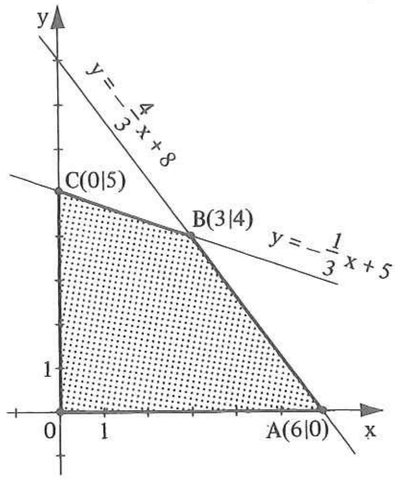
Die Lösungsmenge ist das Innere und der Rand des Dreiecks OAB.
A(4|0); B(0|4)

b)



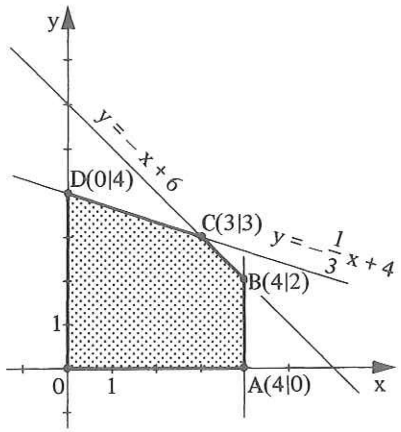
Die Lösungsmenge ist das Innere und der Rand des Vierecks OABC.
A(3|0); B(2|2); C(0|4)

4. a)



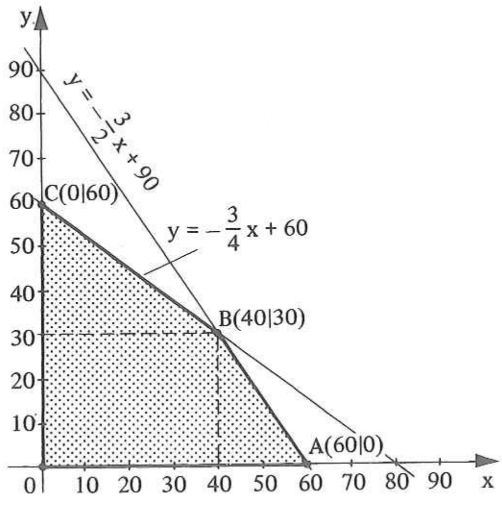
Die Lösungsmenge ist das Innere und der Rand des Vierecks OABC.
A(6|0); B(3|4); C(0|5)

b)



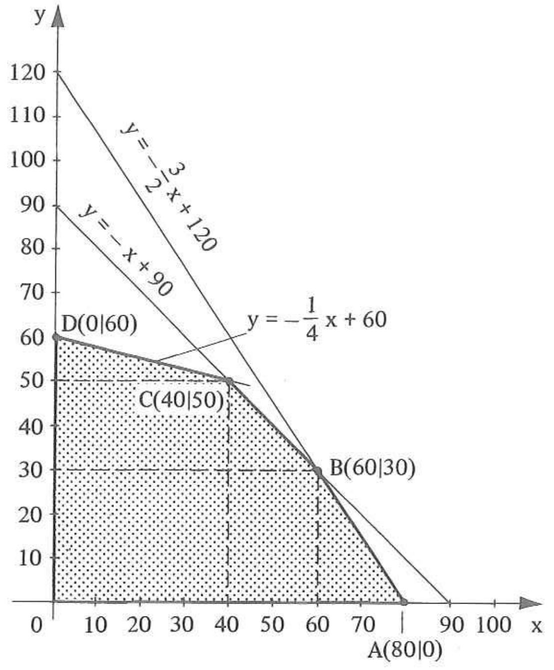
Die Lösungsmenge ist das Innere und der Rand des Fünfecks OABCD.
A(4|0); B(4|2);
C(3|3); D(0|4).

5. a)



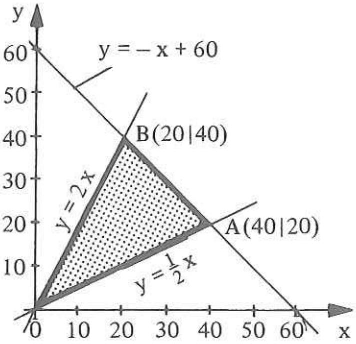
Die Lösungsmenge ist das Innere und der Rand des Vierecks OABC.
A(60|0); B(40|30);
C(0|60)

b)



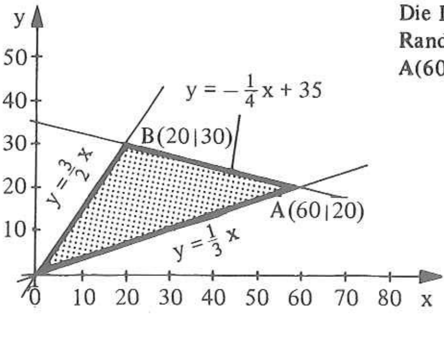
Die Lösungsmenge ist das Innere und der Rand des Fünfecks OABCD.
A(80|0); B(60|30);
C(40|50); D(0|60)

6. a)



Die Lösungsmenge ist das Innere und der Rand des Dreiecks OAB.
A(40|20); B(20|40).

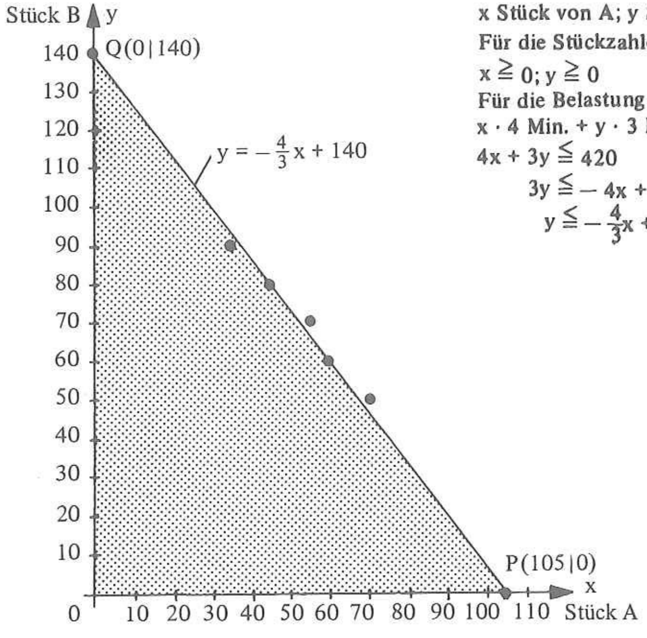
b)



Die Lösungsmenge ist das Innere und der Rand des Dreiecks OAB.
A(60|20); B(20|30).

8.6.3 Textaufgaben zu linearen Ungleichungssystemen mit zwei Variablen

1. a)



x Stück von A; y Stück von B
Für die Stückzahlen gilt:
$x \geqq 0; y \geqq 0$
Für die Belastung des Automaten gilt:
$x \cdot 4 \text{ Min.} + y \cdot 3 \text{ Min.} \leqq 420 \text{ Min.}$
$4x + 3y \leqq 420$
$3y \leqq -4x + 420$
$y \leqq -\frac{4}{3}x + 140$

Ungleichungssystem:

$x \geqq 0 \wedge y \geqq 0 \wedge y \leqq -\frac{4}{3}x + 140$

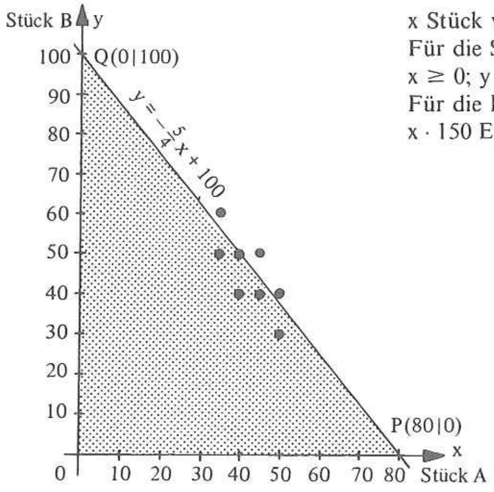
Zur Lösungsmenge des Systems gehören alle Zahlenpaare (x; y) mit ganzen Koordinaten, deren Bildpunkte im Innern und auf dem Rand des Lösungsdreiecks OPQ liegen. P(105 | 0), Q(0 | 140).

b) Zur Lösungsmenge gehören (35; 90), (45; 80), (60; 60).
Zur Lösungsmenge gehören nicht (55; 70), (70; 50).

c) Produktionsplan:

Stück von A	x	0	15	30	45	60	75	90	105
Stück von B	y	140	120	100	80	60	40	20	0
Min. für A	4	0	60	120	180	240	300	360	420
Min. für B	3	420	360	300	240	180	120	60	0
Min. insgesamt		420	420	420	420	420	420	420	420

2. a)



x Stück von A; y Stück von B.
Für die Stückzahlen gilt:
$x \geq 0$; $y \geq 0$
Für die Einkaufssumme gilt:

$$x \cdot 150 \text{ EUR} + y \cdot 120 \text{ EUR} \leq 12000 \text{ EUR}$$
$$150x + 120y \leq 12000$$
$$120y \leq -150x + 12000$$
$$y \leq -\frac{5}{4}x + 100$$

Ungleichungssystem:

$$x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \wedge y \leqslant -\frac{5}{4}x + 100$$

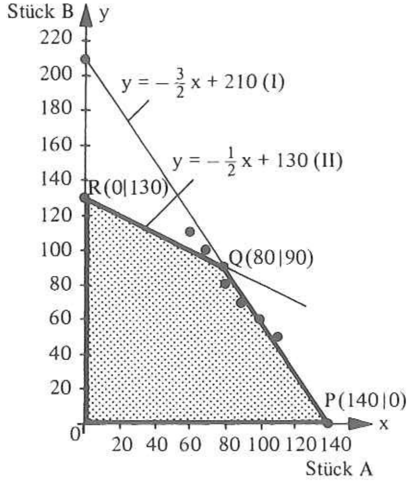
Zur Lösungsmenge des Systems gehören alle Zahlenpaare (x; y), deren Bildpunkte im Innern und auf dem Rand des Lösungsdreiecks OPQ liegen. P(80 | 0), Q(0 | 100).

b) Zur Lösungsmenge gehören (35 | 50), (40 | 40), (40 | 50), (45 | 40), (50 | 30).
Zur Lösungsmenge gehören nicht (35 | 60), (45 | 50), (50 | 40).

c)

Stück von A	x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Stück von B	y	100	85	75	60	50	35	25	10	0

3. a)



x Stück von A; y Stück von B.
Für die Stückzahlen gilt:

$x \geqq 0; y \geqq 0.$

Für die Belastung der Automaten gilt:

$$x \cdot 3 \text{ Min.} + y \cdot 2 \text{ Min.} \leqq 420 \text{ Min.}$$
$$3x + 2y \leqq 420$$
$$y \leqq -\frac{3}{2}x + 210$$

$$x \cdot 1{,}5 \text{ Min.} + y \cdot 3 \text{ Min.} \leqq 390 \text{ Min.}$$
$$1{,}5x + 3y \leqq 390$$
$$y \leqq -\frac{1}{2}x + 130$$

Ungleichungssystem:

$$x \geqq 0 \wedge y \geqq 0 \wedge y \leqq -\frac{3}{2}x + 210 \wedge y \leqq -\frac{1}{2}x + 130$$

Lösungsviereck OPQR mit P(140|0), Q(80|90), R(0|130).

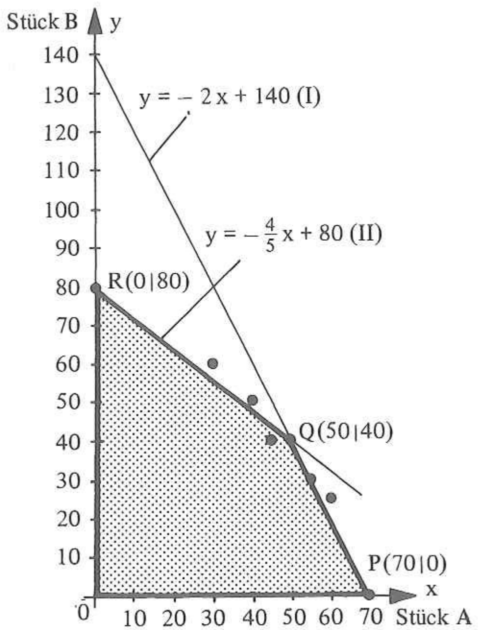
b) Zur Lösungsmenge gehören (80; 80), (90; 70), (100; 60).
Zur Lösungsmenge gehören nicht (60; 110), (70; 100), (110; 50).

c) Produktionsplan:

Stück von A	x	0	20	40	60	80	100	120	140
Stück von B	y	130	120	110	100	90	60	30	0
Min. A: Aut. I	3	0	60	120	180	240	300	360	420
Aut. II	1,5	0	30	60	90	120	150	180	210
Min. B: Aut. I	2	260	240	220	200	180	120	60	0
Aut. II	3	390	360	330	300	270	180	90	0
Min. Gesamtzeit: Aut.	I	260	300	340	380	420	420	420	420
Aut.	II	390	390	390	390	390	330	270	210

d) Volle Ausnutzung beider Automaten bei (80; 90). Automat I ist am schlechtesten ausgenutzt mit 260 Minuten bei (0; 130), Automat II mit 210 Minuten bei (140; 0)

4. a)



x Stück von A; y Stück von B.
Für die Stückzahlen gilt:

$x \geqq 0; y \geqq 0.$

Für die tägliche Belastung der Automaten gilt:

$x \cdot 6 \text{ Min.} + y \cdot 3 \text{ Min.} \leqq 420 \text{ Min.}$
$6x + 3y \leqq 420$
$y \leqq -2x + 140$
$x \cdot 4 \text{ Min.} + y \cdot 5 \text{ Min.} \leqq 400 \text{ Min.}$
$4x + 5y \leqq 400$
$y \leqq -\frac{4}{5}x + 80$

Ungleichungssystem:

$x \geqq 0 \land y \geqq 0 \land y \leqq -2x + 140$

$\land\, y \leqq -\frac{4}{5}x + 80$

Lösungsviereck: OPQR mit P(70|0), Q(50|40), R(0|80).

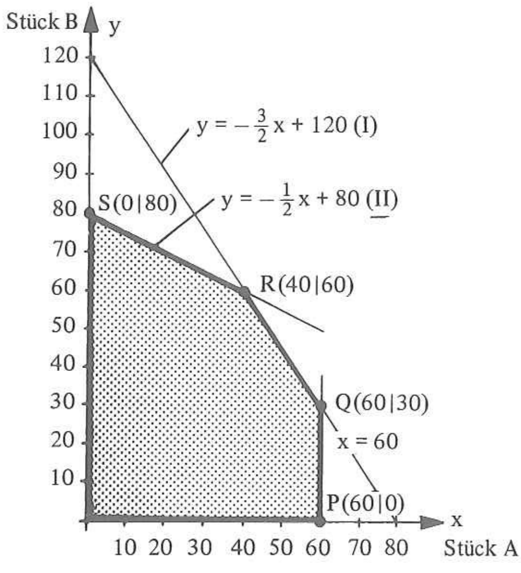
b) Zur Lösungsmenge gehören (45; 40), (55; 30).
Zur Lösungsmenge gehören nicht (30; 60), (40; 50) (60; 25).

c) Produktionsplanung:

Stück von A	x	0	10	20	30	40	50	60	70
Stück von B	y	80	72	64	56	48	40	20	0
Min. A: Aut. I	6	0	60	120	180	240	300	360	420
Aut. II	4	0	40	80	120	160	200	240	280
Min. B: Aut. I	3	240	216	192	168	144	120	60	0
Aut. II	5	400	360	320	280	240	200	100	0
Min. Gesamtzeit: Aut. I		240	276	312	348	384	420	420	420
Aut. II		400	400	400	400	400	400	340	280

d) Volle Ausnutzung beider Automaten bei (50; 40). Automat I ist am schlechtesten ausgenutzt mit 240 Minuten bei (0; 80), Automat II mit 280 Minuten bei (70; 0).

5. a)



x Stück von A; y Stück von B.
Für die Stückzahlen gilt:

$x \geqq 0; y \geqq 0.$

Für die tägliche Belastung der Automaten gilt:

$$6x + 4y \leqq 480$$
$$y \leqq -\frac{3}{2}x + 120 \text{ (I)}$$
$$3x + 6y \leqq 480$$
$$y \leqq -\frac{1}{2}x + 80 \text{ (II)}$$
$$5x \leqq 300$$
$$x \leqq 60 \text{ (III)}$$

Ungleichungssystem:

$$x \geqq 0 \wedge y \geqq 0 \wedge y \leqq -\frac{3}{2}x + 120 \wedge y \leqq -\frac{1}{2}x + 80 \wedge x \leqq 60$$

Lösungsfünfeck OPQRS mit P(60|0), Q(60|30), R(40|60), S(0|80).

b) Automat I und II sind voll ausgenutzt bei (40; 60).
Automat I und III sind voll ausgenutzt bei (60; 30).

c) **Produktionsplan:**

Stück von A	x	0	10	20	30	40	50	60
Stück von B	y	80	75	70	65	60	45	30
Min. A: Aut. I	6	0	60	120	180	240	300	360
Aut. II	3	0	30	60	90	120	150	180
Aut. III	5	0	50	100	150	200	250	300
Min. B: Aut. I	4	320	300	280	260	240	180	120
Aut. II	6	480	450	420	390	360	270	180
Min. Gesamtzeit: Aut. I		320	360	400	440	480	480	480
Aut. II		480	480	480	480	480	420	360
Aut. III		0	50	100	150	200	250	300

6. a)

x Stück von A; y Stück von B

$x \geq 0$; $y \geq 0$:

$x \geq y \quad \Leftrightarrow y \leq x$

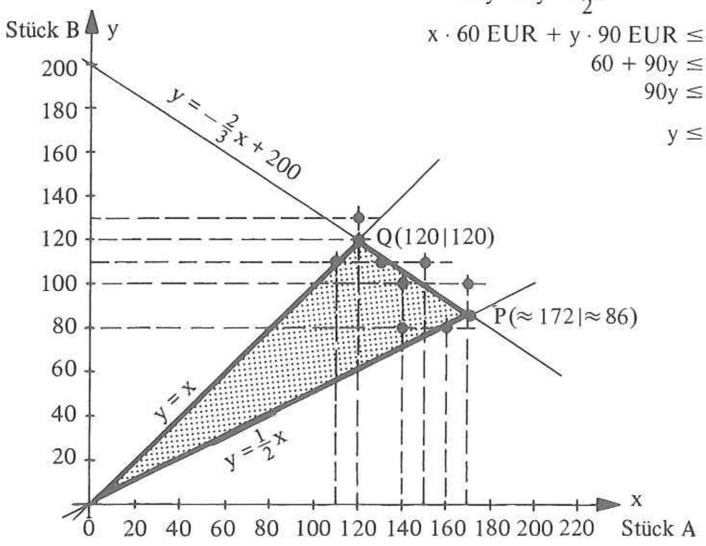
$x \leq 2y \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2}x$

$x \cdot 60\text{ EUR} + y \cdot 90\text{ EUR} \leq 18\,000\text{ EUR}$

$60 + 90y \leq 18\,000$

$90y \leq -60x + 18\,000$

$y \leq -\frac{2}{3}x + 200$



Ungleichungssystem:

$x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \wedge y \leqslant x \wedge y \geqslant \frac{1}{2}x \wedge y \leqslant -\frac{2}{3}x + 200$

Zur Lösungsmenge des Systems gehören alle Zahlenpaare, deren Bildpunkte im Innern und auf dem Rand des Dreiecks OPQ liegen. P(≈ 172|≈ 86), Q(120|120).

b) Zur Lösungsmenge gehören (110|110), (140|100), (160|80).
Zur Lösungsmenge gehören nicht (120|130), (150|110), (170|100).

c)

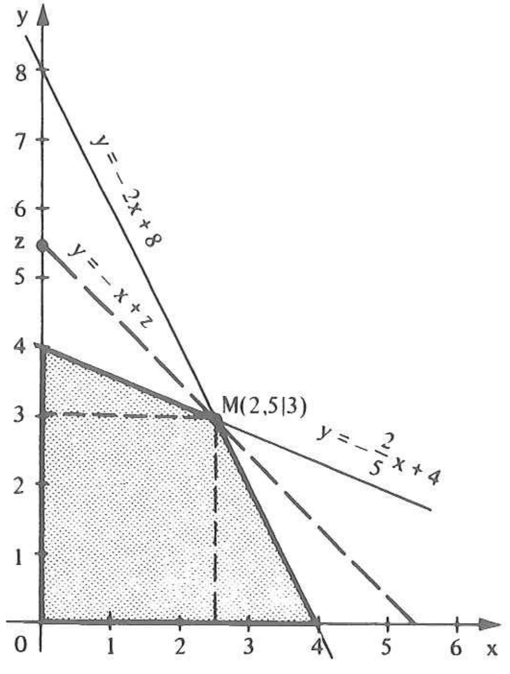
x Stück von A	x	100	120	150	160
y Stück von B	y	100	120	100	90
EUR von A	60	6000	7200	9000	9600
EUR von B	90	9000	10800	9000	8100
EUR Gesamtsumme		15000	18000	18000	17700

8.6.4 Lineare Optimierung mit zwei Variablen

Die lineare Optimierung ist ein verhältnismäßig junger Zweig der modernen Mathematik. Sie wurde im Jahre 1939 von dem russischen Mathematiker L. W. Kantorowitsch begründet. Eine allgemeine Lösungsmethode, die Simplexmethode, entwickelte der Amerikaner G. B. Dantzig im Jahre 1947.

Die in der Praxis vorkommenden Optimierungsprobleme enthalten meist zahlreiche Variablen. Die Lösung solcher Probleme erfordert einen großen Rechenaufwand, der im Allgemeinen nur mit elektronischen Rechenanlagen zu bewältigen ist. Bereits im Jahre 1956 wurden mithilfe einer Großrechenanlage Probleme mit mehr als 200 Gleichungen und 1000 Variablen mit großer Genauigkeit berechnet.

1. a)



$z = x + y \Leftrightarrow y = -x + z$

$2x + 5y \leq 20 \Leftrightarrow y \leq -\frac{2}{5}x + 4$

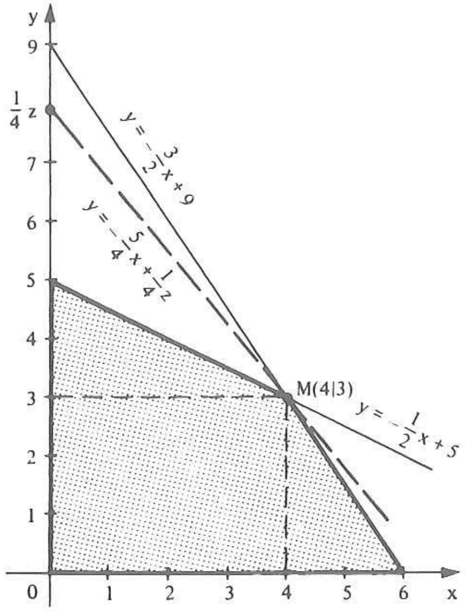
$2x + y \leq 8 \Leftrightarrow y \leq -2x + 8$

Das Maximum liegt im Punkt M(2,5|3).

$x = 2,5;\quad y = 3$

$z_{max} = 2,5 + 3 = 5,5$

b)



$z = 5x + 4y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}z$

$3x + 2y \leqslant 18 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{3}{2}x + 9$

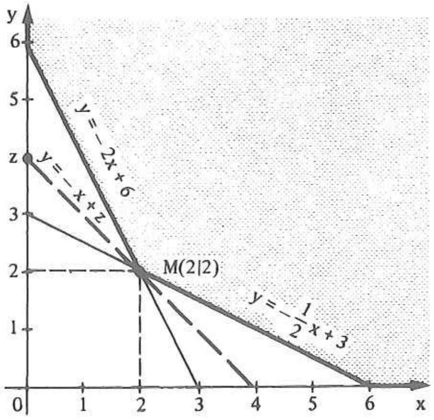
$x + 2y \leqslant 10 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{1}{2}x + 5$

Das Maximum liegt im Punkt M(4|3).

$x = 4; \quad y = 3$

$z_{max} = 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 32$

c)



$z = x + y \Leftrightarrow y = -x + z$

$2x + y \geqslant 6 \Leftrightarrow y \geqslant -2x + 6$

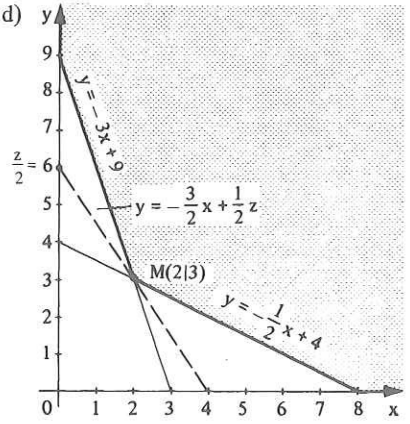
$x + 2y \geqslant 6 \Leftrightarrow y \geqslant -\frac{1}{2}x + 3$

Das Minimum liegt im Punkt M(2|2).

$x = 2; \; y = 2$

$z_{min} = 2 + 2 = 4$

d)



$z = 3x + 2y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z$

$3x + y \geqslant 9 \Leftrightarrow y \geqslant -3x + 9$

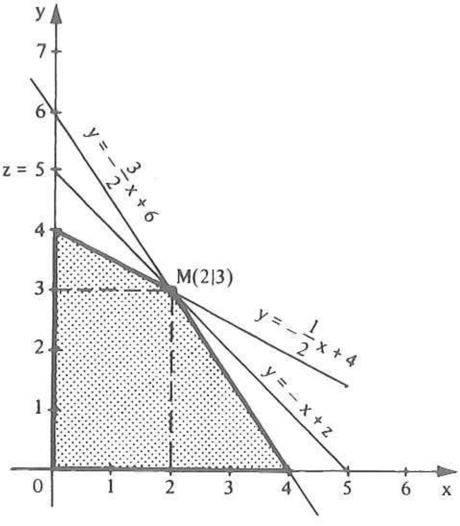
$x + 2y \geqslant 8 \Leftrightarrow y \geqslant -\frac{1}{2}x + 4$

Das Minimum liegt im Punkt M(2|3).

$x = 2; \; y = 3$

$z_{min} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$

e)



$z = x + y \Leftrightarrow y = -x + z$

$3x + 2y \leqslant 12 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{3}{2}x + 6$

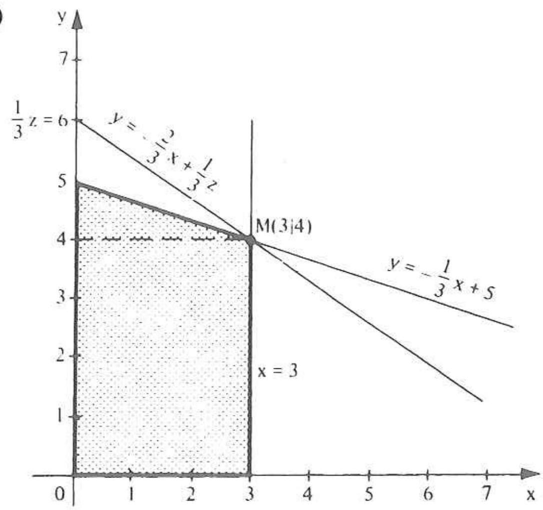
$x + 2y \leqslant 8 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{1}{2}x + 4$

Das Maximum liegt im Punkt M(2|3).

$x = 2$; $y = 3$

$z_{max} = 2 + 3 = 5$

f)



$z = 2x + 3y \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z$

$x + 3y \leqslant 15 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{1}{3}x + 5$

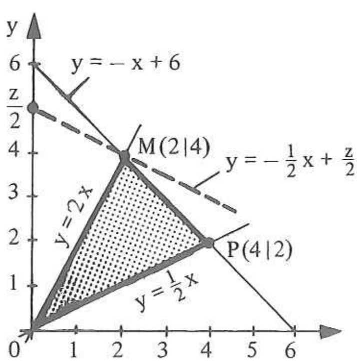
$x - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 3$

Das Maximum liegt im Punkt M(3|4).

$x = 3$; $y = 4$.

$z_{max} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$

2. a)



(1) $z = x + 2y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$

(2) $x + y \leqslant 6 \Leftrightarrow y \leqslant -x + 6$

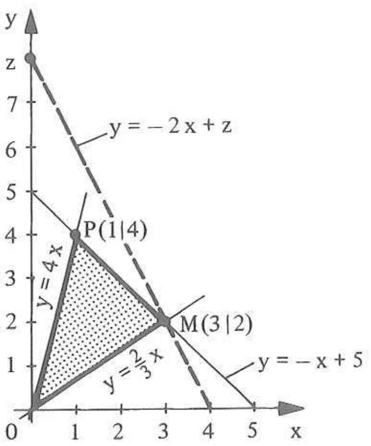
$y \leqslant 2x$

$y \geqslant \frac{1}{2}x$

Das Maximum liegt im Punkt M(2|4).

$x = 2$; $y = 4$; $z_{max} = 2 + 2 \cdot 4 = 10$

b)



(1) $z = 2x + y \Leftrightarrow y = -2x + z$

(2) $x + y \leqslant 5 \Leftrightarrow y \leqslant -x + 5$

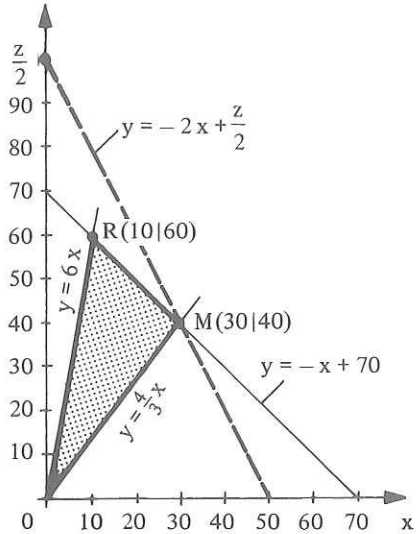
$x \geqslant \frac{1}{4}y \Leftrightarrow y \leqslant 4x$

$x \leqslant \frac{3}{2}y \Leftrightarrow y \geqslant \frac{2}{3}x$

Das Maximum liegt im Punkt M(3|2).

$x = 3;\ y = 2;\ z_{max} = 2 \cdot 3 + 2 = 8$

c)



(1) $z = 4x + 2y \Leftrightarrow y = -2x + \frac{z}{2}$

(2) $x + y \leqslant 70 \Leftrightarrow y \leqslant -x + 70$

$y \geqslant \frac{4}{3}x$

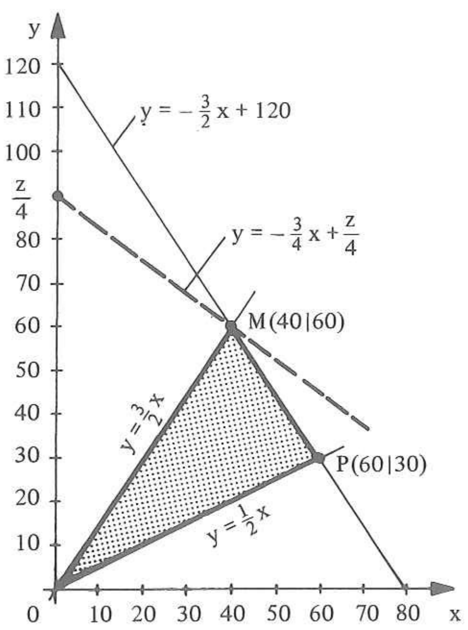
$y \leqslant 6x$

Das Maximum liegt im Punkt M(30|40).

$x = 30;\ y = 40$

$z_{max} = 4 \cdot 30 + 2 \cdot 40 = 200$

d)



(1) $z = 3x + 4y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{z}{4}$

(2) $3x + 2y \leqslant 240 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{3}{2}x + 120$

$x \geqslant \frac{2}{3}y \Leftrightarrow y < \frac{3}{2}x$

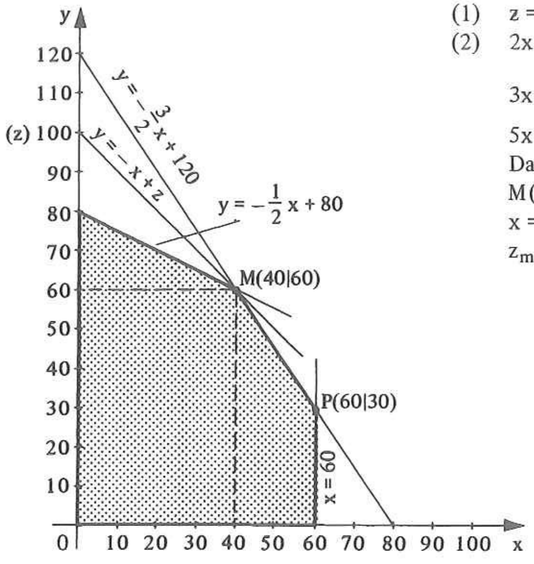
$x \leqslant 2y \Leftrightarrow y \geqslant \frac{1}{2}x$

Das Maximum liegt im Punkt M(40|60).

$x = 40;\ y = 60$

$z_{max} = 3 \cdot 40 + 4 \cdot 60 = 360$

3. a)



(1) $z = x + y \Leftrightarrow y = -x + z$

(2) $2x + 4y \leqslant 320 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{1}{2}x + 80$

$3x + 2y \leqslant 240 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{3}{2}x + 120$

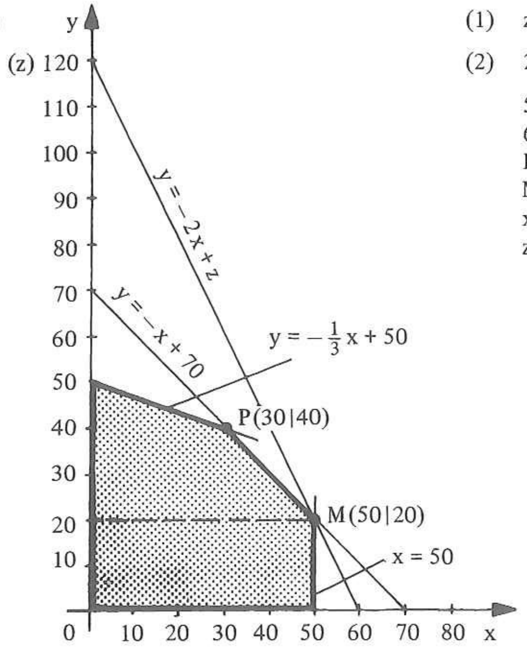
$5x \leqslant 300 \Leftrightarrow x \leqslant 60$

Das Maximum liegt im Punkt M(40|60).

$x = 40;\ y = 60$

$z_{max} = 40 + 60 = 100$

b)



(1) $z = 2x + y \Leftrightarrow y = -2x + z$

(2) $2x + 6y \leqslant 300 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{1}{3}x + 50$

$5x + 5y \leqslant 350 \Leftrightarrow y \leqslant -x + 70$

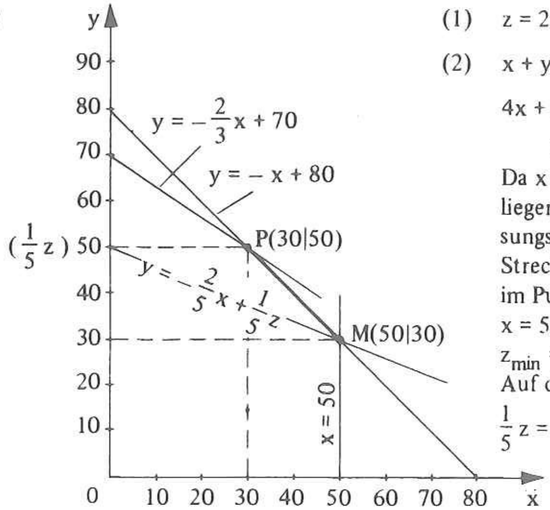
$6x \leqslant 300 \Leftrightarrow x \leqslant 50$

Das Maximum liegt im Punkt M(50|20).

$x = 50;\ y = 20$

$z_{max} = 2 \cdot 50 + 20 = 120$

c)



(1) $z = 2x + 5y \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}z$

(2) $x + y = 80 \Leftrightarrow y = -x + 80$

$4x + 6y \leqslant 420 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{2}{3}x + 70$

$7x \leqslant 350 \Leftrightarrow x \leqslant 50$

Da $x + y = 80$ eine Gleichung ist, liegen die Bildpunkte der Lösungsmenge des Systems auf der Strecke $\overline{PM}$. Das Minimum liegt im Punkt M(50|30).

$x = 50$; $y = 30$.

$z_{min} = 2 \cdot 50 + 5 \cdot 30 = 250$

Auf der y-Achse:

$\frac{1}{5}z = 50 \Leftrightarrow z = 250$

d)

(1) $z = x + 2y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$

(2) $x + y = 100 \Leftrightarrow y = -x + 100$

$x + 3y \leqslant 240 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{1}{3}x + 80$

$4x \leqslant 320 \Leftrightarrow x \leqslant 80$

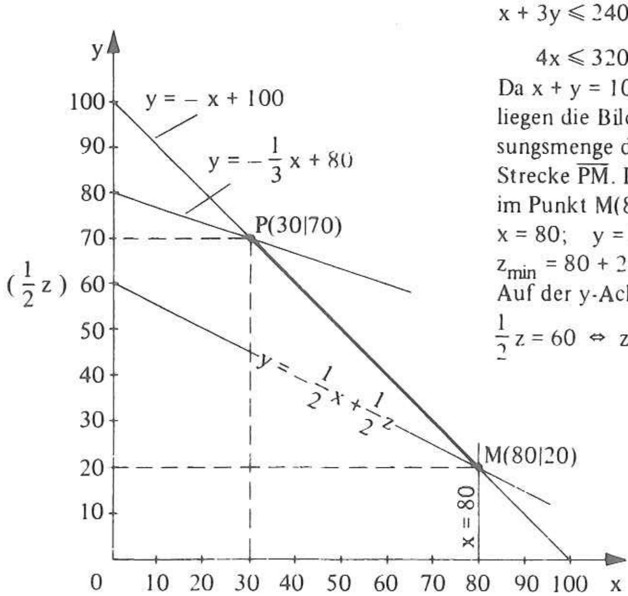
Da $x + y = 100$ eine Gleichung ist, liegen die Bildpunkte der Lösungsmenge des Systems auf der Strecke $\overline{PM}$. Das Minimum liegt im Punkt M(80|20).

$x = 80$; $y = 20$.

$z_{min} = 80 + 2 \cdot 20 = 120$

Auf der y-Achse:

$\frac{1}{2}z = 60 \Leftrightarrow z = 120$



4. x Stück von A, y Stück von B, z EUR Gesamtgewinn.

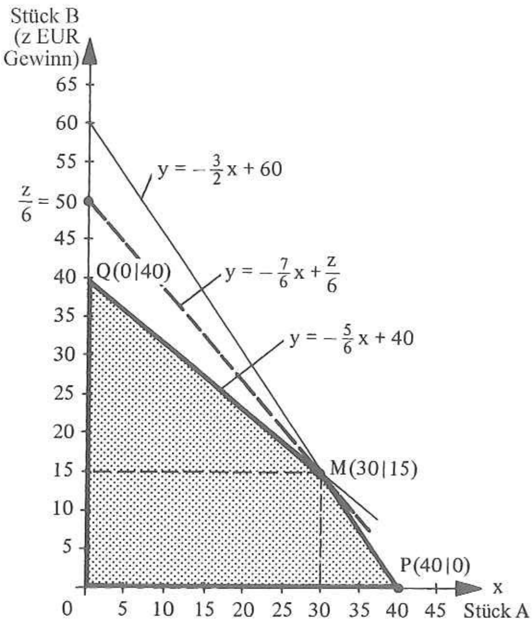
   (1) Zielfunktion: $z = 7x + 6y \Leftrightarrow y = -\frac{7}{6}x + \frac{z}{6}$

   (2) Nebenbedingungen:
   Stückzahlen: $x \geq 0,\ y \geq 0$

   Ausnutzung W I: $24x + 16y \leq 960 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 60$

   Ausnutzung W II: $15x + 18y \leq 720 \Leftrightarrow y \leq -\frac{5}{6}x + 40$

Lösungsviereck OPMQ mit P(40|0), M(30|15), Q(0|40).
Gewinnmaximum M(30|15). 30 Stück von A, 15 Stück von B.



Arbeitszeiten für M(30|15):

W I: 30 Stück je 24 Min. + 15 Stück je 16 Min. = 960 Min.

W II: 30 Stück je 15 Min. + 15 Stück je 18 Min. = 720 Min.

Gewinn für M(30|15):

30 Stück je 7,00 EUR = 210,00 EUR
15 Stück je 6,00 EUR = 90,00 EUR
300,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{z}{6} = 50 \Leftrightarrow z = 300$

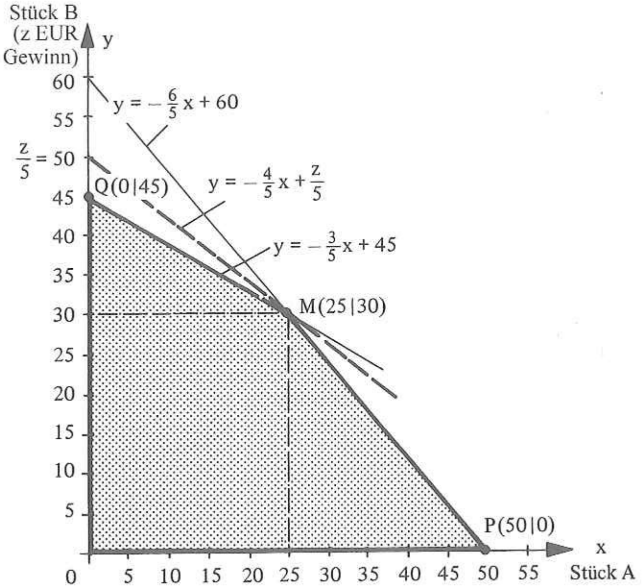
5. x Stück von A, y Stück von B, z EUR Gesamtgewinn.

   (1) Zielfunktion: $z = 4x + 5y \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{z}{5}$

   (2) Nebenbedingungen
   Stückzahlen: $x \geq 0,\ y \geq 0$

   Ausnutzung W I: $12x + 10y \leq 600 \Leftrightarrow y \leq -\frac{6}{5}x + 60$

   Ausnutzung W II: $9x + 15y \leq 675 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{5}x + 45$



Lösungsviereck OPMQ mit P(50|0), M(25|30), Q(0|45).
Gewinnmaximum M(25|30). 25 Stück von A, 30 Stück von B.

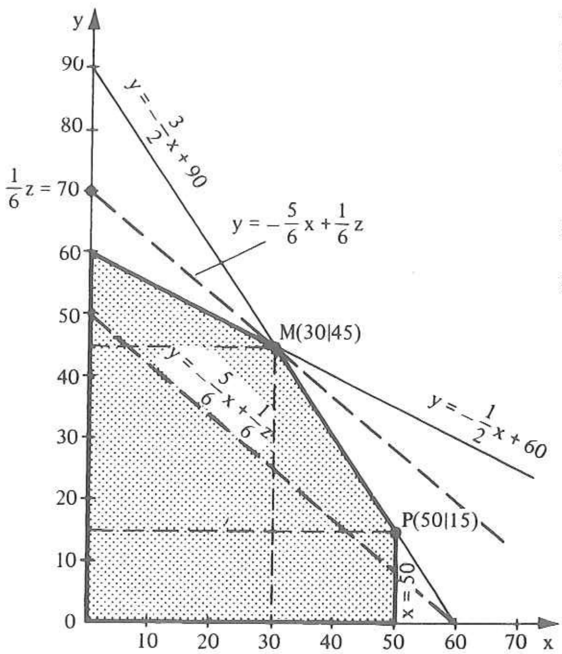
Arbeitszeiten für M(25|30):

W I:	25 Stück je 12 Min. + 30 Stück je 10 Min. = 600 Min.
W II:	25 Stück je 9 Min. + 30 Stück je 15 Min. = 675 Min.
Gewinn für M(25|30):	25 Stück je 4,00 EUR = 100,00 EUR
	30 Stück je 5,00 EUR = 150,00 EUR
	250,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{z}{5} = 50 \Leftrightarrow z = 250$

6.

	A		B		Verfügbare Zeit
	je Stück		je Stück		
I	3 Min.	x Stück	6 Min.	y Stück	360 Min.
II	6 Min.	x Stück	4 Min.	y Stück	360 Min.
III	6 Min.	x Stück	–		300 Min.
	5,00 EUR	x Stück	6,00 EUR	y Stück	



x Stück von A; y Stück von B;
z EUR Gesamtgewinn

(1) Zielfunktion:

$$z = 5x + 6y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{6}z$$

(2) Nebenbedingungen:

$x \geq 0$; $y \geq 0$;

$$3x + 6y \leq 360 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + 60$$

$$6x + 4y \leq 360 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 90$$

$$6x \leq 300 \Leftrightarrow x \leq 50$$

Den größtmöglichen Wert nimmt z auf der Parallelen an, die durch den Punkt M(30|45) verläuft. Der größtmögliche Gewinn entsteht bei einer Produktion von 30 Stück des Produktes A und von 45 Stück des Produktes B.

$z = 30 \cdot 5 + 45 \cdot 6 = 420$

Gewinnmaximum 420,00 EUR

Produktionsplan:

	A	B	insgesamt
I	30 Stück in 90 Min.	45 Stück in 270 Min.	360 Min.
II	30 Stück in 180 Min.	45 Stück in 180 Min.	360 Min.
III	30 Stück in 180 Min.	–	180 Min.

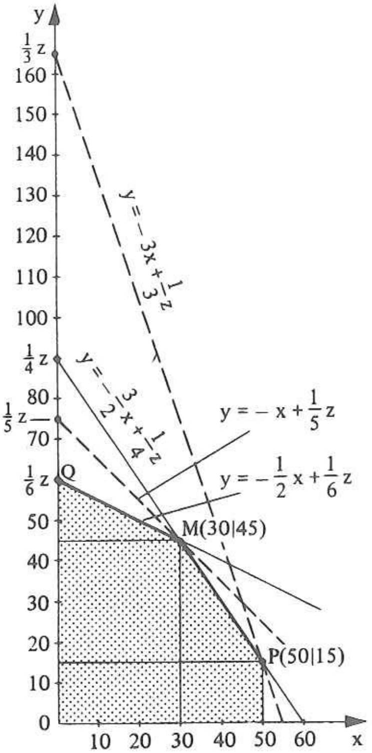
Der Automat III wird nicht voll ausgenutzt.

Im Punkt P(50|15) entsteht ein geringerer Gewinn, obwohl die Automaten II und III voll ausgenutzt werden:

	A	B	insgesamt
I	50 Stück in 150 Min.	15 Stück in 90 Min.	240 Min.
II	50 Stück in 300 Min.	15 Stück in 60 Min.	360 Min.
III	50 Stück in 300 Min.		300 Min.

$z = 50 \cdot 5 + 15 \cdot 6 = 340$

7.



a) $z = 5x + 5y \Leftrightarrow y = -x + \frac{1}{5}z$

Gewinnmaximum M(30|45)

A: 30 Stück je 5,00 EUR = 150,00 EUR
B: 45 Stück je 5,00 EUR = 225,00 EUR
375,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{5}z = 75 \Leftrightarrow z = 375$

b) $z = 3x + 6y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}z$

Lösungsmenge des Optimums sind alle Zahlenpaare, deren Bildpunkte auf der Strecke $\overline{QM}$ liegen.

Einige Möglichkeiten:

A: 0 Stück
B: 60 Stück je 6,00 EUR = 360,00 EUR

A: 20 Stück je 3,00 EUR = 60,00 EUR
B: 50 Stück je 6,00 EUR = 300,00 EUR
360,00 EUR

A: 30 Stück je 3,00 EUR = 90,00 EUR
B: 45 Stück je 6,00 EUR = 270,00 EUR
360,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{6}z = 60 \Leftrightarrow z = 360$

c) $z = 6x + 4y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}z$

Lösungsmenge des Optimums sind alle Zahlenpaare, deren Bildpunkte auf der Strecke $\overline{MP}$ liegen.

Einige Möglichkeiten:
A: 30 Stück je 6,00 EUR = 180,00 EUR
B: 45 Stück je 4,00 EUR = 180,00 EUR
360,00 EUR
A: 40 Stück je 6,00 EUR = 240,00 EUR
B: 30 Stück je 4,00 EUR = 120,00 EUR
360,00 EUR
A: 50 Stück je 6,00 EUR = 300,00 EUR
B: 15 Stück je 4,00 EUR = 60,00 EUR
360,00 EUR

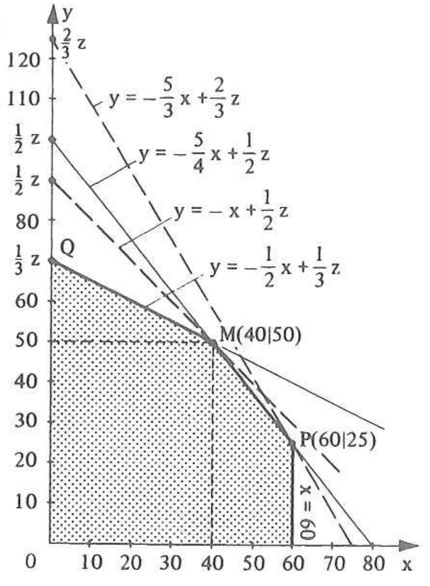
Auf der y-Achse: $\frac{1}{4}z = 90 \Leftrightarrow z = 360$

d) $z = 9x + 3y \Leftrightarrow y = -3x + \frac{1}{3}z$

Gewinnmaximum P(50|15)
A: 50 Stück je 9,00 EUR = 450,00 EUR
B: 15 Stück je 3,00 EUR = 45,00 EUR
495,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{3}z = 165 \Leftrightarrow z = 495$

8.



a) $z = 2x + 2y \Leftrightarrow y = -x + \frac{1}{2}z$

Gewinnmaximum M(40|50)
A: 40 Stück je 2,00 EUR = 80,00 EUR
B: 50 Stück je 2,00 EUR = 100,00 EUR
180,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{2}z = 90 \Leftrightarrow z = 180$

b) $z = 1{,}5x + 3y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}z$

Lösungsmenge des Optimums sind alle Zahlenpaare, deren Bildpunkte auf der Strecke $\overline{QM}$ liegen.
Einige Möglichkeiten:
A: 0 Stück
B: 70 Stück je 3,00 EUR = 210,00 EUR
A: 20 Stück je 1,50 EUR = 30,00 EUR
B: 60 Stück je 3,00 EUR = 180,00 EUR
210,00 EUR
A: 40 Stück je 1,50 EUR = 60,00 EUR
B: 50 Stück je 3,00 EUR = 150,00 EUR
210,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{3}z = 70 \Leftrightarrow z = 210$

c) $z = 2{,}5x + 2y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}z$

Lösungsmenge des Optimums sind alle Zahlenpaare, deren Bildpunkte auf der Strecke $\overline{MP}$ liegen.

Einige Möglichkeiten:
A: 40 Stück je 2,50 EUR = 100,00 EUR
B: 50 Stück je 2,00 EUR = 100,00 EUR
200,00 EUR
A: 60 Stück je 2,50 EUR = 150,00 EUR
B: 25 Stück je 2,00 EUR = 50,00 EUR
200,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{2}z = 100 \Leftrightarrow z = 200$

d) $z = 2{,}5x + 1{,}5y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}z$

Gewinnmaximum P(60|25)
A: 60 Stück je 2,50 EUR = 150,00 EUR
B: 25 Stück je 1,50 EUR = 37,50 EUR
187,50 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{2}{3}z = 125 \Leftrightarrow z = 187{,}5$

9.

	A		B		Vorrat
I	0,15 E	x Stück	0,2 E	y Stück	60 E
II	0,2 E	x Stück	0,1 E	y Stück	40 E
	25,00 EUR	x Stück	20,00 EUR	y Stück	

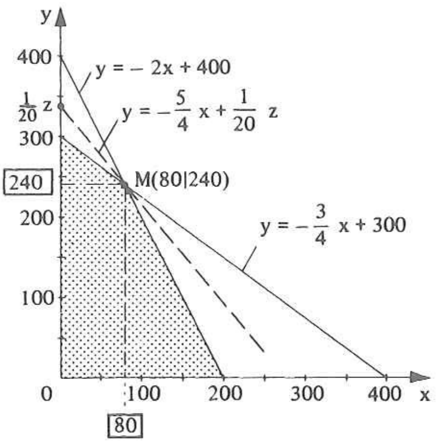
Gesamtgewinn: (25x + 20y) EUR

(1) Zielfunktion: $z = 25x + 20y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{20}z$

(2) Nebenbedingungen:
Stückzahl: $x \geq 0$; $y \geq 0$

Materialverbrauch I: $0{,}15x + 0{,}2y \leq 60 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{4}x + 300$

Materialverbrauch II: $0{,}2x + 0{,}1y \leq 40 \Leftrightarrow y \leq -2x + 400$



Gewinnmaximum M(80|240). 80 Stück von A und 240 Stück von B.

A: 80 Stück je 25,00 EUR = 2000,00 EUR
B: 240 Stück je 20,00 EUR = 4800,00 EUR
6800,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{20}z = 340 \Leftrightarrow z = 6800$

Kontrollrechnung:
Holzart I: $80 \cdot 0{,}15\text{ E} + 240 \cdot 0{,}2\text{ E} = 12\text{ E} + 48\text{ E} = 60\text{ E}$
Holzart II: $80 \cdot 0{,}2\text{ E} + 240 \cdot 0{,}1\text{ E} = 16\text{ E} + 24\text{ E} = 40\text{ E}$

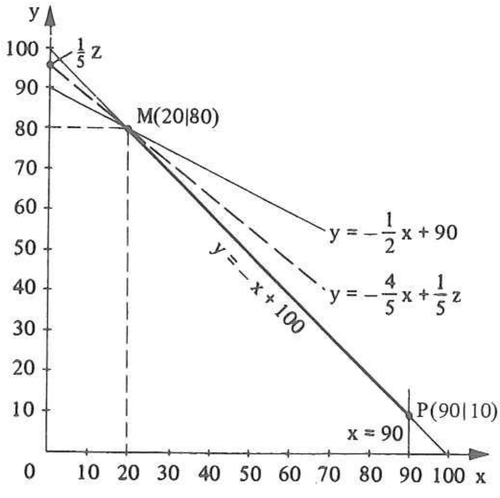
10.

	A		B		Verfügbare Zeit
I	5 Min.	x Stück	10 Min.	y Stück	900 Min.
II	8 Min.	x Stück			720 Min.
	4,00 EUR	x Stück	5,00 EUR	y Stück	insgesamt 100 Stück

x Stück nach Verfahren A, y Stück nach Verfahren B, z EUR Gesamtgewinn.

(1) Zielfunktion: $z = 4x + 5y \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}z$

(2) Nebenbedingungen:
Mindeststückzahl von A: $x \geq 0$
Mindeststückzahl von B: $y \geq 0$
Gesamtstückzahl: $x + y = 100 \Leftrightarrow y = -x + 100$ (ist eine Gleichung)
Belastung von I: $5x + 10y \leq 900 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + 90$
Belastung von II: $8x \leq 720 \Leftrightarrow x \leq 90$



Zur Lösungsmenge gehören die Bildpunkte, die auf der Strecke $\overline{MP}$ liegen. Da $x + y = 100$ eine Gleichung ist, bildet der Durchschnitt der einzelnen Lösungsmengen kein Flächenstück.

Gewinnmaximum M(20|80). 20 Stück nach Verfahren A und 80 Stück nach Verf. B.

A: 20 Stück je 4,00 EUR = 80,00 EUR
B: 80 Stück je 5,00 EUR = 400,00 EUR
480,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{5}z = 96 \Leftrightarrow z = 480$

Herstellungszeiten für (20; 80):

Automat I: $20 \cdot 5$ Min. + $80 \cdot 10$ Min. = 900 Min.
Automat II: $20 \cdot 8$ Min. = 160 Min.

Automat I ist voll ausgenutzt, Automat II nur mit 160 Minuten.

Herstellungszeiten für (90; 10)

Automat I: $90 \cdot 5$ Min. + $10 \cdot 10$ Min. = 550 Min.
Automat II: $90 \cdot 8$ Min. = 720 Min.

Automat II ist voll ausgenutzt, Automat I nur mit 550 Minuten.

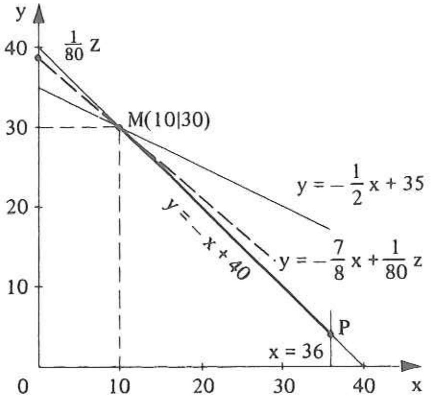
11.

	A		B		Verfügbare Zeit
I	3 Std.	x Stück	6 Std.	y Stück	210 Std.
II	5 Std.	x Stück			180 Std.
	70,00 EUR	x Stück	80,00 EUR	y Stück	insgesamt 40 Stück

x Stück nach Verfahren A, y Stück nach Verfahren B, z EUR Gesamtgewinn

(1) Zielfunktion: $z = 70x + 80y \Leftrightarrow y = -\frac{7}{8}x + \frac{1}{80}z$

(2) Nebenbedingungen:
Mindeststückzahl von A: $x \geq 0$
Mindeststückzahl von B: $y \geq 0$
Gesamtstückzahl: $x + y = 40 \Leftrightarrow y = -x + 40$ (ist eine Gleichung)
Belastung von I: $3x + 6y \leq 210 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + 35$
Belastung von II: $5x \leq 180 \Leftrightarrow x \leq 36$



Zur Lösungsmenge gehören die Bildpunkte, die auf der Strecke $\overline{MP}$ liegen. Da $x + y = 40$ eine Gleichung ist, bildet der Durchschnitt der einzelnen Lösungsmengen kein Flächenstück.
Gewinnmaximum $M(10|30)$.
10 Stück nach Verfahren A und 30 Stück nach Verfahren B.

A: 10 Stück je 70,00 EUR = 700,00 EUR
B: 30 Stück je 80,00 EUR = 2400,00 EUR

3100,00 EUR

Auf der y-Achse (nicht genau ablesbar): $\frac{1}{80}z = 38{,}75 \Leftrightarrow z = 3100$

Herstellungszeiten für (10; 30):

Maschine I: $10 \cdot 3$ Std. $+ 30 \cdot 6$ Std. $= 210$ Std.
Maschine II: $10 \cdot 5$ Std. $= 50$ Std.

Maschine I ist voll ausgenutzt, Maschine II nur mit 50 Stunden.

Herstellungszeiten für (36; 4):

Maschine I: $36 \cdot 3$ Std. $+ 4 \cdot 6$ Std. $= 132$ Std.
Maschine II: $36 \cdot 5$ Std. $= 180$ Std.

Maschine II ist voll ausgenutzt, Maschine I nur mit 132 Stunden.

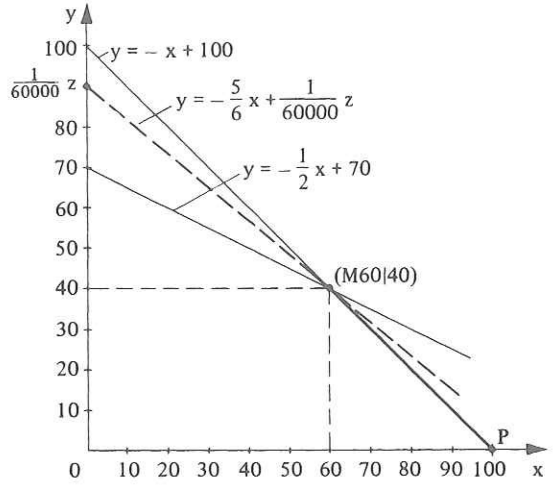
12. x Tage für A, y Tage für B, z EUR Gesamteinnahme.

A		B		
10 Stück je Tag	x Tage	20 Stück je Tag	y Tage	100 Tage Gesamtzeit
5000,00 EUR je St.		3000,00 EUR je St.		1400 St. Höchstabsatz

Gesamteinnahme: z EUR $= (10 \cdot x \cdot 5000 + 20 \cdot y \cdot 3000)$ EUR

(1) Zielfunktion: $z = 50000x + 60000y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{60000}z$

(2) Nebenbedingungen:
Arbeitstage: $x + y = 100 \Leftrightarrow y = -x + 100$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
Stückzahl: $10x + 20y \leq 1400 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + 70$



Zur Lösungsmenge gehören die Bildpunkte, die auf der Strecke $\overline{MP}$ liegen. Da $x + y = 100$ eine Gleichung ist, bildet die Punktmenge kein Flächenstück. Maximum M(60|40). 60 Tage für Modell A und 40 Tage für Modell B.

	Tage	Stück je Tag	Stück insgesamt	EUR je Stück	Gesamtwert in EUR
A	60	10	600	5000	3000000
B	40	20	800	3000	2400000
	100		1400		5400000

Auf der y-Achse: $\frac{1}{60000}z = 90 \Leftrightarrow z = 5400000$

13. x Tage für A, y Tage für B, z EUR Gesamteinnahme.

A		B		
40 Stück je Tag	x Tage	60 Stück je Tag	y Tage	20 Tage Gesamtzeit
975,00 EUR je Stück		750,00 EUR je Stück		900 St. Höchstabsatz

(1) Zielfunktion: z EUR $= (40 \cdot x \cdot 975 + 60 \cdot y \cdot 750)$ EUR

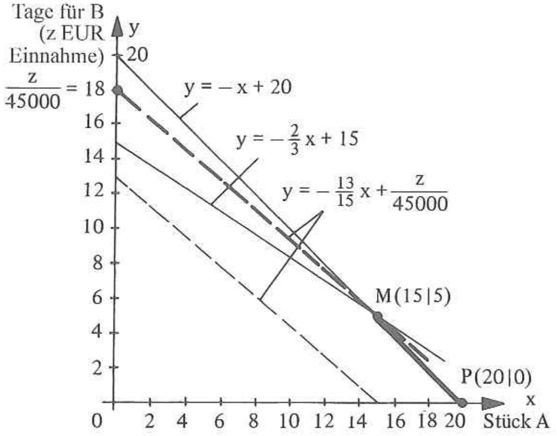
$$z = 39000x + 45000y \Leftrightarrow y = -\frac{13}{15}x + \frac{z}{45000}$$

(2) Nebenbedingungen: $x \geq 0$

$y \geq 0$

Arbeitstage: $x + y = 20 \Leftrightarrow y = -x + 20$

Stückzahlen: $40x + 60y \leq 900 \Leftrightarrow y \leq -\frac{2}{3}x + 15$



Zur Lösungsmenge gehören die Bildpunkte, die auf der Strecke $\overline{MP}$ liegen. Wegen $x + y = 20$ bildet die Lösungsmenge kein Flächenstück. Maximum M(15|15). 15 Tage für Modell A und 5 Tage für Modell B.

	Tage	Stück je Tag	Stück insgesamt	EUR je Stück	EUR Gesamteinnahme
A	15	40	600	975	585000
B	5	60	300	750	225000
	20		900		810000

Auf der y-Achse: $\frac{z}{45000} = 18 \Leftrightarrow z = 820000$

14. x Fernsehgeräte, y Videorekorder, z EUR Gesamtgewinn.

(1) Zielfunktion: $z = 80x + 40y \Leftrightarrow y = -2x + \frac{1}{40}z$

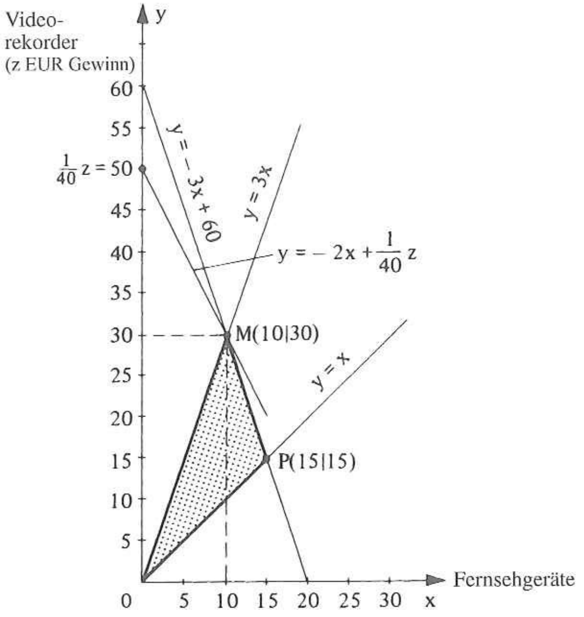
(2) Nebenbedingungen:

Stückzahlen: $x \geq 0,\ y \geq 0$

$x \geq \frac{1}{3}y \Leftrightarrow y \leq 3x$

$x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$

Einkaufspreis: $1050x + 350y \leq 21\,000 \Leftrightarrow y \leq -3x + 60$



Gewinnmaximum M(10|30). 10 Fernsehgeräte, 30 Videorekorder.

$10 \cdot 80{,}00$ EUR = 800,00 EUR
$30 \cdot 40{,}00$ EUR = 1 200,00 EUR
2 000,00 EUR

auf der y-Achse: $\frac{1}{40}z = 50 \Leftrightarrow z = 2000$

15. x Stück von A, y Stück von B, z EUR Gesamtgewinn.

(1) Zielfunktion: $z = 7{,}5x + 6y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{z}{6}$

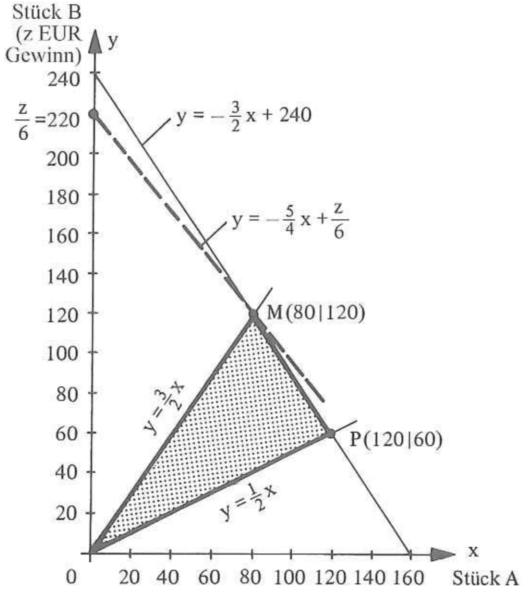
(2) Nebenbedingungen:

Einkaufssumme: $60x + 40y \leq 9\,600 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 240$

Stückzahlen: $x \geq 0,\ y \geq 0$

$$x \geq \frac{2}{3}y \Leftrightarrow y \leq \frac{3}{2}x$$

$$x \leq 2y \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2}x$$



Gewinnmaximum M(80|120). 80 Stück von A, 120 Stück von B.

Einkaufssumme:	80 Stück je 60,00 EUR =	4800,00 EUR
	120 Stück je 40,00 EUR =	4800,00 EUR
		9600,00 EUR
Gesamtgewimm:	80 Stück je 7,50 EUR =	600,00 EUR
	120 Stück je 6,00 EUR =	720,00 EUR
		1320,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{z}{6} = 220 \Leftrightarrow z = 1320$

16. x Stück nach Verfahren A, y Stück nach Verfahren B, z EUR Selbstkosten der Tagesproduktion.

	A		B		Verfügbare Zeit in Min.
	Min./Stück	Stück	Min./Stück	Stück	
I	4	x	3	y	360
II	5	x	0	0	400
III	0	0	6	y	420
	1,50 EUR je Stück	x	2,00 EUR je Stück	y	Tagesproduktion 100 Stück

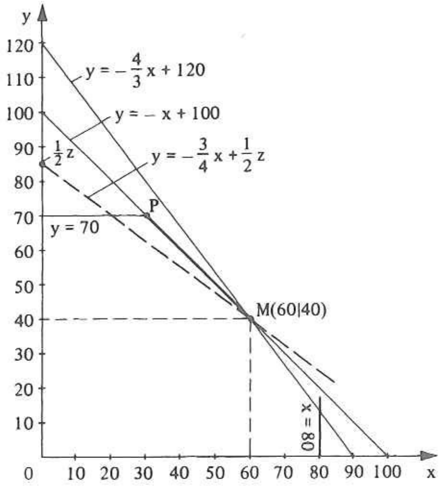
Selbstkosten der Tagesproduktion: z EUR = $(x \cdot 1{,}5 + y \cdot 2)$ EUR

(1) Zielfunktion: $z = 1{,}5x + 2y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}z$

(2) Nebenbedingungen:
Stückzahl: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y = 100 \Leftrightarrow y = -x + 100$

Belastung I: $4x + 3y \leq 360 \Leftrightarrow y \leq -\frac{4}{3}x + 120$

Belastung II: $5x \leq 400 \Leftrightarrow x \leq 80$
Belastung III: $6y \leq 420 \Leftrightarrow y \leq 70$



Da $x + y = 100$ eine Gleichung ist, bildet der Durchschnitt der einzelnen Lösungsmengen kein Flächenstück. Die Lösungsmenge des Systems sind die Bildpunkte, die auf der Strecke $\overline{PM}$ liegen.
Kostenminimum M(60|40). 60 Stück nach Verfahren A, 40 Stück nach Verfahren B.

Selbstkosten für (60; 40)

A: 60 Stück je 1,50 EUR =	90,00 EUR
B: 40 Stück je 2,00 EUR =	80,00 EUR
	170,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{2}z = 85 \Leftrightarrow z = 170$

Ausnutzungszeiten für (60; 40)

Aut. I: $60 \cdot 4$ Min. $+ 40 \cdot 3$ Min. $= 360$ Min. (volle Ausnutzung)
Aut. II: $60 \cdot 5$ Min. $= 300$ Min. (100 Min. ungenutzt)
Aut. III: $40 \cdot 6$ Min. $= 240$ Min. (180 Min. ungenutzt)

Selbstkosten für (30; 70):

A: 30 Stück je 1,50 EUR = 45,00 EUR
B: 70 Stück je 2,00 EUR = 140,00 EUR
185,00 EUR

Ausnutzungszeiten für (30; 70)

Aut. I: $30 \cdot 4$ Min. $+ 70 \cdot 3$ Min. $= 330$ Min. (30 Min. ungenutzt)
Aut. II: $30 \cdot 5$ Min. $= 150$ Min. (250 Min. ungenutzt)
Aut. III: $70 \cdot 6$ Min. $= 420$ Min. (volle Ausnutzung)

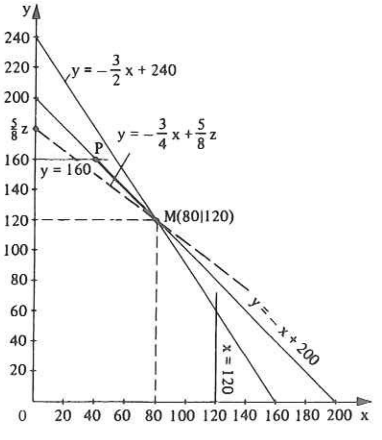
17. x Stück nach Verfahren A, y Stück nach Verfahren B, z EUR Selbstkosten.

	A		B		Verfügbare Zeit in Min.
	Min./Stück	Stück	Min./Stück	Stück	
I	3	x	2	y	480
II	0	0	3	y	480
III	3,5	x	0	0	420
	1,20 EUR je Stück	x	1,60 EUR je Stück	y	Gesamtproduktion 200 Stück

Selbstkosten der Tagesproduktion: z EUR = $(x \cdot 1{,}2 + y \cdot 1{,}6)$ EUR

(1) Zielfunktion: $z = 1{,}2x + 1{,}6y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{8}z$

(2) Nebenbedingungen:
Stückzahl: $x \geq 0;\ \ y \geq 0;\ \ x + y = 200 \Leftrightarrow y = -x + 200$
Belastung I: $3x + 2y \leq 480 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 240$
Belastung II: $3y \leq 480 \Leftrightarrow y \leq 160$
Belastung III: $3{,}5y \leq 420 \Leftrightarrow x \leq 120$



Da $x + y = 100$ eine Gleichung ist, bildet der Durchschnitt der einzelnen Lösungsmengen kein Flächenstück. Die Lösungsmenge des Systems sind die Bildpunkte, die auf der Strecke $\overline{PM}$ liegen.
Kostenminimum M(80|120). 80 Stück nach Verfahren A, 120 Stück nach Verf. B.

Selbstkosten für (80; 120)

A:	80 Stück je 1,20 EUR =	96,00 EUR
B:	120 Stück je 1,60 EUR =	192,00 EUR
		288,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{5}{8}z = 180 \Leftrightarrow z = 288$

Ausnutzungszeiten für (80; 120)

Aut. I:	$80 \cdot 3$ Min. + $120 \cdot 2$ Min.	= 480 Min. (volle Ausnutzung)
Aut. II:	$120 \cdot 3$ Min.	= 360 Min. (120 Min. ungenutzt)
Aut. III:	$80 \cdot 3{,}5$ Min.	= 280 Min. (140 Min. ungenutzt)

Selbstkosten für (40; 160):

A:	40 Stück je 1,20 EUR =	48,00 EUR
B:	160 Stück je 1,60 EUR =	256,00 EUR
		304,00 EUR

Ausnutzungszeiten für (40; 160)

Aut. I:	$40 \cdot 3$ Min. + $160 \cdot 2$ Min.	= 440 Min. (40 Min. ungenutzt)
Aut. II:	$160 \cdot 3$ Min.	= 480 Min. (volle Ausnutzung)
Aut. III:	$40 \cdot 3{,}5$ Min.	= 140 Min. (280 Min. ungenutzt)

18. x Stück Klopfsauger A, y Stück Staubsauger B, z EUR Gesamtgewinn.

Abt. I: Die Kapazität sei 1.

1 Klopfsauger ist $\frac{1}{40}$ der Kap., x Klopfsauger sind $\frac{x}{40}$ der Kap.

1 Staubsauger ist $\frac{1}{60}$ der Kap., y Staubsauger sind $\frac{y}{60}$ der Kap.

Abt. II: Die Kapazität sei 1.

1 Klopfsauger ist $\frac{1}{50}$ der Kap., x Klopfsauger sind $\frac{x}{50}$ der Kap.

1 Staubsauger ist $\frac{1}{50}$ der Kap., y Staubsauger sind $\frac{y}{50}$ der Kap.

(1) Gleichung der Zielfunktion: z EUR = $x \cdot 20$ EUR + $y \cdot 16$ EUR

$$z = 20x + 16 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{z}{16}$$

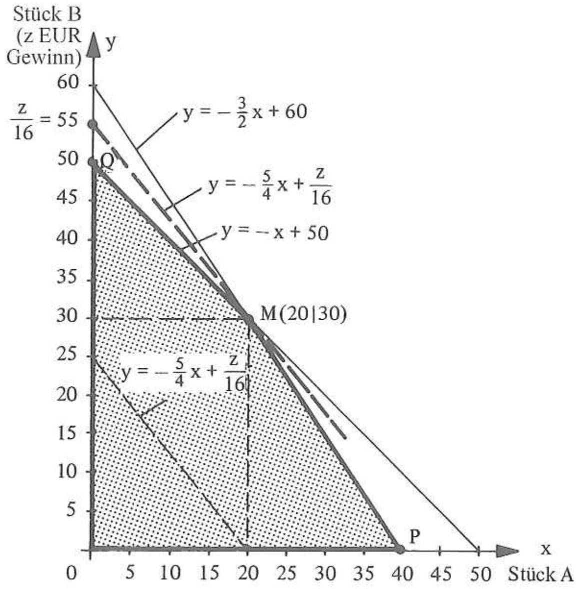
(2) Nebenbedingungen:

Stückzahlen: $x \geq 0; \quad y \geq 0$

Ausnutzung Abt. I: $\frac{x}{40} + \frac{y}{60} \leq 1 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 60$

Ausnutzung Abt. II: $\frac{x}{50} + \frac{y}{50} \leq 1$

$x + y \leq 50 \Leftrightarrow y \leq -x + 50$



Zur Lösungsmenge gehören die Bildpunkte des Planungsvierecks OPMQ mit P(40|0), M(20|30), Q(0|50).

Maximum M(20|30). 20 Stück von A, 30 Stück von B.

Gesamtgewinn:	20 Stück je 20,00 EUR =	400,00 EUR
	30 Stück je 16,00 EUR =	480,00 EUR
		880,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{z}{16} = 55 \Leftrightarrow z = 880$

Kapazitätsausnutzung für (20; 30):

Abt. I: $\frac{20}{40} + \frac{30}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$ $\quad 1 = 100\%$

Abt. II: $\frac{20}{50} + \frac{30}{50} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1;$ $\quad 1 = 100\%$

Kapazitätsausnutzung für (25; 20):

Abt. I: $\frac{25}{40} + \frac{20}{60} = \frac{5}{8} + \frac{1}{3} = \frac{15 + 8}{24} = \frac{23}{24} \approx 0{,}958;$ $\quad 0{,}958 = 95{,}8\%$

Abt. II: $\frac{25}{30} + \frac{20}{50} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10} = 0{,}9;$ $\quad 0{,}90 = 90\%$

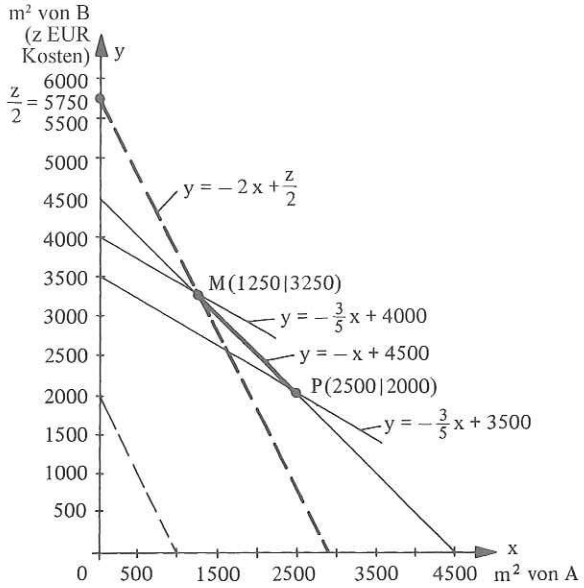
19. x m^2 von A, y m^2 von B, z EUR Gesamtpflegekosten.

(1) Zielfunktion: $z = 4x + 2y \Leftrightarrow y = -2x + \frac{z}{2}$

(2) Nebenbedingungen:
Menge der m^2: $x \geq 0,\ y \geq 0$
$x + y = 4500 \Leftrightarrow y = -x + 4500$

Anschaffungskosten: $18x + 30y \leq 120000 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{5}x + 4000$

$18x + 30y \geq 105000 \Leftrightarrow y \geq -\frac{3}{5}x + 3500$



Zur Lösungsmenge gehören die Bildpunkte, die auf der Strecke $\overline{PM}$ liegen. Da $x + y = 4500$ eine Gleichung ist, bildet der Durchschnitt der einzelnen Lösungsmengen kein Flächenstück.

Kostenminimum M(1250|3250). 1250 m^2 von A und 3250 m^2 von B.
Kontrollrechnung für die Punkte M und P:

Gesamtpflegekosten:

M(1250|3250)	1250 m^2 je 4,00 EUR =	5000,00 EUR
	3250 m^2 je 2,00 EUR =	6500,00 EUR
		11500,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{z}{2} = 5750 \Leftrightarrow z = 11500$

P(2500|2000)	2500 m^2 je 4,00 EUR =	10000,00 EUR
	2000 m^2 je 2,00 EUR =	4000,00 EUR
		14000,00 EUR

Anschaffungskosten:

M(1250|3250)	1250 m^2 je 18,00 EUR =	22500,00 EUR
	3250 m^2 je 30,00 EUR =	97500,00 EUR
		120000,00 EUR
P(2500|2000)	2500 m^2 je 18,00 EUR =	45000,00 EUR
	2000 m^2 je 30,00 EUR =	60000,00 EUR
		105000,00 EUR

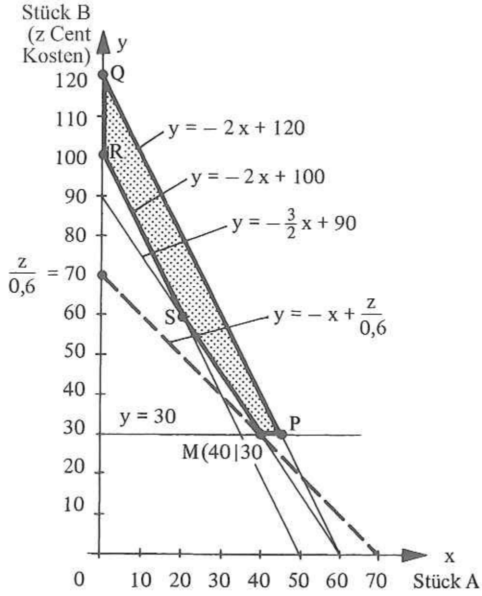
20. x Stück von A, y Stück von B, z Cent Gesamtkosten je Betriebsstunde.

(1) Zielfunktion: $z = 0{,}6x + 0{,}6y \Leftrightarrow y = -x + \frac{z}{0{,}6}$

(2) Nebenbedingungen:
Stückzahlen: $x \geq 0,\ y \geq 30$

Lichtstärke: $150x + 100y \geq 9000 \Leftrightarrow y \geq -\frac{3}{2}x + 90$

Anschaffungskosten: $40x + 20y \geq 2000 \Leftrightarrow y \geq -2x + 100$
$40x + 20y \leq 2400 \Leftrightarrow y \leq 2x + 120$



Planungsfünfeck mit den Eckpunkten M(40|30), P(45|30), Q(0|120), R(0|100), S(20|60).
Kostenminimum M(40|30). 40 Stück von A und 30 Stück von B.

Lichtstärke:	40 Stück je 150 cd =	6000 cd
	30 Stück je 100 cd =	3000 cd
		9000 cd

Anschaffungskosten:	40 Stück je 40,00 EUR = 1600,00 EUR
	30 Stück je 20,00 EUR = 600,00 EUR
	2200,00 EUR
Betriebskosten:	40 Stück je 0,6 Cent = 24 Cent
	30 Stück je 0,6 Cent = 18 Cent
	42 Cent

Auf der y-Achse: $\frac{z}{0{,}6} = 70 \Leftrightarrow z = 42$

21. Wir stellen die Angaben der Aufgabe in einer Tabelle zusammen und setzen für die Liefermengen Platzhalter ein.

I an A: x Stück
I an B: y Stück
I an C: $(25 - x - y)$ Stück
II an A: $(20 - x)$ Stück
II an B: $(30 - y)$ Stück
II an C: $[40 - (20 - x) - (30 - y)]$ Stück $= (x + y - 10)$ Stück

	A		B		C		lieferbar Stück
	EUR	Stück	EUR	Stück	EUR	Stück	
I	9,00	x	6,00	y	4,00	25 − x − y	25
II	8,00	20 − x	3,00	30 − y	5,00	x + y − 10	40
Bestellung		20		30		15	

(1) Gleichung der Zielfunktion:

z EUR Gesamttransportkosten

$z = 9x + 6y + 4(25 - x - y) + 8(20 - x) + 3(30 - y) + 5(x + y - 10)$

$z = 9x + 6y + 100 - 4x - 4y + 160 - 8x + 90 - 3y + 5x + 5y - 50$

$z = 2x + 4y + 300 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \left(\frac{z}{4} - 75\right)$

Beachte: $\left(\frac{z}{4} - 75\right)$ ist der y-Achsenabschnitt

(2) Nebenbedingungen:

$x \geq 0$ (1), $y \geq 0$ (2)

I an A: $x \leq 25$ und $x \leq 20$, zusammengefasst $x \leq 20$ (3)

I an B: $y \leq 25$ und $y \leq 30$, zusammengefasst $y \leq 25$ (4)

I an C: $25 - x - y \leq 25 \Leftrightarrow y \geq -x$ $\quad$ $25 - x - y \leq 15 \Leftrightarrow y \geq -x + 10$
$y \geq -x$ und $y \geq -x + 10$, zusammengefasst $y \geq -x + 10$ (5)

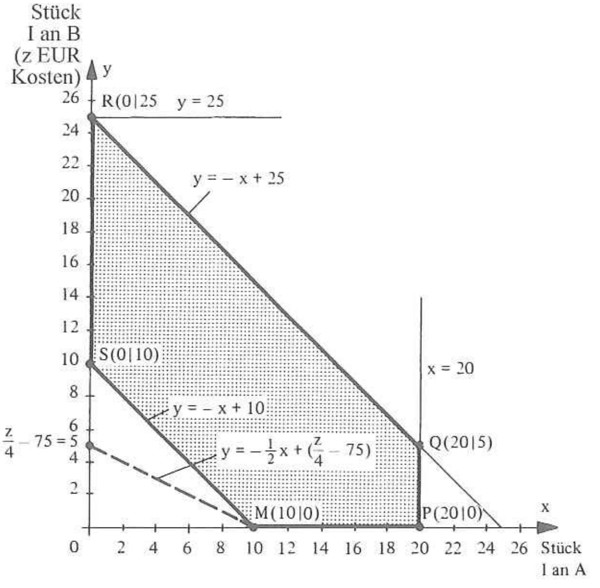
II an A: $20 - x \leq 40 \Leftrightarrow x \geq -20$ $\quad$ $20 - x \leq 20 \Leftrightarrow x \geq 0$
$x \geq -20$ und $x \geq 0$, zusammengefasst $x \geq 0$ (1)

II an B: $30 - y \leq 40 \Leftrightarrow y \geq -10$ $\quad$ $30 - y \leq 30 \Leftrightarrow y \geq 0$
$y \geq -10$ und $y \geq 0$, zusammengefasst $y \geq 0$ (2)

II an C: $x + y - 10 \leq 40 \Leftrightarrow y \leq -x + 50$ $\quad$ $x + y - 10 \leq 15 \Leftrightarrow y \leq -x + 25$
$y \leq -x + 50$ und $y \leq -x + 25$, zusammengefasst $y \leq -x + 25$ (6)

Zusammenfassung der Nebenbedingungen:

$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq 20 \wedge y \leq 25 \wedge y \geq -x + 10 \wedge y \leq -x + 25$



Planungsfünfeck mit den Eckpunkten M(10|0), P(20|0), Q(20|5), R(0|25), S(0|10).
Kostenminimum M(10|0). I liefert an A 10 Stück und an B 0 Stück.

M(10|0)

	A	B	C	
I	10	0	15	25
II	10	30	0	40
	20	30	15	

10 · 9,00 EUR + 15 · 4,00 EUR = 150,00 EUR
10 · 8,00 EUR + 30 · 3,00 EUR = 170,00 EUR
320,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{z}{4} - 75 = 5 \Leftrightarrow z = 320$

P(20|0)

	A	B	C	
I	20	0	5	25
II	0	30	10	40
	20	30	15	

20 · 9,00 EUR + 5 · 4,00 EUR = 200,00 EUR
30 · 3,00 EUR + 10 · 5,00 EUR = 140,00 EUR
340,00 EUR

Q(20|5)

	A	B	C	
I	20	5	0	25
II	0	25	15	40
	20	30	15	

20 · 9,00 EUR + 5 · 6,00 EUR = 210,00 EUR
25 · 3,00 EUR + 15 · 5,00 EUR = 150,00 EUR
360,00 EUR

R(0|25)

	A	B	C	
I	0	25	0	25
II	20	5	15	40
	20	30	15	

$25 \cdot 6{,}00$ EUR $= 150{,}00$ EUR
$20 \cdot 8{,}00$ EUR $+ 5 \cdot 3{,}00$ EUR $+ 15 \cdot 5{,}00$ EUR $= \underline{250{,}00}$ EUR
$\underline{\underline{400{,}00 \text{ EUR}}}$

S(0|10)

	A	B	C	
I	0	10	15	25
II	20	20	0	40
	20	30	15	

$10 \cdot 6{,}00$ EUR $+ 15 \cdot 4{,}00$ EUR $= 120{,}00$ EUR
$20 \cdot 8{,}00$ EUR $+ 20 \cdot 3{,}00$ EUR $= \underline{220{,}00}$ EUR
$\underline{\underline{340{,}00 \text{ EUR}}}$

22. Wir stellen die Angaben der Aufgabe in einer Tabelle zusammen und setzen für die Liefermengen Platzhalter ein.

	A		B		C		Zur Verfügung m^3
	EUR	m^3	EUR	m^3	EUR	m^3	
I	8,00	x	7,00	y	9,00	$400 - x - y$	400
II	10,00	$500 - x$	8,00	$200 - y$	9,00	$x + y - 100$	600
Bedarf		500		200		300	

II an C: $600 - (500 - x) - (200 - y) = x + y - 100$

(1) Gleichung der Zielfunktion:

z EUR Gesamttransportkosten

$z = 8x + 7y + 9(400 - x - y) + 10(500 - x) + 8(200 - y) + 9(x + y - 100)$
$z = 8x + 7y + 3600 - 9x - 9y + 5000 - 10x + 1600 - 8y + 9x + 9y - 900$
$z = -2x - y + 9300 \Leftrightarrow y = -2x + (9300 - z)$

Beachte: $(9300 - z)$ ist der y-Achsenabschnitt. Da z subtrahiert wird, werden die Transportkosten umso niedriger, je größer der y-Achsenabschnitt im Achsenkreuz ist.

(2) Nebenbedingungen:

$\underline{x \geq 0}$ (1), $\underline{y \geq 0}$ (2)

I an A: $x \leq 400$ und $x \leq 500$, zusammengefasst $\underline{x \leq 400}$ (3)

I an B: $y \leq 400$ und $y \leq 200$, zusammengefasst $\underline{y \leq 200}$ (4)

I an C: $400 - x - y \leq 400 \Leftrightarrow y \geq -x$; $400 - x - y \leq 300 \Leftrightarrow y \geq -x + 100$
$y \geq -x$ und $y \geq -x + 100$, zusammengefasst $\underline{y \geq -x + 100}$ (59

II an A: $500 - x \leq 600 \Leftrightarrow x \geq -100$ $500 - x \leq 500 \Leftrightarrow x \geq 0$
$x \geq -100$ und $x \geq 0$, zusammengefasst $x \geq 0$ (1)

II an B: $200 - y \leq 600 \Leftrightarrow y \geq -400$ $200 - y \leq 200 \Leftrightarrow y \geq 0$
$y \geq -400$ und $y \geq 0$, zusammengefasst $y \geq 0$ (2)

II an C: $x + y - 100 \leq 600 \Leftrightarrow y \leq -x + 700$ $x + y - 100 \leq 300 \Leftrightarrow y \leq -x + 400$
$y \leq -x + 700$ und $y \leq -x + 400$, zusammengefasst $\underline{y \leq -x + 400}$ (6)

Zusammenfassung der Nebenbedingungen:
$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq 400 \wedge y \leq 200 \wedge y \geq -x + 100 \wedge y \leq -x + 400$

Planungsfünfeck mit den Eckpunkten M(400|0), P(200|200), Q(0|200), R(0|100), S(100|0).

Kostenminimum M(400|0). I liefert an A 400 m^3 und an B 0 m^3.

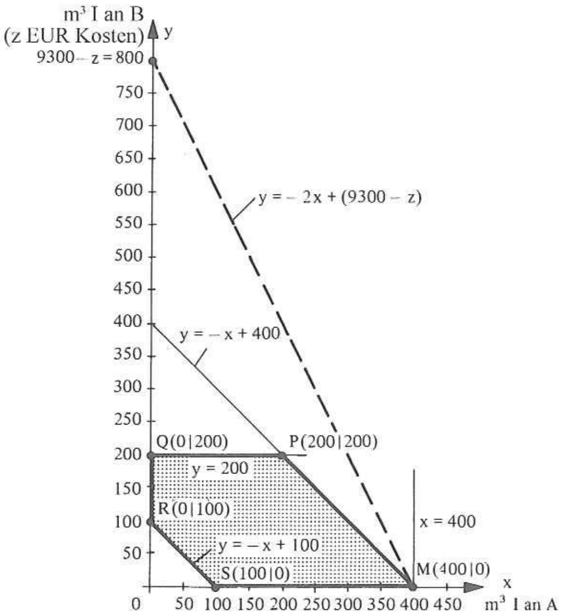
M(400|0)

	A	B	C	
I	400	0	0	400
II	100	200	300	600
	500	200	300	

Minimale Gesamttransportkosten:

$400 \cdot 8{,}00$ EUR $= 3\,200{,}00$ EUR
$100 \cdot 10{,}00$ EUR $+ 200 \cdot 8{,}00$ EUR $+ 300 \cdot 9{,}00$ EUR $= 5\,300{,}00$ EUR

$8\,500{,}00$ EUR



Auf der y-Achse: $9\,300 - z = 800 \Leftrightarrow z = 8\,500$

Das Kostenmaximum liegt in R(0|100)

	A	B	C	
I	0	100	300	400
II	500	100	0	600
	500	200	300	

Maximale Gesamttransportkosten:

$100 \cdot 7{,}00$ EUR $+ 300 \cdot 9{,}00$ EUR $= 3\,400{,}00$ EUR
$500 \cdot 10{,}00$ EUR $+ 100 \cdot 8{,}00$ EUR $= 5\,800{,}00$ EUR

$9\,200{,}00$ EUR