A. Grundbegriffe der Mengenlehre

Menge und Element

Fasst man unterscheidbare Objekte mit einem gemeinsamen Merkmal zusammen, so entsteht eine **Menge.**
Die Objekte nennt man **Elemente.**

Elemente einer Menge:

$a \in \mathbb{M}$: a ist ein Element der Menge $\mathbb{M}$.

$b \notin \mathbb{M}$: b ist kein Element der Menge $\mathbb{M}$.

Eine Menge kann endlich viele oder auch unendlich viele Elemente enthalten:

endliche Menge, unendliche Menge.

Darstellung von Mengen:

beschreibende Form:	Aufzählende Form:
$\{n \mid n$ ist natürliche Zahl oder $n = 0\}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\{z \mid z$ ist Primzahl$\}$	$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$
$\{r \in \mathbb{N} \mid r$ teilt $18\}$	$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
$\{x \mid x - 2 = x\}$	$\{\ \}$ leere Menge
$\{y \mid y + y = y\}$	$\{0\}$
$\{q \mid q$ ist ein Viereck und q hat mindestens 1 Paar paralleler Seiten$\}$	$\{$Parallelogramm, Trapez$\}$

A1. $\mathbb{M}$ sei die Menge der europäischen Hauptstädte.
Schreiben Sie die richtige Beziehung unter Verwendung von $\in$ bzw $\notin$.

a) Zürich b) Stuttgart c) Warschau

A2. $\mathbb{M}$ sei die Menge der geraden Quadratzahlen.
Schreiben Sie die richtige Beziehung unter Verwendung von $\in$ bzw $\notin$.

a) 25 b) 36 c) 57

A3. Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit mathematischen Symbolen, wenn geometrische Punkte als Elemente betrachtet werden.

a) Punkt P liegt auf der Geraden g.

b) Punkt P liegt nicht in der Ebene ε.

A4. Notieren Sie die folgenden Mengen in der aufzählenden Form.

a) Menge aller zweistelligen Quadratzahlen, deren Quersumme wiederum eine Quadratzahl ist.

b) Menge aller natürlichen dreistelligen Zahlen, deren Quersumme 3 ist.

c) Menge aller Primzahlen, die Teiler von 130 sind.

A5. Notieren Sie in aufzählender Form bei vorgegebener Grundmenge $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

a) $\mathbb{A} = \{x / x < -5$ und x ist Vielfaches von $3\}$

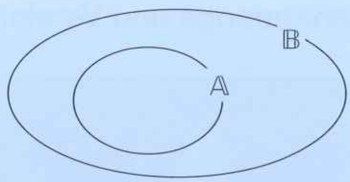
b) $\mathbb{B} = \{x / x$ ist zweistellig und hat Endziffer $3\}$

c) $\mathbb{C} = \{x / x$ ist einstellige Primzahl und $x^2 = 25\}$

Teilmenge

Eine Menge $\mathbb{A}$ ist **Teilmenge** einer Menge $\mathbb{B}$, wenn alle Elemente von $\mathbb{A}$ auch Elemente von $\mathbb{B}$ sind.

Symbol: $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$



Mengendiagramm

Für jede Menge $\mathbb{M}$ gilt: $\mathbb{M} \subset \mathbb{M}$

Beispiel: $\mathbb{D} = \{1, 2, 3\}$
Teilmengen von $\mathbb{D}$: $\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

A6. Zeichnen Sie ein Mengendiagramm für:

$\mathbb{G}$: Menge aller Wassertiere
$\mathbb{B}$: Menge aller Forellen
$\mathbb{A}$: Menge aller Fische
$\mathbb{C}$: Menge aller Wale

A7. Welche Beziehung besteht zwischen $\mathbb{U}$ und $\mathbb{W}$?

a) $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ und $\mathbb{V} \subset \mathbb{W}$

b) $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ und $\mathbb{V} \not\subset \mathbb{W}$

c) $\mathbb{U} \not\subset \mathbb{V}$ und $\mathbb{V} \subset \mathbb{W}$

d) $\mathbb{U} \not\subset \mathbb{V}$ und $\mathbb{V} \not\subset \mathbb{W}$

A8. Folgende Mengen sind gegeben:

$\mathbb{A} = \{u, v, w, x, y\}$ $\mathbb{B} = \{u, v\}$ $\mathbb{C} = \{u, v, w\}$ $\mathbb{D} = \{u, w\}$

Ersetzen Sie den Platzhalter $\square$ durch das Zeichen $\subset$ oder $\not\subset$, so dass eine wahre Aussage entsteht.

a) $\mathbb{A} \square \mathbb{A}$ b) $\mathbb{B} \square \mathbb{A}$ c) $\mathbb{A} \square \mathbb{B}$ d) $\mathbb{D} \square \mathbb{A}$

e) $\mathbb{B} \square \mathbb{D}$

A9. Notieren Sie sämtliche Teilmengen von $\{a, b, c, d, e\}$.

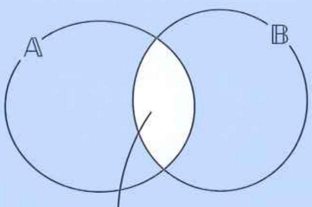
A10.* Wie viele Teilmengen besitzt eine Menge mit n Elementen?

A11. Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit mathematischen Symbolen, wenn geometrische Punkte als Elemente betrachtet werden.

a) Die Gerade g liegt in der Ebene ε.

b) Die Gerade g ist parallel zur Ebene ε und liegt nicht in ε.

Schnittmenge und Vereinigungsmenge

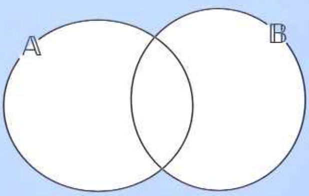


$\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$

Die Menge aller Elemente, die zu $\mathbb{A}$ und zu $\mathbb{B}$ gehören, bilden die **Schnittmenge** (oder Durchschnitt) von $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$.

Symbol: $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$
«$\mathbb{A}$ geschnitten mit $\mathbb{B}$»

Beispiel: $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}$



$\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$

Die Menge aller Elemente, die zu $\mathbb{A}$ oder zu $\mathbb{B}$ (oder zu beiden) gehören, bilden die **Vereinigungsmenge** von $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$.

Symbol: $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$
«$\mathbb{A}$ vereinigt mit $\mathbb{B}$»

Beispiel: $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A12. Gegeben sind die Mengen $\mathbb{A} = \{16, 32, 48, 64, 80\}$ und $\mathbb{B} = \{16, 48, 64\}$. Welche Teilmengen von $\mathbb{A}$ muss man für den Platzhalter $\square$ einsetzen, damit eine wahre Aussage entsteht?

a) $\square \cap \mathbb{B} = \{\ \}$

b) $\square \cap \mathbb{B} = \{48, 64\}$

c) $\square \cap \mathbb{A} = \{16, 32, 64\}$

d) $\square \cap \mathbb{A} = \{48\}$

A13. Welche Mengen muss man für den Platzhalter $\square$ einsetzen, damit eine wahre Aussage entsteht?

a) $\{2, 4\} \cup \square = \{2, 4, 6\}$

b) $\{6\} \cup \square = \{4, 6, 10\}$

c) $\{7, 2, 6\} \cup \square = \{6, 7, 2\}$

d) $\{11, 12, 13\} \cup \square = \{15, 14, 13\}$

A14. Es sei $\mathbb{G} = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{b, d\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{b, c, d, e\}$, $\mathbb{A} \cap \mathbb{C} = \{b, c\}$ und $\mathbb{A} \cup \mathbb{C} = \{a, b, c, d\}$
Bestimmen Sie $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ und $\mathbb{C}$.

A15. Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit mathematischen Symbolen, wenn geometrische Punkte als Elemente betrachtet werden.

a) Die Geraden g und h schneiden sich in Punkt P.

b) Die Geraden g und h sind windschief.

c) Die Gerade g durchstösst die Ebene ε im Punkt Q.

d) Die Ebenen ε_1 und ε_2 schneiden sich in der Geraden g.

A16. Vereinfachen Sie:

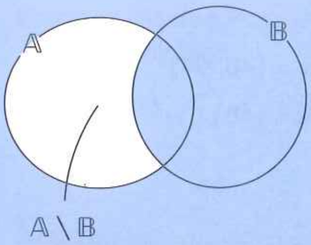
a) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, wenn gilt: $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$

b) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, wenn gilt: $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$

c) $\mathbb{A} \cap (\mathbb{A} \cup \mathbb{B})$

d) $\mathbb{A} \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$

Differenzmenge



Die Elemente von $\mathbb{A}$, die nicht zu $\mathbb{B}$ gehören, bilden die **Differenzmenge.**

Symbol: $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$
«$\mathbb{A}$ ohne $\mathbb{B}$»

Beispiel: $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 3, 5, 6\} = \{2, 4\}$

A17. Gegeben sind:

$\mathbb{G} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ $\quad$ $\mathbb{A} = \{a, c, e, g, i\}$

$\mathbb{C} = \{c, g, i\}$ $\quad$ $\mathbb{D} = \{g, h, i\}$

Bestimmen Sie folgende Differenzmengen

a) $\mathbb{A} \setminus \mathbb{D}$ $\quad$ b) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$ $\quad$ c) $\mathbb{G} \setminus \mathbb{A}$

d) $\mathbb{C} \setminus \{\ \}$ $\quad$ e) $\mathbb{A} \setminus (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D})$ $\quad$ f) $(\mathbb{A} \setminus \mathbb{C}) \setminus \mathbb{D}$

A18. Welche Teilmengen von $\mathbb{G} = \{u, v, w\}$ müssen Sie für den Platzhalter Δ einsetzen, damit eine wahre Aussage entsteht?

a) $\{u, w\} \setminus \Delta = \{w\}$ $\quad$ b) $\Delta \setminus \{u, v\} = \{w\}$

c) $\{v\} \setminus \Delta = \{v, w\}$

A19. Welche Teilmengen von $\mathbb{G} = \{7, 8, 9\}$ müssen Sie für den Platzhalter $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ einsetzen, damit wahre Aussagen entstehen?

a) $\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y} = \{9, 8\}$ $\quad$ b) $\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y} = \{7\}$

A20. Von den 62 Mitgliedern eines Vereins, dem 32 Frauen angehören, nehmen 38 an einer Veranstaltung teil.
Wie viele Männer besuchen die Veranstaltung

a) mindestens? $\quad$ b) höchstens?

Wie viele Frauen, die die Veranstaltung nicht besuchen, zählt der Verein

c) mindestens? $\quad$ d) höchstens?

Mengenalgebra

A21. Markieren Sie im Mengendiagramm:

a) $\mathbb{U} \cap (\mathbb{V} \cap \mathbb{W})$

b) $(\mathbb{U} \cap \mathbb{V}) \cup (\mathbb{U} \cap \mathbb{W})$

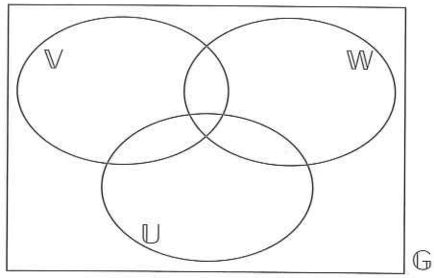
c) $(\mathbb{U} \cup \mathbb{V}) \cap (\mathbb{U} \cup \mathbb{W})$

d) $\mathbb{U} \setminus (\mathbb{V} \cap \mathbb{W})$

e) $(\mathbb{U} \setminus \mathbb{V}) \cup (\mathbb{U} \setminus \mathbb{W})$

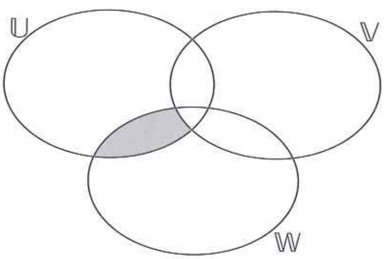
f) $(\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) \setminus (\mathbb{V} \cap \mathbb{W})$

g) $(\mathbb{U} \setminus \mathbb{V}) \cap (\mathbb{U} \setminus \mathbb{W})$

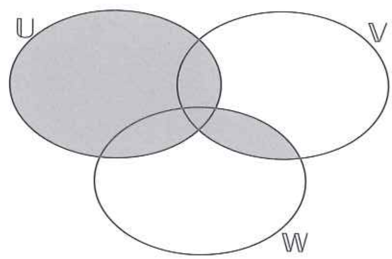


A22. Schreiben Sie mithilfe der Operationszeichen $\cap$, $\cup$, $\setminus$ das markierte Gebiet als Mengenterm.

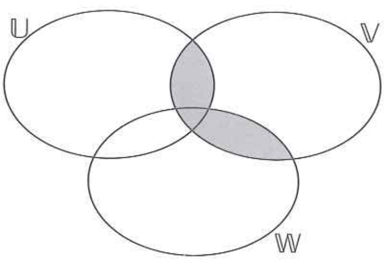
a)



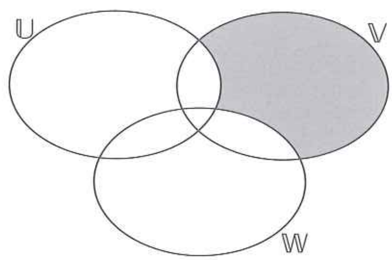
b)



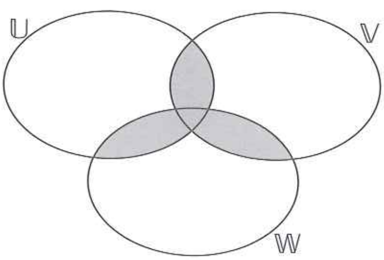
c)



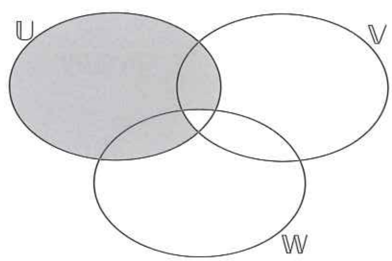
d)



e)



f)



A23. Gegeben sind $\mathbb{G} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\mathbb{A} \cap \mathbb{C} = \{4, 8\}$, $\mathbb{A} \cup \mathbb{C} = \{4, 6, 8, 10\}$

$\mathbb{B} \cap \mathbb{C} = \{4, 6\}$, $\mathbb{B} \cup \mathbb{C} = \{2, 4, 6, 8\}$

Bestimmen Sie $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ und $\mathbb{C}$, wenn $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ und $\mathbb{C}$ Teilmengen von $\mathbb{G}$ sind.

A24. Ersetzen sie den Platzhalter $\square$ durch ein Operationszeichen ($\cap$, $\cup$ oder $\setminus$), so dass eine wahre Aussage entsteht. $\mathbb{A}$ ist Teilmenge von $\mathbb{G}$.

a) $\mathbb{G} \square \mathbb{A} = \mathbb{G}$

b) $\mathbb{A} \square \mathbb{G} = \mathbb{A}$

c) $\mathbb{G} \square \{\ \} = \mathbb{G}$

d) $\{\ \} \square \mathbb{A} = \{\ \}$

e) $\mathbb{A} \square \mathbb{A} = \mathbb{A}$