## 17.3 Spezielle Anwendungsbeispiele

### 17.3.1 Absolute Abhängigkeit

1) Ein EDV-Fachgeschäft bietet unter anderem Monitore mit einer Bilddiagonalen von 17 sowie mit einer von 21 Zoll an. Gemäss Vorgaben sollen von den 21 Zoll-Modellen höchstens 20 Stück mehr als von den 17 Zoll-Modellen angeschafft werden. Von den 17 Zoll-Modellen sollen höchstens 40 Stück, von beiden Modellen zusammen höchstens 60 Stück gekauft werden.
Der Gewinn für ein 17 Zoll Modell beträgt CHF 40.--, für ein 21 Zoll-Modell CHF 50.--.

Stellen Sie den Sachverhalt grafisch dar.
Bei welchen Stückzahlen ist der Gewinn am grössten und wie gross ist er?

**a) Definitionen**

$\mathbb{D} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

x = Anzahl 17 Zoll Monitore

y = Anzahl 21 Zoll Monitore

**b) Bedingungen**

1) $y \leq x + 20$ $\Rightarrow$ $y = x + 20$ und $\leq$

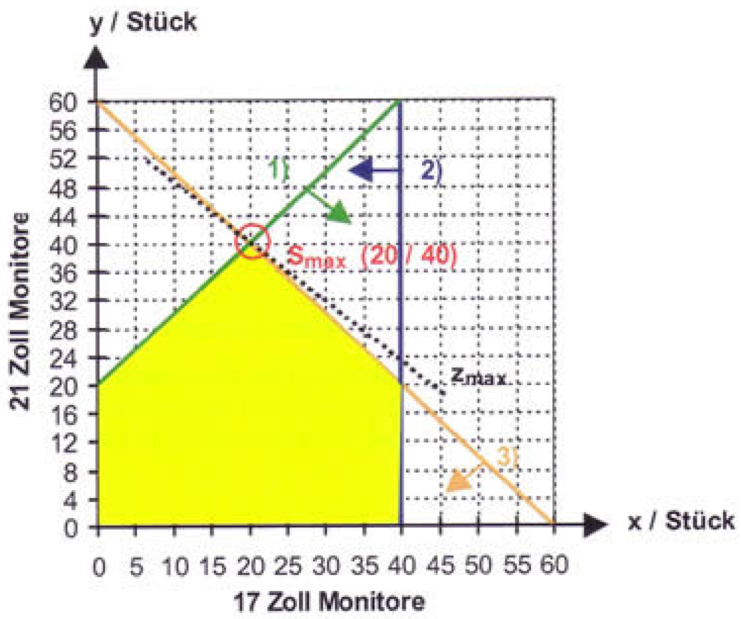
2) $x \leq 40$ $\Rightarrow$ $x = 40$ und $\leq$

3) $x + y \leq 60$ $\Rightarrow$ $y = -x + 60$ und $\leq$

**c) Zielfunktion**

$z = 40x + 50y$ $\Rightarrow$ $y = -\frac{4}{5}x$

**d) Diagramm**



**e) Bestimmen des Maximums**

Berechnen des Maximums als Schnittpunkt von Gerade 1) und 3)

$y = x + 20$ und $y = -x + 60$

<u>Gleichsetzungsverfahren</u> (die beiden Gleichungen - d.h. y - einander gleichsetzen)

$x + 20 = -x + 60$

$2x = 40$

$\underline{x = 20}$

Berechnung y: x in Gleichung 1) einsetzen: $y = 20 + 20 = \underline{40}$

**$S_{max}$ <u>( 20 / 40 )</u>**

**f) Verkaufszahlen für maximalen Gewinn**

Der maximale Gewinn wird erreicht, wenn **<u>20 Stück</u>** der 17 Zoll-Monitore und **<u>40 Stück</u>** der 21 Zoll-Monitore verkauft werden.

**g) Maximaler Gewinn**

Zielfunktion: $z = 40x + 50y$

Maximaler Gewinn $= 40 \cdot 20 + 50 \cdot 40 =$ **<u>CHF 2'800.--</u>**

## 17.2.2 Optimierung zum Minimum

3) Von den Garnituren "Alpha" und "Omega" sollen wöchentlich mindestens je 20 Stück produziert werden. Zusammen müssen von beiden Garnituren mindestens 60 Stück produziert werden.
Die Kosten für die Garnitur "Alpha" betragen CHF 80.--, für die Garnitur "Omega" CHF 120.--.

a) Stellen Sie die Definitionen auf.
b) Bestimmen Sie die Produktionsbedingungen.
c) Bestimmen Sie die Zielfunktion.
d) Stellen Sie die Bedingungen grafisch dar.
e) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zielfunktion das Minimum.
f) Bei welchen Produktionszahlen entstehen minimale Kosten?
g) Wie gross sind die minimalen Kosten?

**a) Definitionen**

$\mathbb{D} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

x = Anzahl Garnituren "Alpha"

y = Anzahl Garnituren "Omega"

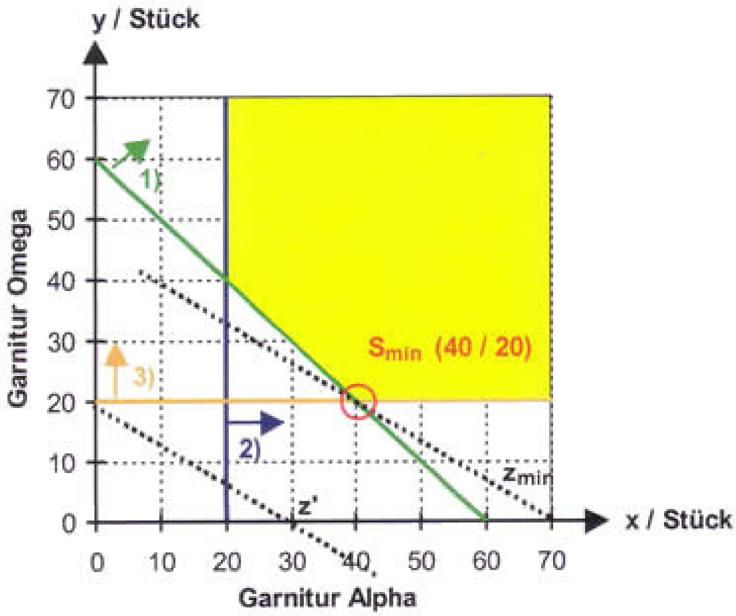
**b) Bedingungen**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $x + y \geq 60$ | $\Rightarrow y = -x + 60$ | und $\geq$ |
| 2) | $x \geq 20$ | $\Rightarrow x = 20$ | und $\geq$ |
| 3) | $y \geq 20$ | $\Rightarrow y = 20$ | und $\geq$ |

**c) Zielfunktion**

$z = 80x + 120y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x$

**d) Diagramm**



e) **Bestimmen des Minimums**

Berechnen des Minimums als Schnittpunkt von Gerade 1) und 3)

$y = -x + 60$ und $y = 20$

Gleichsetzungsverfahren (die beiden Gleichungen - d.h. y - einander gleichsetzen)

$20 = -x + 60$

$\underline{x = 40}$

**$S_{min}$ ( 40 / 20 )**

f) **Produktionszahlen für minimale Kosten**

Die minimalen Kosten werden erreicht, wenn **40 Stück** der Garnitur "Alpha" und **20 Stück** der Garnitur "Omega" produziert werden.

g) **Minimale Kosten**

Zielfunktion: $z = 80x + 120y$

Minimale Kosten = $80 \bullet 40 + 120 \bullet 20$ = **CHF 5'600.--**

2) Ein Früchtehändler muss seinen Vorrat an Äpfeln und Birnen aufstocken. Von den Äpfeln will er höchstens 60 Kilogramm, von den Birnen mindestens 20 Kilogramm, von beiden Früchten zusammen nicht mehr als 90 Kilogramm einkaufen. Von den Birnen soll höchstens die gleiche Menge wie von den Äpfeln eingekauft werden.
Der Gewinn für ein Kilogramm Äpfel beträgt CHF 1.--, für ein Kilogramm Birnen CHF 1.20.

a) Stellen Sie die Definitionen auf.
b) Bestimmen Sie die Einkaufsbedingungen.
c) Bestimmen Sie die Zielfunktion.
d) Stellen Sie die Bedingungen grafisch dar.
e) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zielfunktion das Maximum.
f) Bei welchen Einkaufszahlen ergibt sich der grösste Gewinn?
g) Wie gross ist der maximale Gewinn?

**a) Definitionen**

$\mathbb{D} = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$
x = Äpfel in Kilogramm
y = Birnen in Kilogramm

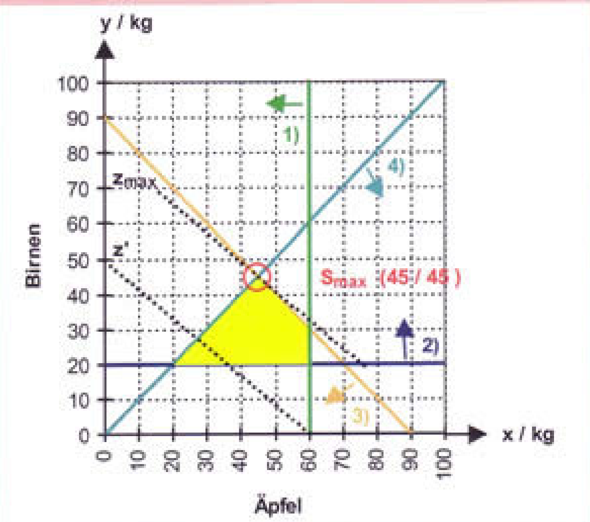
**b) Bedingungen**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $x \le 60$ | $\Rightarrow x = 60$ | und $\le$ |
| 2) | $y \ge 20$ | $\Rightarrow y = 20$ | und $\ge$ |
| 3) | $x + y \le 90$ | $\Rightarrow y = -x + 90$ | und $\le$ |
| 4) | $x \ge y$ | $\Rightarrow y = x$ | und $\le$ |

**c) Zielfunktion**

5) $z = 1x + 1.2y \Rightarrow y = -\frac{5}{6}x$

**d) Diagramm**



e) **Bestimmen des Maximums**

**Berechnen des Maximums als Schnittpunkt von Gerade 3) und 4)**

$y = -x + 90$ und $y = x$

Berechnung von x:
Gleichungen einander gleichsetzen

$-x + 90 = x$

$90 = 2x$

$\underline{x = 45}$

Berechnung von y:
x in Gleichung 4) einsetzen

$\underline{y = 45}$

$S_{max}$ ( 45 / 45 )

f) **Einkaufszahlen für maximalen Gewinn**

Der maximale Gewinn wird erreicht, wenn **45 kg Äpfel** und **45 kg Birnen** eingekauft werden.

g) **Maximaler Gewinn**

Zielfunktion: $z = 1x + 1.2y$

Maximaler Gewinn $= 1 \bullet 45 + 1.2 \bullet 45$

$= 45 + 54$

$= \underline{99}$

Maximaler Gewinn: **CHF 99.--**.

### 17.3.3 Indirekte Abhängigkeit

3) Für die Auslieferung an ein Betriebsrestaurant soll eine Bäckerei Gipfeli und Semmeli produzieren. Dabei muss berücksichtigt werden, dass mindestens ein Drittel mehr Gipfeli als Semmeli hergestellt werden sollen. Von den Semmeli müssen jedoch mindestens 300 Stück, von den Gipfeli sollen höchstens 1'600 Stück produziert werden.
Aufgrund der beschränkten Einsatzmöglichkeiten der Maschinen können entweder höchstens 2'400 Gipfeli oder höchstens 1'800 Semmeli oder eine beliebige Kombination im selben Verhältnis hergestellt werden.
Der Gewinn pro Gipfeli beträgt 40 Rappen, pro Semmeli 60 Rappen.

Stellen Sie den Sachverhalt grafisch dar.
Bei welchen Stückzahlen ist der Gewinn am grössten und wie gross ist er?

**a) Definitionen**

$\mathbb{D} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

x = Anzahl Gipfeli

y = Anzahl Semmeli

**b) Bedingungen**

1) $x \geq \frac{4}{3}y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x$ und $\leq$

2) $y \geq 300 \quad \Rightarrow \quad y = 300$ und $\geq$

3) $x \leq 1'600 \quad \Rightarrow \quad x = 1'600$ und $\leq$

**Bedingung:** Aufgrund der beschränkten Einsatzmöglichkeiten der Maschinen können entweder höchstens 2'400 Gipfeli oder höchstens 1'800 Semmeli oder eine beliebige Kombination im selben Verhältnis hergestellt werden.

⇒ Wenn 2'400 Gipfeli produziert werden, können 0 Semmeli produziert werden.

⇒ Wenn 1'800 Semmeli produziert werden, können 0 Gipfeli produziert werden.

⇒ Doch auch Kombinationen im selben Verhältnis sind möglich, so gilt:

**1. Überlegungsvariante:**

$$\frac{\text{Anzahl Gipfeli}}{2'400} + \frac{\text{Anzahl Semmeli}}{1'800} \leq 1$$

4) $\frac{x}{2'400} + \frac{y}{1'800} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x + 1800$ und $\leq$

**2. Überlegungsvariante:**

y = mx + q, gegeben sind die Punkte ( 2'400 / 0 ) und ( 0 / 1'800 )

$1'800 = 0m + q \quad \Rightarrow \quad q = 1'800$

$0 = 2'400m + q \quad \Rightarrow \quad q = -2'400m$

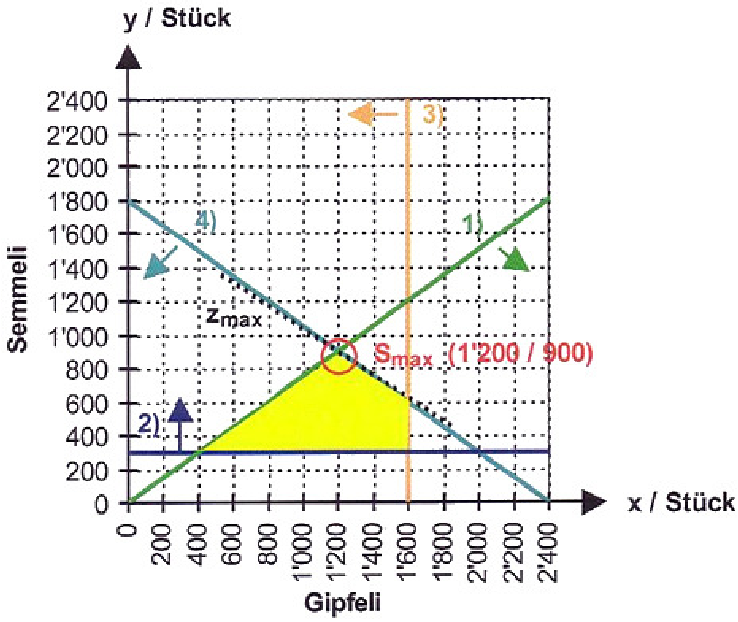
$1'800 = -2'400m \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{3}{4}$

4) $y \leq -\frac{3}{4}x + 1800 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x + 1800$ und $\leq$

**c) Zielfunktion**

$z = 0.4x + 0.6y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x$

**d) Diagramm**




**e) Bestimmen des Maximums**

Berechnen des Maximums als Schnittpunkt von Gerade 1) und 4)

$y = \frac{3}{4}x$ und $y = -\frac{3}{4}x + 1'800$

Gleichsetzungsverfahren (die beiden Gleichungen - d.h. y - einander gleichsetzen)

$\frac{3}{4}x = -\frac{3}{4}x + 1'800$

$1.5x = 1'800$

$\underline{x = 1'200}$

Berechnung y: x in Gleichung 1) einsetzen: $y = \frac{3}{4} \cdot 1'200 = \underline{900}$

$S_{max}$ **( 1'200 / 900 )**

**f) Produktionszahlen für maximalen Gewinn**

Der maximale Gewinn wird erreicht, wenn **1'200 Gipfeli** und **900 Semmeli** produziert werden.

**g) Maximaler Gewinn**

Zielfunktion: $z = 0.4x + 0.6y$

Maximaler Gewinn $= 0.4 \bullet 1'200 + 0.6 \bullet 900 =$ **CHF 1'020.--**