Einführung Logarithmen

Potenzrechnung

- Exponent

  $2^5 = x$ → Potenzwert

  Basis

  Beispiel: $2^5 = 32$

- Bei der Potenzrechnung wird der Wert einer Potenz gesucht; Basis und Exponent sind gegeben

Wurzelrechnung

(1. Umkehrung des Potenzierens)

- Wurzelexponent

  Potenzgleichung

  $x^5 = 32$ somit $x = \sqrt[5]{32}$ → Radikand

  Wurzel(wert)

  Beispiel: $2^5 = 32$ somit $2 = \sqrt[5]{32}$

- Beim Radizieren sind der Potenzwert (Radikand) und der Exponent gegeben; die Basis wird gesucht.

Logarithmenrechnung

(2. Umkehrung des Potenzierens)

- Logarithmus

  Exponentialgleichung

  $2^x = 32$ somit $x = \log_2 32$ → Numerus

  Basis

  Beispiel: $2^5 = 32$ somit $5 = \log_2 32$

- Sind Basis und Potenzwert bekannt und wird aus ihnen der Exponent gesucht, so führt das zum Logarithmieren.

Der Definitionsbereich

$$10^b = x \quad \Leftrightarrow \quad b = \log_{10} x$$

$$\updownarrow \qquad \boxed{x > 0} \qquad \updownarrow$$

10^b ist immer positiv $\leftrightarrow$ x ist nie negativ

Zusammenhang
Logarithmen- bzw. Exponentialgleichung

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Eselsbrücke (Logarithmus in «Worten»):

$$\log_{\text{Basis}} \text{Ergebnis} = \text{Exponent} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Ergebnis}$$

Logarithmus eines Produktes

Formel

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

in Worten

Ein Produkt wird logarithmiert, indem man die Logarithmen der Faktoren addiert.

Beweis

setzt man:	$\log_a b = x \quad \text{und} \quad \log_a c = y$
so ist in Potenzform:	$a^x = b \quad \text{und} \quad a^y = c$
daraus folgt:	$b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
in Logarithmenform:	$\log_a(b \cdot c) = \log_a\left(a^{x+y}\right) = x + y$
und damit:	$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Beispiel

$$\log_{10}(10 \cdot 100) = \log_{10} 10 + \log_{10} 100$$

$$\log_{10}(1'000) = 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$$

$$\text{denn} \quad 10^3 = 1'000$$

Logarithmus eines Quotienten

Formel

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

in Worten

Ein Bruch wird logarithmiert, indem man vom Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahiert.

Beweis

setzt man: $\log_a b = x$ und $\log_a c = y$

so ist in Potenzform: $a^x = b$ und $a^y = c$

daraus folgt: $\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

in Logarithmenform: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a\left(a^{x-y}\right) = x - y$

und damit: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

Beispiel

$$\log_{10}\left(\frac{1'000}{10}\right) = \log_{10} 1'000 - \log_{10} 10$$

$$\log_{10}(100) = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}$$

denn $10^2 = 100$

Logarithmus einer Potenz

Formel

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

in Worten

Eine Potenz wird logarithmiert, indem man den Logarithmus der Basis mit dem Exponenten multipliziert.

Beweis

setzt man: $\log_a b = x$

so ist in Potenzform: $a^x = b$

daraus folgt: $b^n = \left(a^x\right)^n = a^{nx}$

in Logarithmenform: $\log_a b^n = \log_a a^{nx} = nx$

und damit: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Beispiel

$$\log_{10} 10^3 = 3 \cdot \log_{10} 10$$

$$\log_{10} 1'000 = 3 \cdot 1 = \underline{\underline{3}}$$

denn $10^3 = 1'000$

Beziehungen aus dem Grundgesetz

Logarithmenrechnung

- Logarithmus

  Exponentialgleichung

  $2^x = 32$ somit $x = \log_2 32 \longrightarrow$ Numerus

  Basis

- Allgemeine Grundformel

$$\boxed{(1) \quad a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b \quad (2)}$$

$(a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, \quad b \in \mathbb{R}_+ > 0, \quad x \in \mathbb{R})$

Beziehung 1

- Aus der Grundformel folgt direkt: (2) in (1)

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Bsp: $5^{\log_5 7} = x \quad \rightarrow \quad x = \underline{\underline{7}}$

Beziehung 2

- Aus der Grundformel folgt direkt: (1) in (2)

$$\boxed{x = \log_a a^x}$$

Merke: Logarithmusbasis = Potenzbasis, dann ist der Exponent die Lösung!

Bsp: $\log_3 3^8 = x \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 3^8 \quad \rightarrow \quad x = \underline{\underline{8}}$

Abgeleitet aus der Beziehung 2

Beziehung 2

- Wir erinnern uns:

$$\boxed{x = \log_a a^x}$$

Merke: Logarithmusbasis = Potenzbasis, dann ist der Exponent die Lösung!

Beziehung 3

- Annahme $x = 0$ → eingesetzt in die Beziehung 2:

$$x = \log_a a^0 = 0 \qquad (1)$$

gemäss Potenzgesetzen ist $a^0 = 1$, eingesetzt in (1):

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

Bsp: $\log_3 1 = x \Leftrightarrow 3^x = 1 \quad \rightarrow \quad 3^0 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \underline{\underline{0}}$

Beziehung 4

- Annahme $x = 1$ → eingesetzt in die Beziehung 2:

$$x = \log_a a^1 = 1 \qquad (1)$$

gemäss Potenzgesetzen ist $a^1 = a$, eingesetzt in (1):

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Bsp: $\log_3 3 = x \Leftrightarrow 3^x = 3 \quad \rightarrow \quad 3^1 = 3 \quad \rightarrow \quad x = \underline{\underline{1}}$

Umrechnung in die Basis b mit Hilfe der Basis a

Formel

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

Beweis setzt man: $\log_b r = x$

so ist in Potenzform: $b^x = r$

daraus folgt: $\log_a b^x = \log_a r$

$$x \cdot \log_a b = \log_a r \quad \rightarrow \quad x = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

und damit: $\log_b r = \dfrac{\log_a r}{\log_a b}$

Beispiel

$$\log_3 81 = \frac{\log_{10} 81}{\log_{10} 3} = \frac{1{,}9085}{0{,}4771} = \underline{\underline{4}}$$

denn $3^4 = 81$