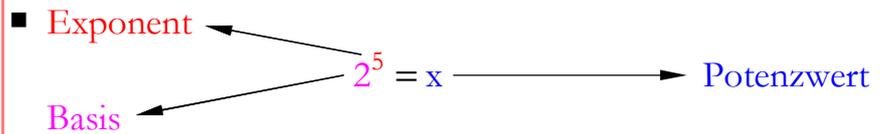


# Einführung Logarithmen

## Potenzrechnung

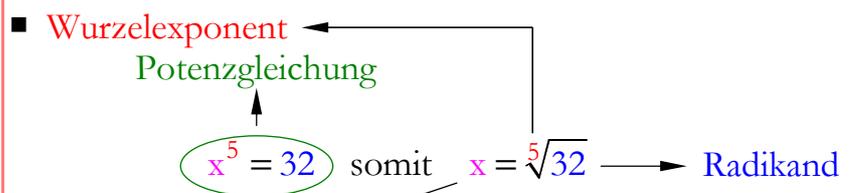


Beispiel:  $2^5 = 32$

- Bei der Potenzrechnung wird der Wert einer Potenz gesucht; Basis und Exponent sind gegeben

## Wurzelrechnung

(1. Umkehrung des Potenzierens)

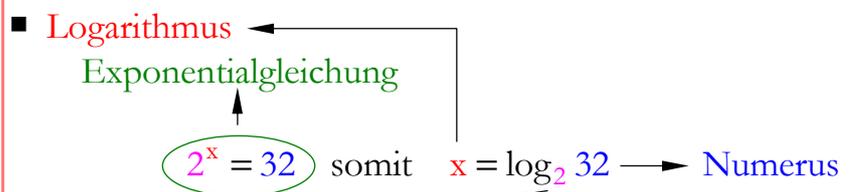


Beispiel:  $2^5 = 32$  somit  $2 = \sqrt[5]{32}$

- Beim Radizieren sind der Potenzwert (Radikand) und der Exponent gegeben; die Basis wird gesucht.

## Logarithmenrechnung

(2. Umkehrung des Potenzierens)

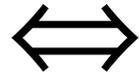


Beispiel:  $2^5 = 32$  somit  $5 = \log_2 32$

- Sind Basis und Potenzwert bekannt und wird aus ihnen der Exponent gesucht, so führt das zum Logarithmieren.

## Der Definitionsbereich

$$10^b = x$$



$$b = \log_{10} x$$



$10^b$  ist

immer

positiv

$$x > 0$$



x ist

nie

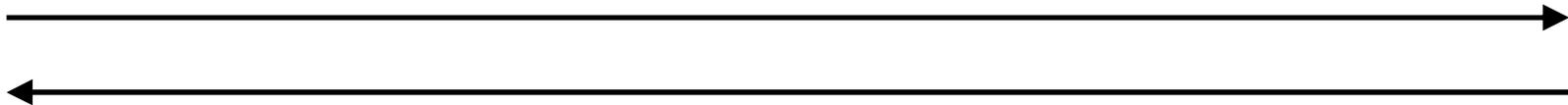
negativ

# Zusammenhang Logarithmen- bzw. Exponentialgleichung

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Eselsbrücke (Logarithmus in «Worten»):

$$\log_{\text{Basis}} \text{Ergebnis} = \text{Exponent} \iff \text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Ergebnis}$$



## Logarithmus eines Produktes

Formel

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

in Worten

Ein Produkt wird logarithmiert, indem man die Logarithmen der Faktoren addiert.

Beweis

setzt man:  $\log_a b = x$  und  $\log_a c = y$

so ist in Potenzform:  $a^x = b$  und  $a^y = c$

daraus folgt:  $b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

in Logarithmenform:  $\log_a (b \cdot c) = \log_a (a^{x+y}) = x + y$

und damit:  $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Beispiel

$$\log_{10} (10 \cdot 100) = \log_{10} 10 + \log_{10} 100$$

$$\log_{10} (1'000) = 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$$

$$\text{denn } 10^3 = 1'000$$

# Logarithmus eines Quotienten

Formel  $\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$

in Worten Ein Bruch wird logarithmiert, indem man vom Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahiert.

Beweis setzt man:  $\log_a b = x$  und  $\log_a c = y$   
 so ist in Potenzform:  $a^x = b$  und  $a^y = c$

daraus folgt:  $\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

in Logarithmenform:  $\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a (a^{x-y}) = x - y$

und damit:  $\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$

Beispiel  $\log_{10} \left( \frac{1'000}{10} \right) = \log_{10} 1'000 - \log_{10} 10$   
 $\log_{10} (100) = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}$   
 denn  $10^2 = 100$

# Logarithmus einer Potenz

Formel

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

in Worten

Eine Potenz wird logarithmiert, indem man den Logarithmus der Basis mit dem Exponenten multipliziert.

Beweis

setzt man:  $\log_a b = x$

so ist in Potenzform:  $a^x = b$

daraus folgt:  $b^n = (a^x)^n = a^{nx}$

in Logarithmenform:  $\log_a b^n = \log_a a^{nx} = nx$

und damit:  $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Beispiel

$$\log_{10} 10^3 = 3 \cdot \log_{10} 10$$

$$\log_{10} 1'000 = 3 \cdot 1 = \underline{\underline{3}}$$

$$\text{denn } 10^3 = 1'000$$

# Beziehungen aus dem Grundgesetz

Logarithmenrechnung

- **Logarithmus**

Exponentialgleichung

$2^x = 32$  somit  $x = \log_2 32$  → Numerus

Basis

- Allgemeine Grundformel

$$(1) \quad a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b \quad (2)$$

$$(a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, \quad b \in \mathbb{R}_+ > 0, \quad x \in \mathbb{R})$$

Beziehung 1

- Aus der Grundformel folgt direkt: (2) in (1)

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\text{Bsp: } 5^{\log_5 7} = x \quad \rightarrow \quad x = \underline{\underline{7}}$$

Beziehung 2

- Aus der Grundformel folgt direkt: (1) in (2)

$$x = \log_a a^x$$

Merke: **Logarithmusbasis** = **Potenzbasis**, dann ist der **Exponent** die Lösung!

$$\text{Bsp: } \log_3 3^8 = x \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 3^8 \quad \rightarrow \quad x = \underline{\underline{8}}$$

## Abgeleitet aus der Beziehung 2

Beziehung 2

- Wir erinnern uns:

$$x = \log_a a^x$$

Merke: **Logarithmusbasis** = **Potenzbasis**, dann ist der **Exponent** die Lösung!

Beziehung 3

- Annahme  $x = 0$  → eingesetzt in die Beziehung 2:

$$x = \log_a a^0 = 0 \quad (1)$$

gemäss Potenzgesetzen ist  $a^0 = 1$ , eingesetzt in (1):

$$\log_a 1 = 0$$

$$\text{Bsp: } \log_3 1 = x \Leftrightarrow 3^x = 1 \rightarrow 3^0 = 1 \rightarrow x = \underline{0}$$

Beziehung 4

- Annahme  $x = 1$  → eingesetzt in die Beziehung 2:

$$x = \log_a a^1 = 1 \quad (1)$$

gemäss Potenzgesetzen ist  $a^1 = a$ , eingesetzt in (1):

$$\log_a a = 1$$

$$\text{Bsp: } \log_3 3 = x \Leftrightarrow 3^x = 3 \rightarrow 3^1 = 3 \rightarrow x = \underline{1}$$

## Umrechnung in die Basis **b** mit Hilfe der Basis **a**

Formel

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

Beweis

setzt man:  $\log_b r = x$

so ist in Potenzform:  $b^x = r$

daraus folgt:  $\log_a b^x = \log_a r$

$$x \cdot \log_a b = \log_a r \quad \rightarrow \quad x = \frac{\log_a r}{\log_a b}$$

und damit:  $\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b}$

Beispiel

$$\log_3 81 = \frac{\log_{10} 81}{\log_{10} 3} = \frac{1,9085}{0,4771} = 4$$

denn  $3^4 = 81$