

8. x EUR Kapital

y% ursprünglicher Zinsfuß

$$\frac{x \cdot y \cdot 165}{100 \cdot 360} = 132$$

$$\frac{x \cdot (y + 1) \cdot 165}{100 \cdot 360} = 154$$

9. x EUR Darlehen I

y EUR Darlehen II

$$x : y = 4 : 3$$

$$\frac{x \cdot 7}{100 \cdot 4} = \frac{x \cdot 6}{100 \cdot 4} = 230$$

10. zuerst x% Zinsen von 7200,00 EUR

zuerst y% Zinsen von 4800,00 EUR

$$\frac{7200 \cdot x \cdot 5}{100 \cdot 12} + \frac{4800 \cdot y \cdot 5}{100 \cdot 12} = 370$$

$$\frac{4800 \cdot x \cdot 5}{100 \cdot 12} + \frac{7200 \cdot y \cdot 5}{100 \cdot 12} = 380$$

11. x% Zinsen

y Tage

$$\frac{12000 \cdot x \cdot y}{100 \cdot 360} = 350$$

$$\frac{12000 \cdot x \cdot (y + 20)}{100 \cdot 360} = 400$$

12. x EUR ursprüngliches Darlehen

y Tage ursprünglich ausgeliehen

$$\frac{x \cdot 7 \cdot y}{100 \cdot 360} = 420$$

$$\frac{2x \cdot 7 \cdot (y - 60)}{100 \cdot 360} = 630$$

8.5 Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen

1. a) $L = \{(2; 1; 3)\}$

2. a) $L = \{(-1; 2; -2)\}$

3. a) $L = \{(4; 3; 2)\}$

4. a) $L = \{(0; -1; -2)\}$

5. x EUR je kWh Strom, y EUR je m³ Gas, z EUR je m³ Wasser

$$70x + 15y + 12z = 25$$

$$50x + 20y + 8z = 21$$

$$60x + 25y + 10z = 26$$

$$L = \{(0,1; 0,4; 1)\}$$

1 kWh Strom kostet

1 m³ Gas kostet

1 m³ Wasser kostet

0,10 EUR

0,40 EUR

1,00 EUR

L ist die Menge der Punkte im II. Quadranten ohne die Randpunkte.

8.6 Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen

8.6.1 Grafische Lösung von linearen Ungleichungen

1. a) Bei $G = Z \times Z$ ist die Relation $y < x + 2$ die Menge aller Bildpunkte mit ganzen Koordinaten, die unterhalb der Geraden $y = x + 2$ liegen.

b) Bei $G = Q \times Q$ stellt die Relation $y < x + 2$ die Halbebene unterhalb der Geraden $y = x + 2$ dar.

2. a) Bei $G = Z \times Z$ ist die Relation $y > 2x - 1$ die Menge aller Bildpunkte mit ganzen Koordinaten, die oberhalb der Geraden $y = 2x - 1$ liegen.

b) Bei $G = Q \times Q$ stellt die Relation $y > 2x - 1$ die Halbebene oberhalb der Geraden $y = 2x - 1$ dar.

3. a) Halbebene oberhalb der Geraden $y = x - 2$ mit Randgeraden.

b) Halbebene unterhalb der Geraden $y = x + 1$ mit Randgeraden.

c) Halbebene oberhalb der Geraden $y = 2x - 1$ mit Randgeraden.

d) Halbebene unterhalb der Geraden $y = -2x + 4$ ohne Randgerade.

e) Halbebene oberhalb der Geraden $y = \frac{1}{2}x$ ohne Randgerade.

f) Halbebene unterhalb der Geraden $y = -\frac{1}{2}x + 3$ mit Randgeraden.

4. a) Halbebene oberhalb der Geraden $y = 1,5x + 2$ mit der Randgeraden.

b) Halbebene unterhalb der Geraden $y = -\frac{2}{3}x - 1$ ohne Randgerade.

c) Halbebene oberhalb der Geraden $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ ohne Randgerade.

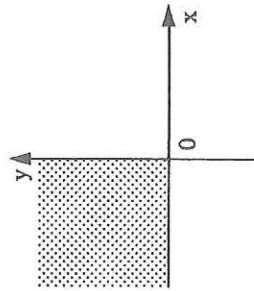
d) Halbebene unterhalb der Parallelen zur x-Achse $y = 3$ mit Randgeraden.

e) Halbebene links der Parallelen zur y-Achse $x = -2$ ohne Randgerade.

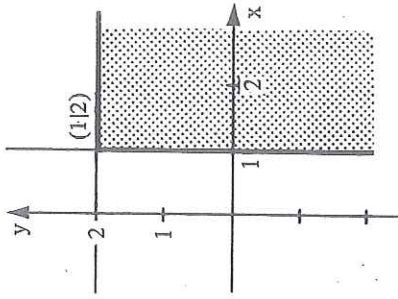
f) Halbebene rechts der Parallelen zur y-Achse $x = 2,5$ mit der Randgeraden.

8.6.2 Grafische Lösung von linearen Ungleichungssystemen mit zwei Variablen

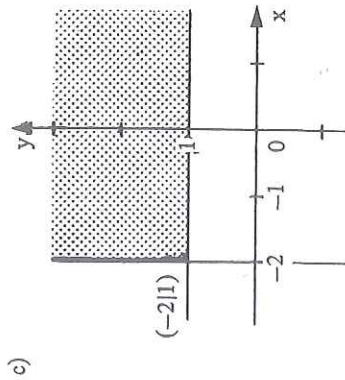
1. a)



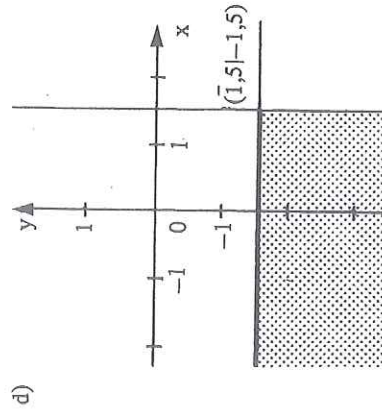
b)



L ist die Menge der Punkte im II. Quadranten ohne die Randpunkte.



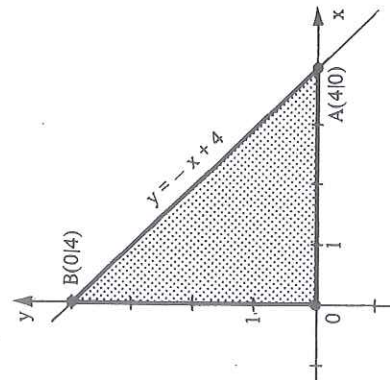
L ist die Menge der Punkte des grauen Feldes einschließlich der Punkte auf der senkrechten Randgeraden, aber ohne die Punkte auf der waagerechten Randgeraden. $S(-2|1)$. S gehört nicht zu L .



L ist die Menge der Punkte des grauen Feldes einschließlich der Punkte auf der waagerechten Randgeraden, aber ohne die Punkte auf der senkrechten Randgeraden. $S(1, 5|-1, 5)$. S gehört nicht zu L .

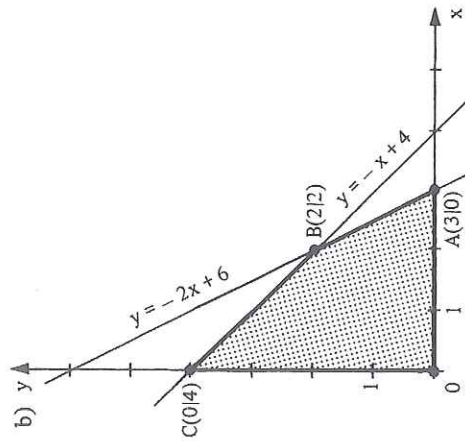
2. a) $x < 0$
 $\wedge y < 0$ (ohne x-Achse und y-Achse)

3. a)



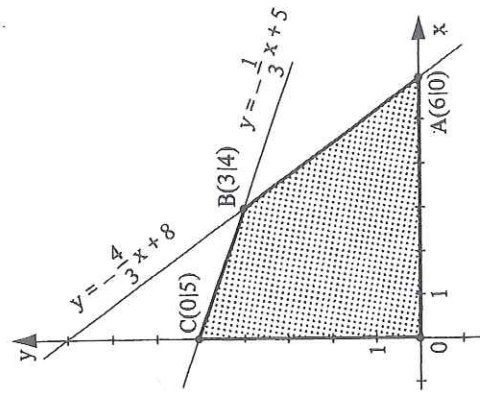
Die Lösungsmenge ist das Innere und der Rand des Dreiecks OAB.
 A(4|0); B(0|4)

b) $x > 0$
 $\wedge y < 0$ (ohne x-Achse und y-Achse)



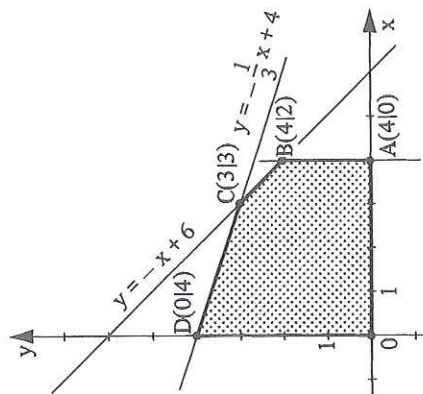
Die Lösungsmenge ist das Innere und der Rand des Vierecks OABC

4. a)



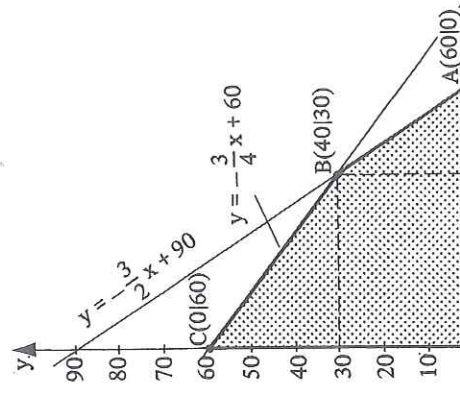
Die Lösungsmenge ist das Innere und der Rand des Vierecks OABC.
 A(6|0); B(3|4); C(0|5)

b)



Die Lösungsmenge ist das Innere und der Rand des Fünfecks OABCD.
 A(4|0); B(4|2); C(3|3); D(0|4)

5. a)



Die Lösungsmenge ist das Innere und der Rand des Vierecks OABC.
 A(60|0); B(40|30); C(0|60)

2. a) Stück B Δ y

x Stück von A; y Stück von B.
Für die Stückzahlen gilt:
 $x \geq 0; y \geq 0$
Für die Einkaufssumme gilt:
 $x \cdot 150 \text{ EUR} + y \cdot 120 \text{ EUR} \leq 12000 \text{ EUR}$
 $150x + 120y \leq 12000$
 $120y \leq -150x + 12000$
 $y \leq -\frac{5}{4}x + 100$

Ungleichungssystem:
 $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -\frac{5}{4}x + 100$

Zur Lösungsmenge des Systems gehören alle Zahlenpaare $(x; y)$, deren Bildpunkte im Innern und auf dem Rand des Lösungsrecks OPQ liegen. $P(80 | 0), Q(0 | 100)$.

b) Zur Lösungsmenge gehören $(35 | 50), (40 | 40), (45 | 40), (50 | 30)$.
Zur Lösungsmenge gehören nicht $(35 | 60), (45 | 50), (50 | 40)$.

Stück von A	x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Stück von B	y	100	85	75	60	50	35	25	10	0

3. a) Stück B Δ y

x Stück von A; y Stück von B.
Für die Stückzahlen gilt:
 $x \geq 0; y \geq 0$
Für die Belastung der Automaten gilt:
 $x \cdot 3 \text{ Min.} + y \cdot 2 \text{ Min.} \leq 420 \text{ Min.}$
 $3x + 2y \leq 420$
 $y \leq -\frac{3}{2}x + 210$
 $x \cdot 1,5 \text{ Min.} + y \cdot 3 \text{ Min.} \leq 390 \text{ Min.}$
 $1,5x + 3y \leq 390$
 $y \leq -\frac{1}{2}x + 130$

Ungleichungssystem:
 $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -\frac{3}{2}x + 210 \wedge y \leq -\frac{1}{2}x + 130$

b) Zur Lösungsmenge gehören $(80; 80), (90; 70), (100; 60)$.
Zur Lösungsmenge gehören nicht $(60; 110), (70; 100), (110; 50)$.

c) Produktionsplan:

Stück von A	x	0	20	40	60	80	100	120	140
Stück von B	y	130	120	110	100	90	60	30	0
Min. A: Aut. I	3	0	60	120	180	240	300	360	420
Aut. II	1,5	0	30	60	90	120	150	180	210
Min. B: Aut. I	2	260	240	220	200	180	120	60	0
Aut. II	3	390	360	330	300	270	180	90	0
Min. Gesamtzeit:									
Aut. I		260	300	340	380	420	420	420	420
Aut. II		390	390	390	390	390	330	270	210

d) Volle Ausnutzung beider Automaten bei $(80; 90)$. Automat I ist am schlechtesten ausgenutzt mit 260 Minuten bei $(0; 130)$, Automat II mit 210 Minuten bei $(140; 0)$

4. a) Stück B Δ y

x Stück von A; y Stück von B.
Für die Stückzahlen gilt:
 $x \geq 0; y \geq 0$
Für die tägliche Belastung der Automaten gilt:
 $x \cdot 6 \text{ Min.} + y \cdot 3 \text{ Min.} \leq 420 \text{ Min.}$
 $6x + 3y \leq 420$
 $y \leq -2x + 140$
 $x \cdot 4 \text{ Min.} + y \cdot 5 \text{ Min.} \leq 400 \text{ Min.}$
 $4x + 5y \leq 400$
 $y \leq -\frac{4}{5}x + 80$
Ungleichungssystem:
 $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -2x + 140$
 $\wedge y \leq -\frac{4}{5}x + 80$
Lösungsviereck: OPQR mit $P(70|0), Q(50|40), R(0|80)$.

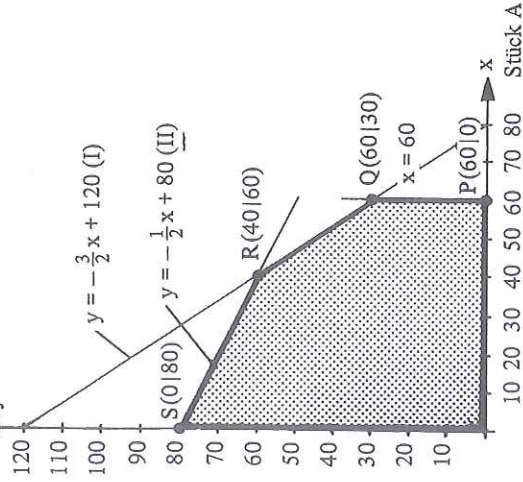
b) Zur Lösungsmenge gehören $(45; 40), (55; 30)$.
Zur Lösungsmenge gehören nicht $(30; 60), (40; 50), (60; 25)$.

c) Produktionsplanung:

Stück von A	x	0	10	20	30	40	50	60	70
Stück von B	y	80	72	64	56	48	40	20	0
Min. A: Aut. I	6	0	60	120	180	240	300	360	420
Aut. II	4	0	40	80	120	160	200	240	280
Min. B: Aut. I	3	240	216	192	168	144	120	60	0
Aut. II	5	400	360	320	280	240	200	100	0
Min. Gesamtzeit:									
Aut. I	240	276	312	348	384	420	420	420	420
Aut. II	400	400	400	400	400	400	400	340	280

d) Volle Ausnutzung beider Automaten bei (50; 40). Automat I ist am schlechtesten ausgenutzt mit 240 Minuten bei (0; 80), Automat II mit 280 Minuten bei (70; 0).

5. a) Stück B y



Ungleichungssystem:

$$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -\frac{3}{2}x + 120 \wedge y \leq -\frac{1}{2}x + 80 \wedge x \leq 60$$

Lösungsfünfeck OPQRS mit P(60|0), Q(60|30), R(40|60), S(0|80).

b) Automat I und II sind voll ausgenutzt bei (40; 60).
Automat I und III sind voll ausgenutzt bei (60; 30).

c) Produktionsplan:

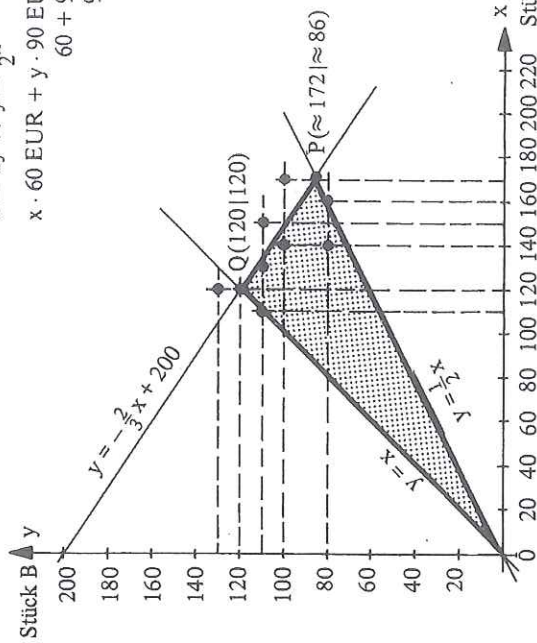
Stück von A	x	0	10	20	30	40	50	60
Stück von B	y	80	75	70	65	60	45	30
Min. A: Aut. I	6	0	60	120	180	240	300	360
Aut. II	3	0	30	60	90	120	150	180
Aut. III	5	0	50	100	150	200	250	300
Min. B: Aut. I	4	320	300	280	260	240	180	120
Aut. II	6	480	450	420	390	360	270	180
Min. Gesamtzeit: Aut. I		320	360	400	440	480	480	480
Aut. II		480	480	480	480	480	420	360
Aut. III		0	50	100	150	200	250	300

6. a)

x Stück von A; y Stück von B

$$\begin{aligned} x &\geq 0; y \geq 0; \\ x &\geq y \Leftrightarrow y \leq x \\ x &\leq 2y \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot 60 \text{ EUR} + y \cdot 90 \text{ EUR} &\leq 18000 \text{ EUR} \\ 60 + 90y &\leq 18000 \\ 90y &\leq -60x + 18000 \\ y &\leq -\frac{2}{3}x + 200 \end{aligned}$$



Ungleichungssystem:

$$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq x \wedge y \geq \frac{1}{2}x \wedge y \leq -\frac{2}{3}x + 200$$

Zur Lösungsmenge des Systems gehören alle Zahlenpaare, deren Bildpunkte im Innern und auf dem Rand des Dreiecks OPQ liegen. P(172|86), Q(120|120).

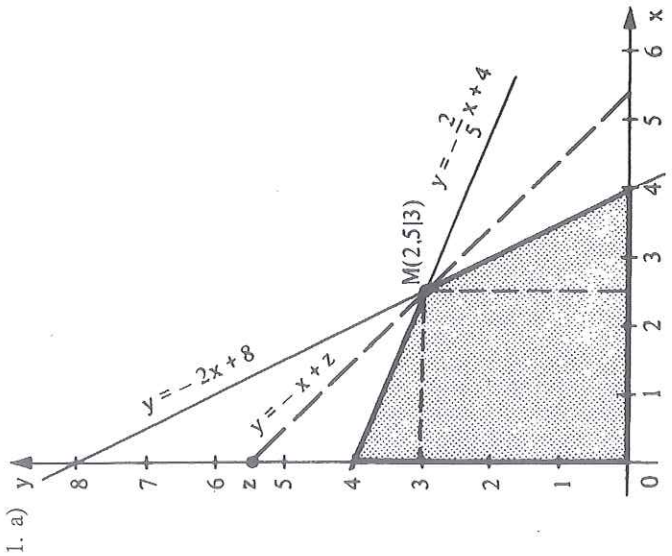
b) Zur Lösungsmenge gehören (110|110), (140|100), (160|80).

c)	x Stück von A	x	100	120	150	160
	y Stück von B	y	100	120	100	90
	EUR von A	60	6000	7200	9000	9600
	EUR von B	90	9000	10800	9000	8100
	EUR Gesamtsumme		15000	18000	18000	17700

8.6.4 Lineare Optimierung mit zwei Variablen

Die lineare Optimierung ist ein verhältnismäßig junger Zweig der modernen Mathematik. Sie wurde im Jahre 1939 von dem russischen Mathematiker L. W. Kantorowitsch begründet. Eine allgemeine Lösungsmethode, die Simplexmethode, entwickelte der Amerikaner G. B. Dantzig im Jahre 1947.

Die in der Praxis vorkommenden Optimierungsprobleme enthalten meist zahlreiche Variablen. Die Lösung solcher Probleme erfordert einen großen Rechenaufwand, der im Allgemeinen nur mit elektronischen Rechenanlagen zu bewältigen ist. Bereits im Jahre 1956 wurden mithilfe einer Großrechenanlage Probleme mit mehr als 200 Gleichungen und 1000 Variablen mit großer Genauigkeit berechnet.



$$z = x + y \Leftrightarrow y = -x + z$$

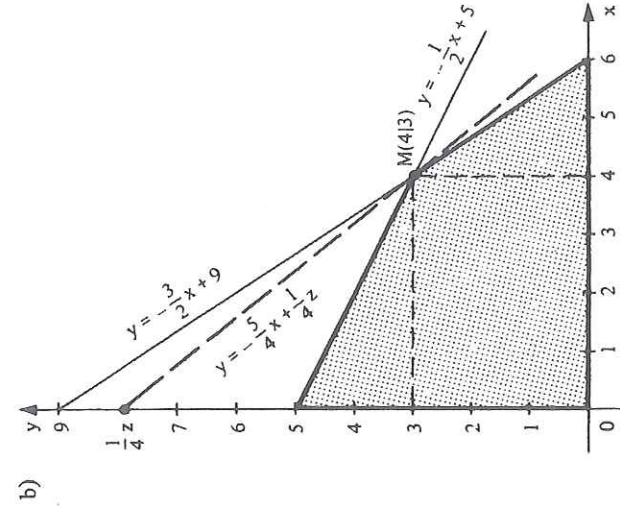
$$2x + 5y \leq 20 \Leftrightarrow y \leq -\frac{2}{5}x + 4$$

$$2x + y \leq 8 \Leftrightarrow y \leq -2x + 8$$

Das Maximum liegt im Punkt $M(2,5|3)$.

$$x = 2,5; y = 3$$

$$z_{\max} = 2,5 + 3 = 5,5$$



$$z = 5x + 4y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}z$$

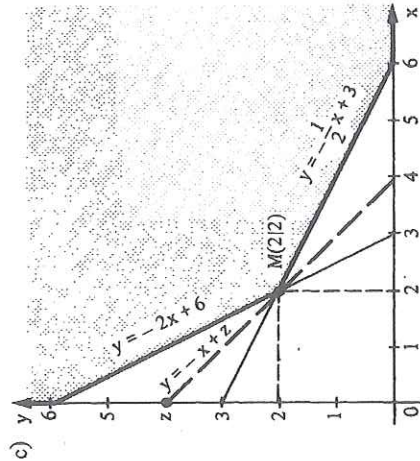
$$3x + 2y \leq 18 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 9$$

$$x + 2y \leq 10 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + 5$$

Das Maximum liegt im Punkt $M(4|3)$.

$$x = 4; y = 3$$

$$z_{\max} = 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 32$$



$$z = x + y \Leftrightarrow y = -x + z$$

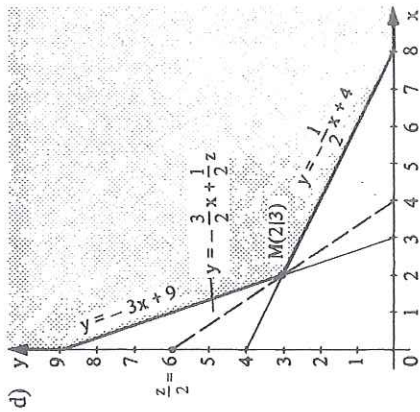
$$2x + y \geq 6 \Leftrightarrow y \geq -2x + 6$$

$$x + 2y \geq 6 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}x + 3$$

Das Minimum liegt im Punkt $M(2|2)$.

$$x = 2; y = 2$$

$$z_{\min} = 2 + 2 = 4$$



$$z = 3x + 2y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z$$

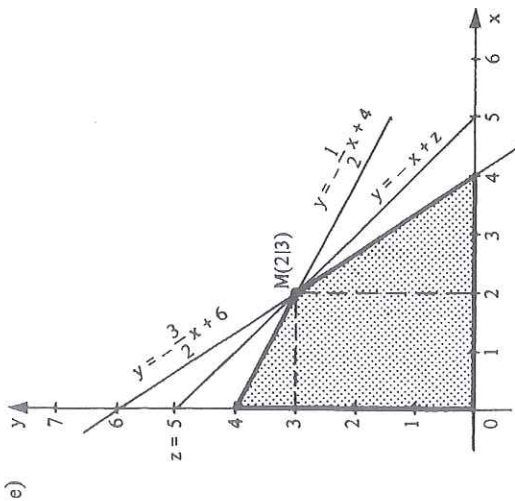
$$3x + y \geq 9 \Leftrightarrow y \geq -3x + 9$$

$$x + 2y \geq 8 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}x + 4$$

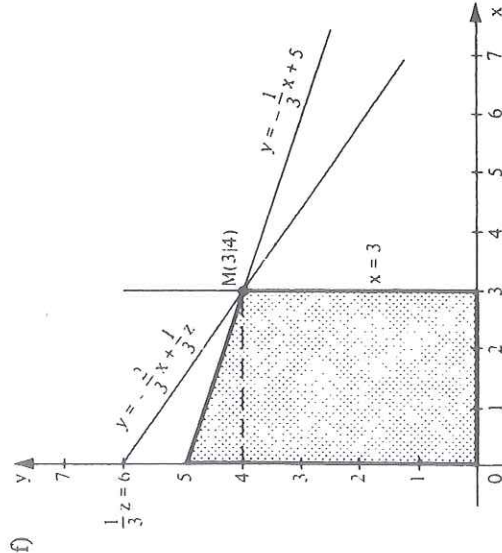
Das Minimum liegt im Punkt $M(2|3)$.

$$x = 3; y = 2$$

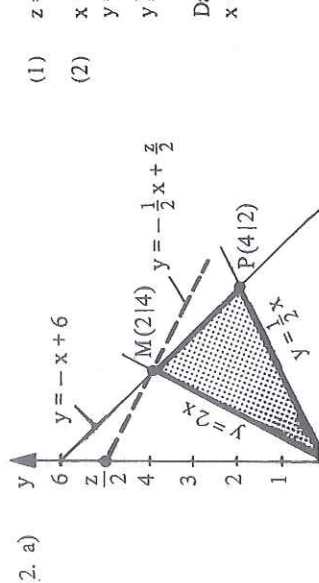
$$z_{\min} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$$



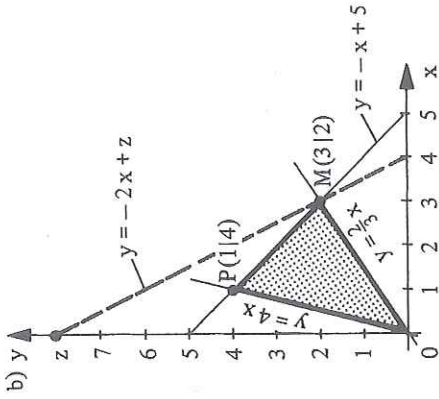
$z = x + y \Leftrightarrow y = -x + z$
 $3x + 2y \leq 12 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 6$
 $x + 2y \leq 8 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + 4$
 Das Maximum liegt im Punkt $M(2|3)$.
 $x = 2; y = 3$
 $z_{\max} = 2 + 3 = 5$



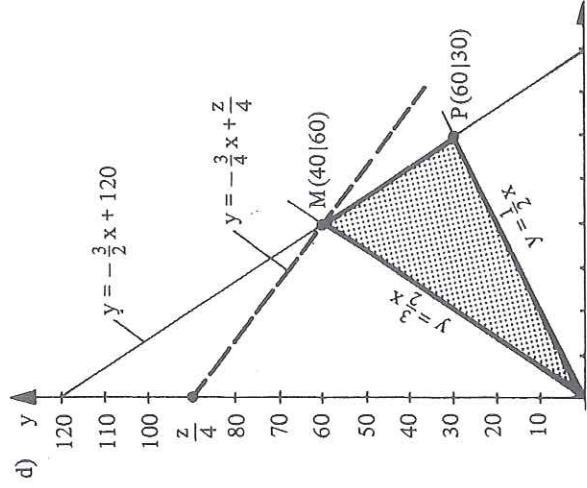
$z = 2x + 3y \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z$
 $x + 3y \leq 15 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{3}x + 5$
 $x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$
 Das Maximum liegt im Punkt $M(3|4)$.
 $x = 3; y = 4$.
 $z_{\max} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$



(1) $z = x + 2y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$
 (2) $x + y \leq 6 \Leftrightarrow y \leq -x + 6$
 $y \leq 2x$
 $y \geq \frac{1}{2}x$
 Das Maximum liegt im Punkt $M(2|4)$.
 $x = 2; y = 4; z_{\max} = 2 + 2 \cdot 4 = 10$

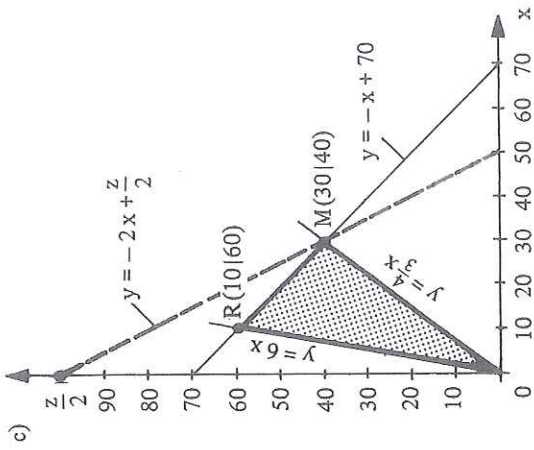


(1) $z = 2x + y \Leftrightarrow y = -2x + z$
 (2) $x + y \leq 5 \Leftrightarrow y \leq -x + 5$
 $x \geq \frac{1}{4}y \Leftrightarrow y \leq 4x$
 $x \leq \frac{3}{2}y \Leftrightarrow y \geq \frac{2}{3}x$
 Das Maximum liegt im Punkt $M(3|2)$.
 $x = 3; y = 2; z_{\max} = 2 \cdot 3 + 2 = 8$

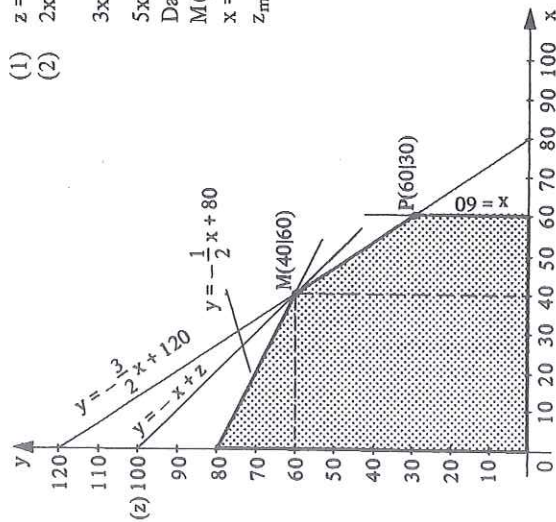


(1) $z = 4x + 2y \Leftrightarrow y = -2x + \frac{z}{2}$
 (2) $x + y \leq 70 \Leftrightarrow y \leq -x + 70$
 $y \geq \frac{4}{3}x$
 $y \leq 6x$
 Das Maximum liegt im Punkt $M(30|40)$.
 $x = 30; y = 40$
 $z_{\max} = 4 \cdot 30 + 2 \cdot 40 = 200$

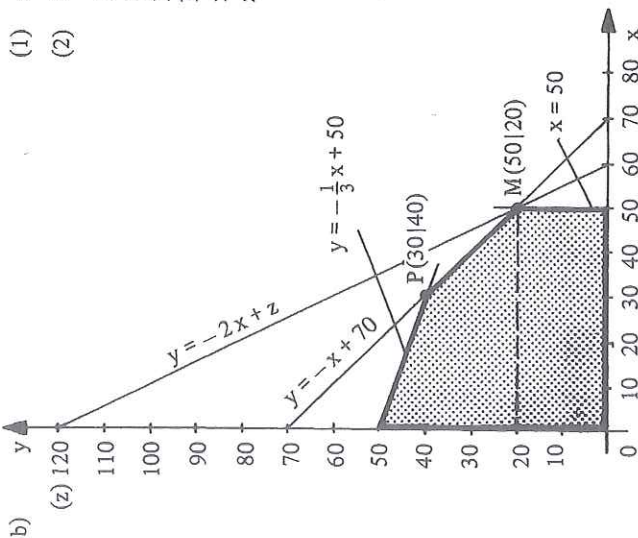
(1) $z = 3x + 4y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{z}{4}$
 (2) $3x + 2y \leq 240 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 120$
 $x \geq \frac{2}{3}y \Leftrightarrow y < \frac{3}{2}x$
 $x \leq 2y \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2}x$
 Das Maximum liegt im Punkt $M(40|60)$.



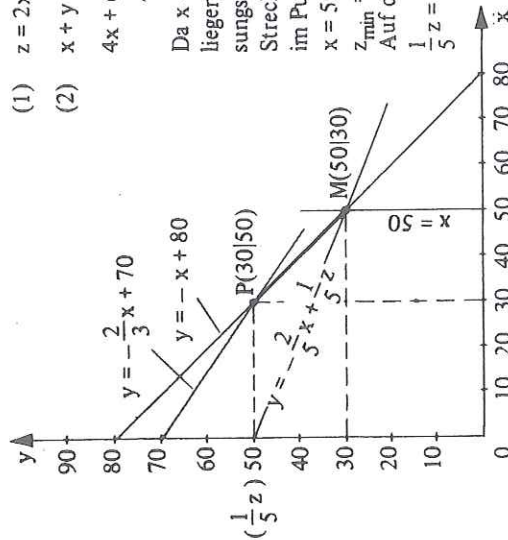
3. a)
- (1) $z = x + y \Leftrightarrow y = -x + z$
 (2) $2x + 4y \leq 320 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + 80$
 $3x + 2y \leq 240 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 120$
 $5x \leq 300 \Leftrightarrow x \leq 60$
 Das Maximum liegt im Punkt $M(40|60)$.
 $x = 40; y = 60$
 $z_{\max} = 40 + 60 = 100$



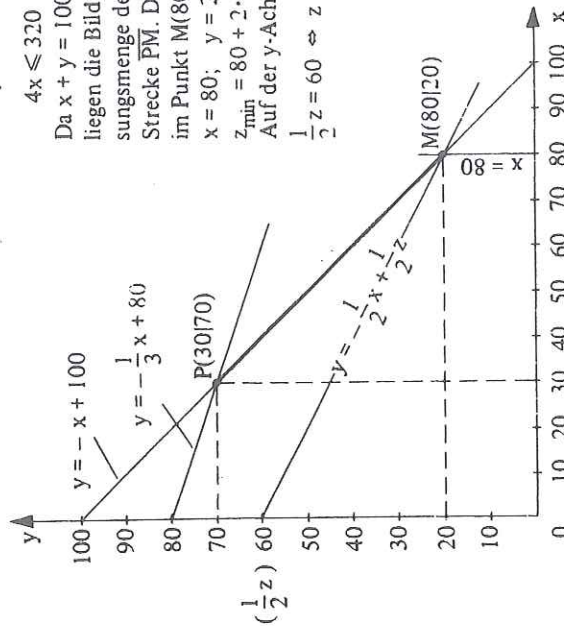
- b)
- (1) $z = 2x + y \Leftrightarrow y = -2x + z$
 (2) $2x + 6y \leq 300 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{3}x + 50$
 $5x + 5y \leq 350 \Leftrightarrow y \leq -x + 70$
 $6x \leq 300 \Leftrightarrow x \leq 50$
 Das Maximum liegt im Punkt $M(50|20)$.
 $x = 50; y = 20$
 $z_{\max} = 2 \cdot 50 + 20 = 120$



- c)
- (1) $z = 2x + 5y \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}z$
 (2) $x + y = 80 \Leftrightarrow y = -x + 80$
 $4x + 6y \leq 420 \Leftrightarrow y \leq -\frac{2}{3}x + 70$
 $7x \leq 350 \Leftrightarrow x \leq 50$
 Da $x + y = 80$ eine Gleichung ist, liegen die Bildpunkte der Lösungsmenge des Systems auf der Strecke \overline{PM} . Das Minimum liegt im Punkt $M(50|30)$.
 $x = 50; y = 30$.
 $z_{\min} = 2 \cdot 50 + 5 \cdot 30 = 250$
 Auf der y-Achse:
 $\frac{1}{5}z = 50 \Leftrightarrow z = 250$



- d)
- (1) $z = x + 2y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$
 (2) $x + y = 100 \Leftrightarrow y = -x + 100$
 $x + 3y \leq 240 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{3}x + 80$
 $4x \leq 320 \Leftrightarrow x \leq 80$
 Da $x + y = 100$ eine Gleichung ist, liegen die Bildpunkte der Lösungsmenge des Systems auf der Strecke \overline{PM} . Das Minimum liegt im Punkt $M(80|20)$.
 $x = 80; y = 20$.
 $z_{\min} = 80 + 2 \cdot 20 = 120$
 Auf der y-Achse:
 $\frac{1}{2}z = 60 \Leftrightarrow z = 120$



4. x Stück von A, y Stück von B, z EUR Gesamtgewinn.

(1) Zielfunktion: $z = 7x + 6y \Leftrightarrow y = -\frac{7}{6}x + \frac{z}{6}$

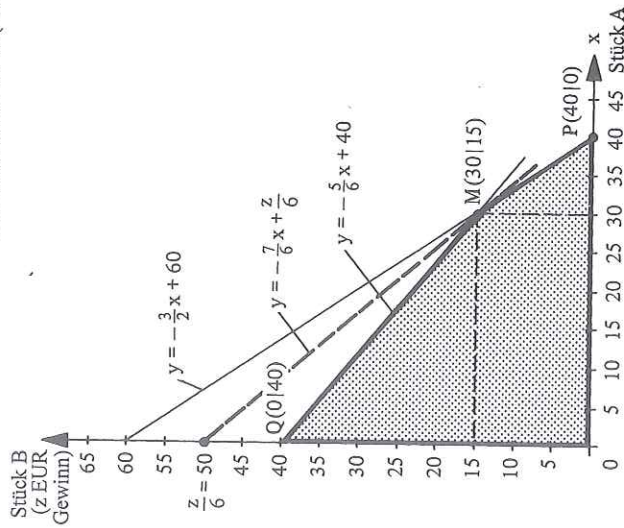
(2) Nebenbedingungen:
Stückzahlen:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Ausnutzung W I: $24x + 16y \leq 960 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 60$

Ausnutzung W II: $15x + 18y \leq 720 \Leftrightarrow y \leq -\frac{5}{6}x + 40$

Lösungsviereck OPMQ mit P(40|0), M(30|15), Q(0|40).
Gewinnmaximum M(30|15). 30 Stück von A, 15 Stück von B.



Arbeitszeiten für M(30|15):

W I: 30 Stück je 24 Min. + 15 Stück je 16 Min. = 960 Min.

W II: 30 Stück je 15 Min. + 15 Stück je 18 Min. = 720 Min.

Gewinn für M(30|15):

30 Stück je 7,00 EUR = 210,00 EUR

15 Stück je 6,00 EUR = 90,00 EUR

300,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{z}{6} = 50 \Leftrightarrow z = 300$

5. x Stück von A, y Stück von B, z EUR Gesamtgewinn.

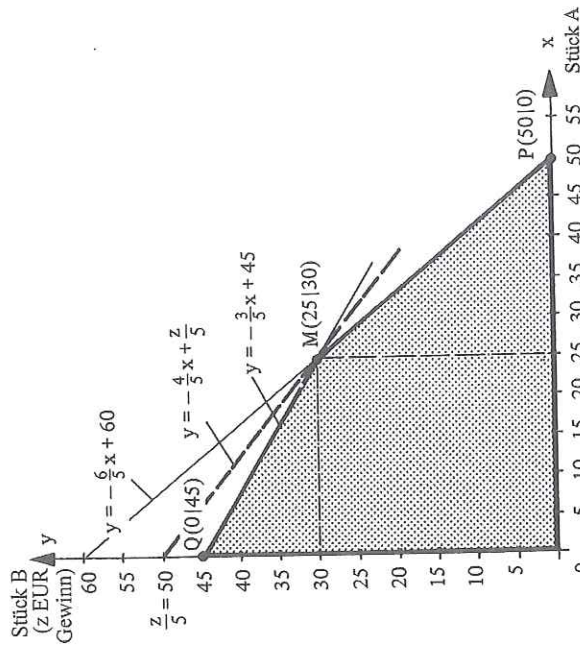
(1) Zielfunktion: $z = 4x + 5y \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{z}{5}$

(2) Nebenbedingungen:
Stückzahlen:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Ausnutzung W I: $12x + 10y \leq 600 \Leftrightarrow y \leq -\frac{6}{5}x + 60$

Ausnutzung W II: $9x + 15y \leq 675 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{5}x + 45$



Lösungsviereck OPMQ mit P(50|0), M(25|30), Q(0|45).
Gewinnmaximum M(25|30). 25 Stück von A, 30 Stück von B.

Arbeitszeiten für M(25|30):

W I:

25 Stück je 12 Min. + 30 Stück je 10 Min. = 600 Min.

W II:

25 Stück je 9 Min. + 30 Stück je 15 Min. = 675 Min.

25 Stück je 4,00 EUR = 100,00 EUR

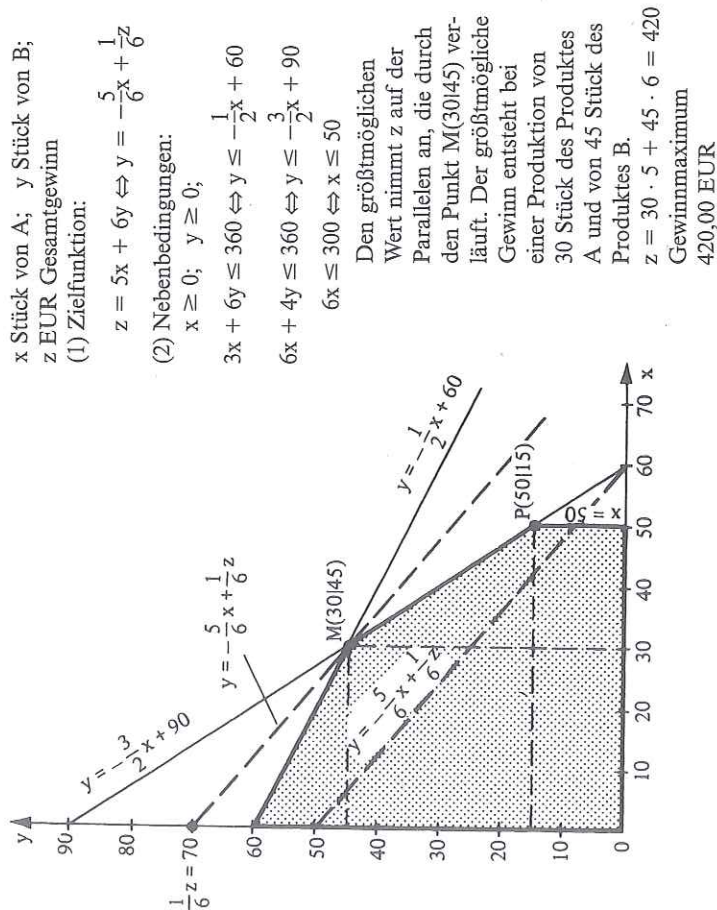
30 Stück je 5,00 EUR = 150,00 EUR

250,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{z}{5} = 50 \Leftrightarrow z = 250$

	A		B		Verfügbare Zeit
	je Stück	x Stück	je Stück	y Stück	
I	3 Min.	x Stück	6 Min.	y Stück	360 Min.
II	6 Min.	x Stück	4 Min.	y Stück	360 Min.
III	6 Min.	x Stück	-	-	300 Min.
	5,00 EUR	x Stück	6,00 EUR	y Stück	

6.



Produktionsplan:

	A	B	insgesamt
I	30 Stück in 90 Min.	45 Stück in 270 Min.	360 Min.
II	30 Stück in 180 Min.	45 Stück in 180 Min.	360 Min.
III	30 Stück in 180 Min.	-	180 Min.

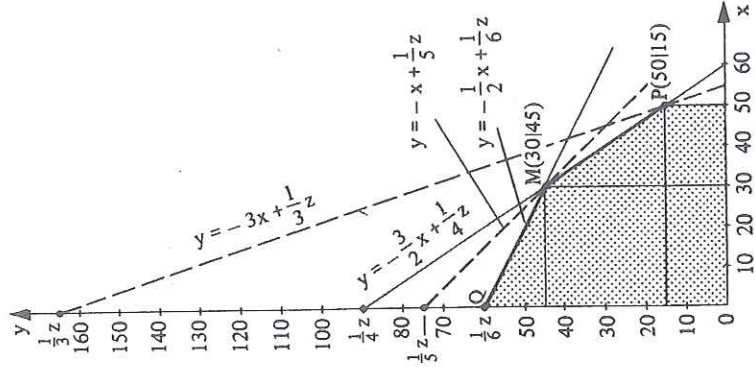
Der Automat III wird nicht voll ausgenutzt. Im Punkt $P(50|15)$ entsteht ein geringerer Gewinn, obwohl die Automaten II und III voll ausgenutzt werden:

	A	B	insgesamt
I	50 Stück in 150 Min.	15 Stück in 90 Min.	240 Min.
II	50 Stück in 300 Min.	15 Stück in 60 Min.	360 Min.
III	50 Stück in 300 Min.	-	300 Min.

$z = 50 \cdot 5 + 15 \cdot 6 = 340$

7.

- a) $z = 5x + 5y \Leftrightarrow y = -x + \frac{1}{5}z$
 Gewinnmaximum $M(30|45)$
 A: 30 Stück je 5,00 EUR = 150,00 EUR
 B: 45 Stück je 5,00 EUR = 225,00 EUR
 375,00 EUR
 Auf der y-Achse: $\frac{1}{5}z = 75 \Leftrightarrow z = 375$
- b) $z = 3x + 6y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}z$
 Lösungsmenge des Optimums sind alle Zahlenpaare, deren Bildpunkte auf der Strecke QM liegen.
 Einige Möglichkeiten:
 A: 0 Stück
 B: 60 Stück je 6,00 EUR = 360,00 EUR
 A: 20 Stück je 3,00 EUR = 60,00 EUR
 B: 50 Stück je 6,00 EUR = 300,00 EUR
 360,00 EUR
 A: 30 Stück je 3,00 EUR = 90,00 EUR
 B: 45 Stück je 6,00 EUR = 270,00 EUR
 360,00 EUR
 Auf der y-Achse: $\frac{1}{6}z = 60 \Leftrightarrow z = 360$

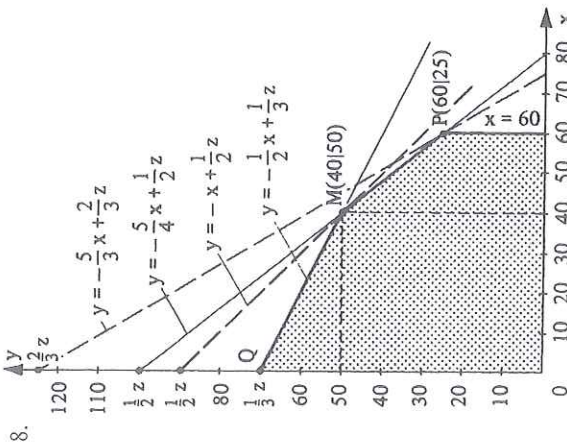


- c) $z = 6x + 4y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}z$
 Lösungsmenge des Optimums sind alle Zahlenpaare, deren Bildpunkte auf der Strecke MP liegen.

Einige Möglichkeiten:

- A: 30 Stück je 6,00 EUR = 180,00 EUR
- B: 45 Stück je 4,00 EUR = 180,00 EUR
- 360,00 EUR
- A: 40 Stück je 6,00 EUR = 240,00 EUR
- B: 30 Stück je 4,00 EUR = 120,00 EUR
- 360,00 EUR
- A: 50 Stück je 6,00 EUR = 300,00 EUR
- B: 15 Stück je 4,00 EUR = 60,00 EUR
- 360,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{4}z = 90 \Leftrightarrow z = 360$



8.

- a) $z = 2x + 2y \Leftrightarrow y = -x + \frac{1}{2}z$
 Gewinnmaximum M(40|50)
 A: 40 Stück je 2,00 EUR = 80,00 EUR
 B: 50 Stück je 2,00 EUR = 100,00 EUR
 180,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{2}z = 90 \Leftrightarrow z = 180$

- b) $z = 1,5x + 3y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}z$
 Lösungsmenge des Optimums sind alle Zahlenpaare, deren Bildpunkte auf der Strecke QM liegen.
 Einige Möglichkeiten:

- A: 0 Stück
- B: 70 Stück je 3,00 EUR = 210,00 EUR
- A: 20 Stück je 1,50 EUR = 30,00 EUR
- B: 60 Stück je 3,00 EUR = 180,00 EUR
- 210,00 EUR
- A: 40 Stück je 1,50 EUR = 60,00 EUR
- B: 50 Stück je 3,00 EUR = 150,00 EUR
- 210,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{3}z = 70 \Leftrightarrow z = 210$

- c) $z = 2,5x + 2y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}z$

Lösungsmenge des Optimums sind alle Zahlenpaare, deren Bildpunkte auf der Strecke MP liegen.

- Einige Möglichkeiten:
 A: 40 Stück je 2,50 EUR = 100,00 EUR
 B: 50 Stück je 2,00 EUR = 100,00 EUR
 200,00 EUR
 A: 60 Stück je 2,50 EUR = 150,00 EUR
 B: 25 Stück je 1,50 EUR = 37,50 EUR
 187,50 EUR

9.

	A		B		Vorrat
I	0,15 E	x Stück	0,2 E	y Stück	60 E
II	0,2 E	x Stück	0,1 E	y Stück	40 E
	25,00 EUR	x Stück	20,00 EUR	y Stück	

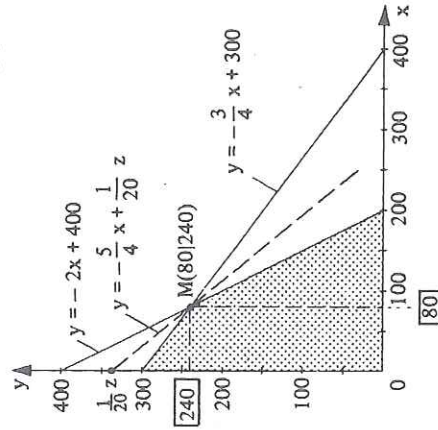
Gesamtgewinn: $(25x + 20y)$ EUR

(1) Zielfunktion: $z = 25x + 20y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{20}z$

(2) Nebenbedingungen:
 Stückzahl: $x \geq 0; y \geq 0$

Materialverbrauch I: $0,15x + 0,2y \leq 60 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{4}x + 300$

Materialverbrauch II: $0,2x + 0,1y \leq 40 \Leftrightarrow y \leq -2x + 400$



Gewinnmaximum M(80|240). 80 Stück von A und 240 Stück von B.

A: 80 Stück je 25,00 EUR = 2000,00 EUR

B: 240 Stück je 20,00 EUR = 4800,00 EUR

6800,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{20}z = 340 \Leftrightarrow z = 6800$

Kontrollrechnung:

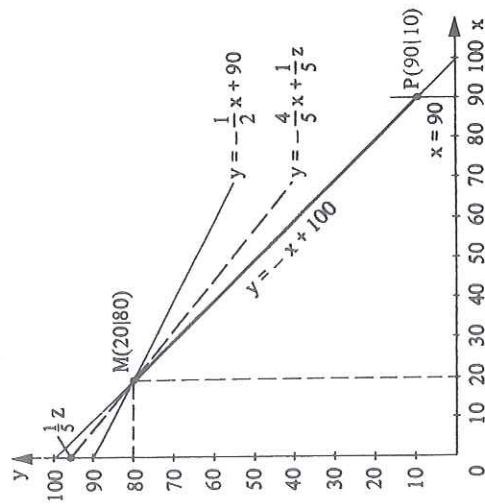
Holzart I: $80 \cdot 0,15 \text{ E} + 240 \cdot 0,2 \text{ E} = 12 \text{ E} + 48 \text{ E} = 60 \text{ E}$

Holzart II: $80 \cdot 0,2 \text{ E} + 240 \cdot 0,1 \text{ E} = 16 \text{ E} + 24 \text{ E} = 40 \text{ E}$

A		B		Verfügbare Zeit	
I	5 Min.	x Stück	10 Min.	y Stück	900 Min.
II	8 Min.	x Stück			720 Min.
	4,00 EUR	x Stück	5,00 EUR	y Stück	insgesamt 100 Stück

x Stück nach Verfahren A, y Stück nach Verfahren B, z EUR Gesamtgewinn.

- (1) Zielfunktion: $z = 4x + 5y \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}z$
- (2) Nebenbedingungen:
 Mindeststückzahl von A: $x \geq 0$
 Mindeststückzahl von B: $y \geq 0$
 Gesamtstückzahl: $x + y = 100 \Leftrightarrow y = -x + 100$ (ist eine Gleichung)
 Belastung von I: $5x + 10y \leq 900 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + 90$
 Belastung von II: $8x \leq 720 \Leftrightarrow x \leq 90$



Zur Lösungsmenge gehören die Bildpunkte, die auf der Strecke \overline{MP} liegen. Da $x + y = 100$ eine Gleichung ist, bildet der Durchschnitt der einzelnen Lösungsmengen kein Flächenstück.

Gewinnmaximum $M(20|80)$. 20 Stück nach Verfahren A und 80 Stück nach Verf. B.

A: 20 Stück je 4,00 EUR = 80,00 EUR

B: 80 Stück je 5,00 EUR = 400,00 EUR

480,00 EUR

Herstellungszeiten für (20; 80):

Automat I: $20 \cdot 5 \text{ Min.} + 80 \cdot 10 \text{ Min.} = 900 \text{ Min.}$

Automat II: $20 \cdot 8 \text{ Min.} = 160 \text{ Min.}$

Automat I ist voll ausgenutzt, Automat II nur mit 160 Minuten.

Herstellungszeiten für (90; 10):

Automat I: $90 \cdot 5 \text{ Min.} + 10 \cdot 10 \text{ Min.} = 550 \text{ Min.}$

Automat II: $90 \cdot 8 \text{ Min.} = 720 \text{ Min.}$

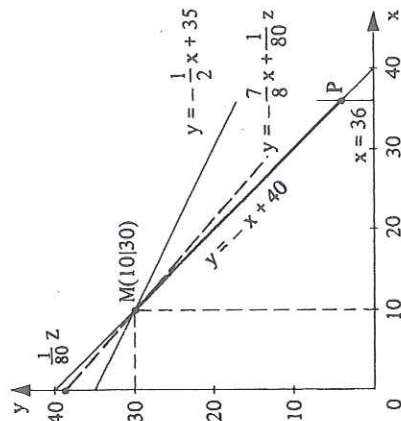
Automat II ist voll ausgenutzt, Automat I nur mit 550 Minuten.

11.

A		B		Verfügbare Zeit	
I	3 Std.	x Stück	6 Std.	y Stück	210 Std.
II	5 Std.	x Stück			180 Std.
	70,00 EUR	x Stück	80,00 EUR	y Stück	insgesamt 40 Stück

x Stück nach Verfahren A, y Stück nach Verfahren B, z EUR Gesamtgewinn

- (1) Zielfunktion: $z = 70x + 80y \Leftrightarrow y = -\frac{7}{8}x + \frac{1}{80}z$
- (2) Nebenbedingungen:
 Mindeststückzahl von A: $x \geq 0$
 Mindeststückzahl von B: $y \geq 0$
 Gesamtstückzahl: $x + y = 40 \Leftrightarrow y = -x + 40$ (ist eine Gleichung)
 Belastung von I: $3x + 6y \leq 210 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + 35$
 Belastung von II: $5x \leq 180 \Leftrightarrow x \leq 36$



Zur Lösungsmenge gehören die Bildpunkte, die auf der Strecke \overline{MP} liegen. Da $x + y = 40$ eine Gleichung ist, bildet der Durchschnitt der einzelnen Lösungsmengen kein Flächenstück.

Gewinnmaximum $M(10|30)$.

10 Stück nach Verfahren A und 30 Stück nach Verfahren B.

A: 10 Stück je 70,00 EUR = 700,00 EUR

B: 30 Stück je 80,00 EUR = 2400,00 EUR

3100,00 EUR

Auf der y-Achse (nicht genau ablesbar): $\frac{1}{80}z = 38,75 \Leftrightarrow z = 3100$

Herstellungszeiten für (10; 30):

Maschine I: $10 \cdot 3 \text{ Std.} + 30 \cdot 6 \text{ Std.} = 210 \text{ Std.}$

Maschine II: $10 \cdot 5 \text{ Std.} = 50 \text{ Std.}$

Maschine I ist voll ausgenutzt, Maschine II nur mit 50 Stunden.

Herstellungszeiten für (36; 4):

Maschine I: $36 \cdot 3 \text{ Std.} + 4 \cdot 6 \text{ Std.} = 132 \text{ Std.}$

Maschine II: $36 \cdot 5 \text{ Std.} = 180 \text{ Std.}$

Maschine II ist voll ausgenutzt, Maschine I nur mit 132 Stunden.

12. x Tage für A, y Tage für B, z EUR Gesamteinnahme.

A		B	
10 Stück je Tag	x Tage	20 Stück je Tag	y Tage
5000,00 EUR je St.		3000,00 EUR je St.	
			100 Tage Gesamtzeit
			1400 St. Höchstabsatz

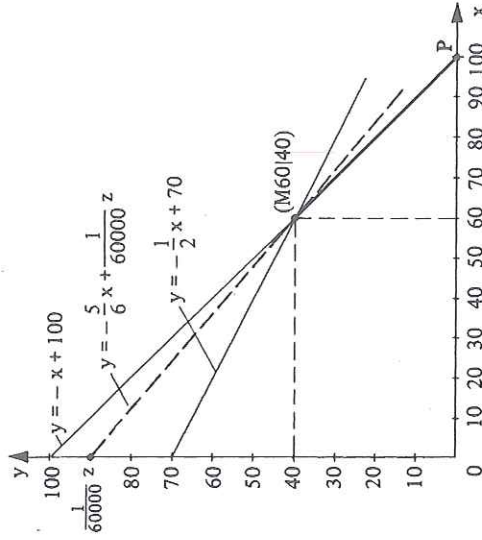
Gesamteinnahme: z EUR = $(10 \cdot x \cdot 5000 + 20 \cdot y \cdot 3000)$ EUR

(1) Zielfunktion: $z = 50000x + 60000y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{60000}z$

(2) Nebenbedingungen:

Arbeitstage: $x + y = 100 \Leftrightarrow y = -x + 100; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$

Stückzahl: $10x + 20y \leq 1400 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + 70$



Zur Lösungsmenge gehören die Bildpunkte, die auf der Strecke \overline{MP} liegen. Da $x + y = 100$ eine Gleichung ist, bildet die Punktmenge kein Flächenstück. Maximum $M(60|40)$. 60 Tage für Modell A und 40 Tage für Modell B.

Tage	Stück je Tag	Stück insgesamt	EUR je Stück	Gesamtwert in EUR
A	10	600	5000	3000000
B	20	800	3000	2400000
		1400		5400000

Auf der y-Achse: $\frac{1}{60000}z = 90 \Leftrightarrow z = 5400000$

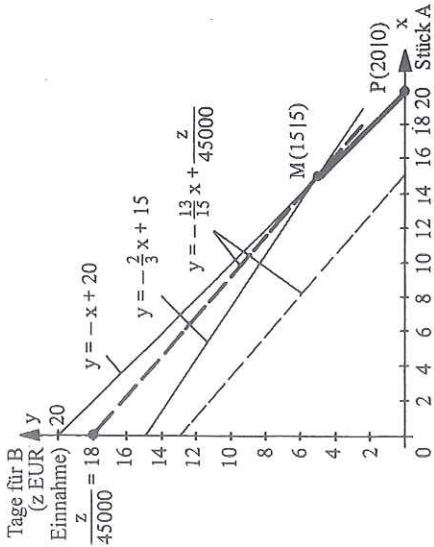
13. x Tage für A, y Tage für B, z EUR Gesamteinnahme.

A		B	
40 Stück je Tag	x Tage	60 Stück je Tag	y Tage
975,00 EUR je Stück		750,00 EUR je Stück	
			20 Tage Gesamtzeit
			900 St. Höchstabsatz

(1) Zielfunktion: z EUR = $(40 \cdot x \cdot 975 + 60 \cdot y \cdot 750)$ EUR

$z = 39000x + 45000y \Leftrightarrow y = -\frac{13}{15}x + \frac{z}{45000}$

- (2) Nebenbedingungen: $x \geq 0$
 $y \geq 0$
 Arbeitstage: $x + y = 20 \Leftrightarrow y = -x + 20$
 Stückzahlen: $40x + 60y \leq 900 \Leftrightarrow y \leq -\frac{2}{3}x + 15$



Zur Lösungsmenge gehören die Bildpunkte, die auf der Strecke \overline{MP} liegen. Wegen $x + y = 20$ bildet die Lösungsmenge kein Flächenstück. Maximum $M(15|5)$. 15 Tage für Modell A und 5 Tage für Modell B.

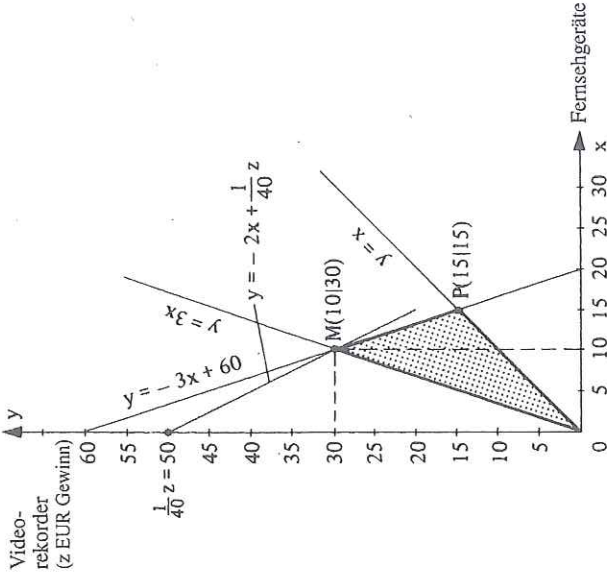
	Tag	Stück je Tag	Stück insgesamt	EUR je Stück	EUR Gesamteinnahme
A	15	40	600	975	585000
B	5	60	300	750	225000
	20		900		810000

Auf der y-Achse: $\frac{z}{45000} = 18 \Leftrightarrow z = 820000$

14. x Fernsehgeräte, y Videorekorder, z EUR Gesamtgewinn.

- (1) Zielfunktion: $z = 80x + 40y \Leftrightarrow y = -2x + \frac{1}{40}z$

- (2) Nebenbedingungen: $x \geq 0, y \geq 0$
 Stückzahlen: $x \geq \frac{1}{3}y \Leftrightarrow y \leq 3x$
 $x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$
 Einkaufspreis: $1050x + 350y \leq 21000 \Leftrightarrow y \leq -3x + 60$



Gewinnmaximum $M(10|30)$, 10 Fernsehgeräte, 30 Videorekorder.
 $10 \cdot 80,00 \text{ EUR} = 800,00 \text{ EUR}$
 $30 \cdot 40,00 \text{ EUR} = 1200,00 \text{ EUR}$
 auf der y-Achse: $\frac{1}{40}z = 50 \Leftrightarrow z = 2000$
 2000,00 EUR

15. x Stück von A, y Stück von B, z EUR Gesamtgewinn.

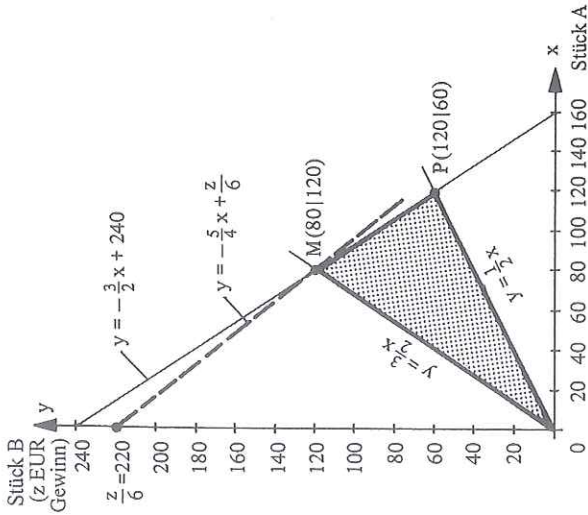
- (1) Zielfunktion: $z = 7,5x + 6y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{z}{6}$
 (2) Nebenbedingungen: $60x + 40y \leq 9600 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 240$

Stückzahlen:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$x \geq \frac{2}{3}y \Leftrightarrow y \leq \frac{3}{2}x$$

$$x \leq 2y \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2}x$$



Gewinnmaximum $M(80|120)$. 80 Stück von A, 120 Stück von B.

Einkaufssumme: 80 Stück je 60,00 EUR = 4800,00 EUR

120 Stück je 40,00 EUR = 4800,00 EUR

9600,00 EUR

Gesamtgewinn:

80 Stück je 7,50 EUR = 600,00 EUR

120 Stück je 6,00 EUR = 720,00 EUR

1320,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{z}{6} = 220 \Leftrightarrow z = 1320$

16. x Stück nach Verfahren A, y Stück nach Verfahren B, z EUR Selbstkosten der Tagesproduktion.

	A		B		Verfügbare Zeit in Min.
	Min./Stück	Stück	Min./Stück	Stück	
I	4	x	3	y	360
II	5	x	0	0	400
III	0	0	6	y	420
	1,50 EUR je Stück	x	2,00 EUR je Stück	y	Tagesproduktion 100 Stück

Selbstkosten der Tagesproduktion: z EUR = $(x \cdot 1,5 + y \cdot 2)$ EUR

(1) Zielfunktion: $z = 1,5x + 2y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}z$

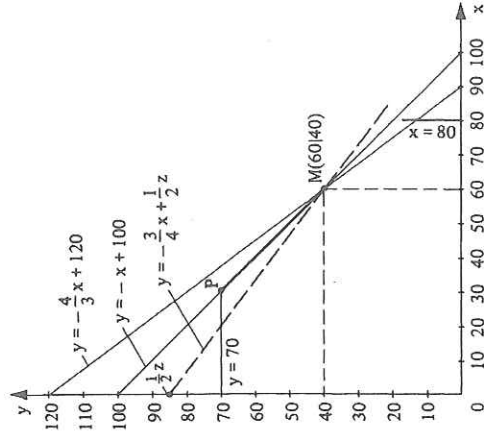
(2) Nebenbedingungen:

Stückzahl: $x \geq 0; y \geq 0; x + y = 100 \Leftrightarrow y = -x + 100$

Belastung I: $4x + 3y \leq 360 \Leftrightarrow y \leq -\frac{4}{3}x + 120$

Belastung II: $5x \leq 400 \Leftrightarrow x \leq 80$

Belastung III: $6y \leq 420 \Leftrightarrow y \leq 70$



Da $x + y = 100$ eine Gleichung ist, bildet der Durchschnitt der einzelnen Lösungsmengen kein Flächenstück. Die Lösungsmenge des Systems sind die Bildpunkte, die auf der Strecke PM liegen.

Kostenminimum $M(60|40)$. 60 Stück nach Verfahren A, 40 Stück nach Verfahren B.

Selbstkosten für (60; 40)

A: 60 Stück je 1,50 EUR = 90,00 EUR

B: 40 Stück je 2,00 EUR = 80,00 EUR

170,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{1}{2}z = 85 \Leftrightarrow z = 170$

Ausnutzungszeiten für (60; 40)

- Aut. I: $60 \cdot 4 \text{ Min.} + 40 \cdot 3 \text{ Min.} = 360 \text{ Min.}$ (volle Ausnutzung)
- Aut. II: $60 \cdot 5 \text{ Min.} = 300 \text{ Min.}$ (100 Min. ungenutzt)
- Aut. III: $40 \cdot 6 \text{ Min.} = 240 \text{ Min.}$ (180 Min. ungenutzt)

Selbstkosten für (30; 70):

- A: 30 Stück je 1,50 EUR = 45,00 EUR
 - B: 70 Stück je 2,00 EUR = 140,00 EUR
- 185,00 EUR

Ausnutzungszeiten für (30; 70)

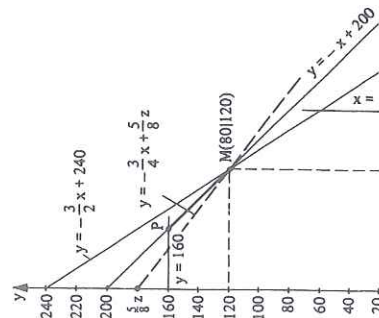
- Aut. I: $30 \cdot 4 \text{ Min.} + 70 \cdot 3 \text{ Min.} = 330 \text{ Min.}$ (30 Min. ungenutzt)
- Aut. II: $30 \cdot 5 \text{ Min.} = 150 \text{ Min.}$ (250 Min. ungenutzt)
- Aut. III: $70 \cdot 6 \text{ Min.} = 420 \text{ Min.}$ (volle Ausnutzung)

17. x Stück nach Verfahren A, y Stück nach Verfahren B, z EUR Selbstkosten.

	A		B		Verfügbare Zeit in Min.
	Min./Stück	Stück	Min./Stück	Stück	
I	3	x	2	y	480
II	0	0	3	y	480
III	3,5	x	0	0	420
	1,20 EUR je Stück	x	1,60 EUR je Stück	y	Gesamproduktion 200 Stück

Selbstkosten der Tagesproduktion: z EUR = $(x \cdot 1,2 + y \cdot 1,6)$ EUR

- (1) Zielfunktion: $z = 1,2x + 1,6y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{8}z$
- (2) Nebenbedingungen:
 Stückzahl: $x \geq 0; y \geq 0; x + y = 200 \Leftrightarrow y = -x + 200$
 Belastung I: $3x + 2y \leq 480 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 240$
 Belastung II: $3y \leq 480 \Leftrightarrow y \leq 160$
 Belastung III: $3,5y \leq 420 \Leftrightarrow x \leq 120$



Da $x + y = 100$ eine Gleichung ist, bildet der Durchschnitt der einzelnen Lösungsmengen kein Flächenstück. Die Lösungsmenge des Systems sind die Bildpunkte, die auf der Strecke PM liegen.

Kostenminimum M(80|120). 80 Stück nach Verfahren A, 120 Stück nach Verf. B.

Selbstkosten für (80; 120)

- A: 80 Stück je 1,20 EUR = 96,00 EUR
 - B: 120 Stück je 1,60 EUR = 192,00 EUR
- 288,00 EUR
- Auf der y-Achse: $\frac{5}{8}z = 180 \Leftrightarrow z = 288$

Ausnutzungszeiten für (80; 120)

- Aut. I: $80 \cdot 3 \text{ Min.} + 120 \cdot 2 \text{ Min.} = 480 \text{ Min.}$ (volle Ausnutzung)
- Aut. II: $120 \cdot 3 \text{ Min.} = 360 \text{ Min.}$ (120 Min. ungenutzt)
- Aut. III: $80 \cdot 3,5 \text{ Min.} = 280 \text{ Min.}$ (140 Min. ungenutzt)

Selbstkosten für (40; 160):

- A: 40 Stück je 1,20 EUR = 48,00 EUR
 - B: 160 Stück je 1,60 EUR = 256,00 EUR
- 304,00 EUR

Ausnutzungszeiten für (40; 160)

- Aut. I: $40 \cdot 3 \text{ Min.} + 160 \cdot 2 \text{ Min.} = 440 \text{ Min.}$ (40 Min. ungenutzt)
- Aut. II: $160 \cdot 3 \text{ Min.} = 480 \text{ Min.}$ (volle Ausnutzung)
- Aut. III: $40 \cdot 3,5 \text{ Min.} = 140 \text{ Min.}$ (280 Min. ungenutzt)

18. x Stück Klopfsauger A, y Stück Staubsauger B, z EUR Gesamtgewinn.

- Abt. I: Die Kapazität sei 1.
 1 Klopfsauger ist $\frac{1}{40}$ der Kap., x Klopfsauger sind $\frac{x}{40}$ der Kap.
 1 Staubsauger ist $\frac{1}{60}$ der Kap., y Staubsauger sind $\frac{y}{60}$ der Kap.
- Abt. II: Die Kapazität sei 1.
 1 Klopfsauger ist $\frac{1}{50}$ der Kap., x Klopfsauger sind $\frac{x}{50}$ der Kap.
 1 Staubsauger ist $\frac{1}{50}$ der Kap., y Staubsauger sind $\frac{y}{50}$ der Kap.

(1) Gleichung der Zielfunktion: z EUR = $x \cdot 20 \text{ EUR} + y \cdot 16 \text{ EUR}$
 $z = 20x + 16y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{z}{16}$

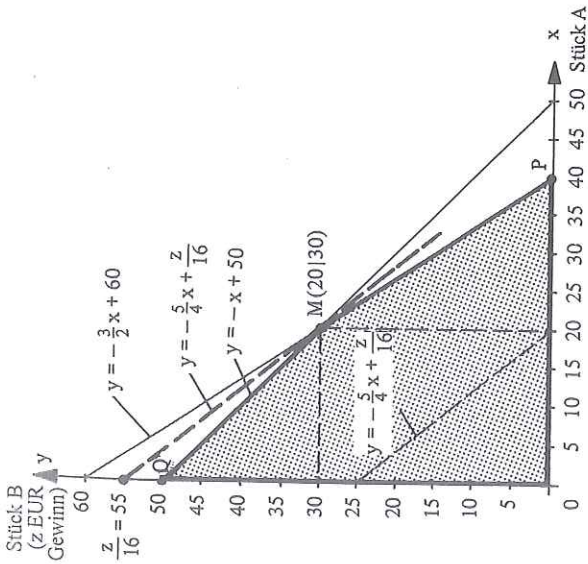
(2) Nebenbedingungen:

Stückzahlen: $x \geq 0; y \geq 0$

Ausnutzung Abt. I: $\frac{x}{40} + \frac{y}{60} \leq 1 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 60$

Ausnutzung Abt. II: $\frac{x}{50} + \frac{y}{50} \leq 1$

$x + y \leq 50 \Leftrightarrow y \leq -x + 50$



Zur Lösungsmenge gehören die Bildpunkte des Planungsvierecks OPMQ mit P(40|0), M(20|30), Q(0|50).

Maximum M(20|30). 20 Stück von A, 30 Stück von B.
 Gesamtgewinn: 20 Stück je 20,00 EUR = 400,00 EUR
 30 Stück je 16,00 EUR = 480,00 EUR
 880,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{z}{16} = 55 \Leftrightarrow z = 880$

Kapazitätsausnutzung für (20; 30):

Abt. I: $\frac{20}{40} + \frac{30}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1; \quad 1 = 100\%$

Abt. II: $\frac{20}{30} + \frac{30}{50} = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = 1; \quad 1 = 100\%$

Kapazitätsausnutzung für (25; 20):

Abt. I: $\frac{25}{40} + \frac{20}{60} = \frac{5}{8} + \frac{1}{3} = \frac{15+8}{24} = \frac{23}{24} \approx 0,958; \quad 0,958 = 95,8\%$

Abt. II: $\frac{25}{30} + \frac{20}{50} = \frac{5}{6} + \frac{2}{5} = \frac{25+12}{30} = \frac{37}{30} \approx 1,233; \quad 1,233 = 123,3\%$

19. x m² von A, y m² von B, z EUR Gesamtpflegekosten.

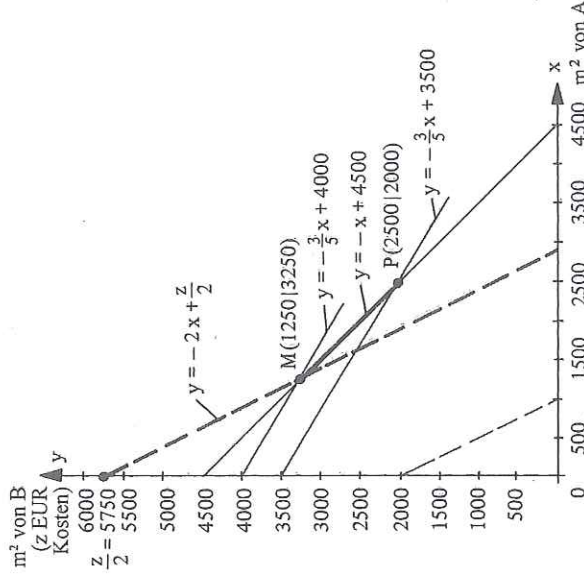
(1) Zielfunktion: $z = 4x + 2y \Leftrightarrow y = -2x + \frac{z}{2}$

(2) Nebenbedingungen: Menge der m²: $x \geq 0, y \geq 0$
 $x + y = 4500 \Leftrightarrow y = -x + 4500$

$18x + 30y \leq 120000 \Leftrightarrow y \leq -\frac{3}{5}x + 4000$

$18x + 30y \geq 105000 \Leftrightarrow y \geq -\frac{3}{5}x + 3500$

Anschaftungskosten:



Zur Lösungsmenge gehören die Bildpunkte, die auf der Strecke \overline{PM} liegen. Da $x + y = 4500$ eine Gleichung ist, bildet der Durchschnitt der einzelnen Lösungsmengen kein Flächenstück.

Kostenminimum M(1250|3250). 1250 m² von A und 3250 m² von B.

Kontrollrechnung für die Punkte M und P:

Gesamtpflegekosten:

M(1250|3250) $1250 \text{ m}^2 \text{ je } 4,00 \text{ EUR} = 5000,00 \text{ EUR}$

$3250 \text{ m}^2 \text{ je } 2,00 \text{ EUR} = 6500,00 \text{ EUR}$

11500,00 EUR

Auf der y-Achse: $\frac{z}{2} = 5750 \Leftrightarrow z = 11500$

P(2500|2000)

$2500 \text{ m}^2 \text{ je } 4,00 \text{ EUR} = 10000,00 \text{ EUR}$

$2000 \text{ m}^2 \text{ je } 2,00 \text{ EUR} = 4000,00 \text{ EUR}$

14000,00 EUR

Anschaffungskosten:
M(1250|3250)

1250 m² je 18,00 EUR = 22.500,00 EUR
3250 m² je 30,00 EUR = 97.500,00 EUR

120.000,00 EUR

P(2500|2000)

2500 m² je 18,00 EUR = 45.000,00 EUR
2000 m² je 30,00 EUR = 60.000,00 EUR

105.000,00 EUR

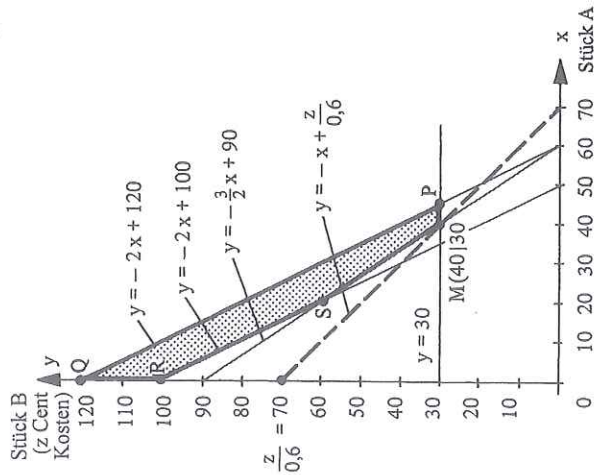
20. x Stück von A, y Stück von B, z Cent Gesamtkosten je Betriebsstunde.

(1) Zielfunktion: $z = 0,6x + 0,6y \Leftrightarrow y = -x + \frac{z}{0,6}$

(2) Nebenbedingungen:
Stückzahlen: $x \geq 0, y \geq 30$

Lichtstärke: $150x + 100y \geq 9000 \Leftrightarrow y \geq -\frac{3}{2}x + 90$

Anschaffungskosten: $40x + 20y \geq 2000 \Leftrightarrow y \geq -2x + 100$
 $40x + 20y \leq 2400 \Leftrightarrow y \leq 2x + 120$



Planungsfünfeck mit den Eckpunkten M(40|30), P(45|30), Q(0|120), R(0|100), S(20|60).
Kostenminimum M(40|30). 40 Stück von A und 30 Stück von B.

Lichtstärke:
40 Stück je 150 cd = 6000 cd
30 Stück je 100 cd = 3000 cd
9000 cd

Anschaffungskosten:
40 Stück je 40,00 EUR = 1.600,00 EUR
30 Stück je 20,00 EUR = 600,00 EUR
2.200,00 EUR

Betriebskosten:
40 Stück je 0,6 Cent = 24 Cent
30 Stück je 0,6 Cent = 18 Cent
42 Cent

Auf der y-Achse: $\frac{z}{0,6} = 70 \Leftrightarrow z = 42$

21. Wir stellen die Angaben der Aufgabe in einer Tabelle zusammen und setzen für die Liefermengen Platzhalter ein.

I an A: x Stück
I an B: y Stück
I an C: (25 - x - y) Stück
II an A: (20 - x) Stück
II an B: (30 - y) Stück
II an C: [40 - (20 - x) - (30 - y)] Stück = (x + y - 10) Stück

	A			B			C			lieferbar Stück
	EUR	Stück	Stück	EUR	Stück	Stück	EUR	Stück	Stück	
I	9,00	x		6,00	y		4,00	25 - x - y		25
II	8,00	20 - x		3,00	30 - y		5,00	x + y - 10		40
Bestellung		20			30			15		

(1) Gleichung der Zielfunktion:

z EUR Gesamttransportkosten

$$z = 9x + 6y + 4(25 - x - y) + 8(20 - x) + 3(30 - y) + 5(x + y - 10)$$

$$z = 9x + 6y + 100 - 4x - 4y + 160 - 8x + 90 - 3y + 5x + 5y - 50$$

$$z = 2x + 4y + 300 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \left(\frac{z}{4} - 75\right)$$

Beachte: $\left(\frac{z}{4} - 75\right)$ ist der y-Achsenabschnitt

(2) Nebenbedingungen:

$$x \geq 0 \quad (1), \quad y \geq 0 \quad (2)$$

I an A: $x \leq 25$ und $x \leq 20$, zusammengefasst $x \leq 20$ (3)

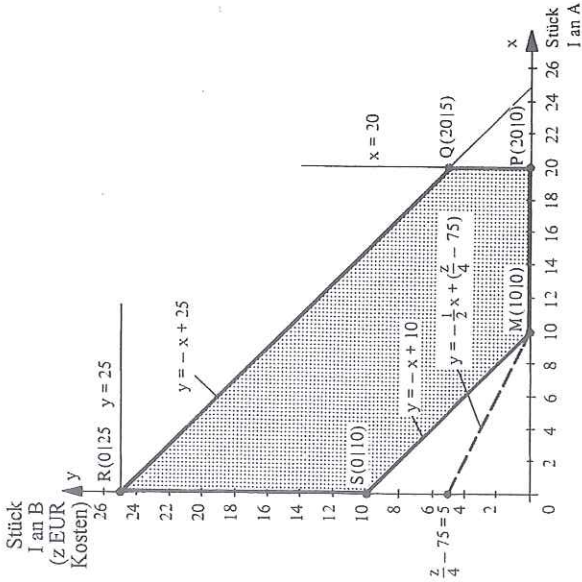
I an B: $y \leq 25$ und $y \leq 30$, zusammengefasst $y \leq 25$ (4)

I an C: $25 - x - y \leq 25 \Leftrightarrow y \geq -x$ $25 - x - y \leq 15 \Leftrightarrow y \geq -x + 10$
 $y \geq -x$ und $y \geq -x + 10$, zusammengefasst $y \geq -x + 10$ (5)

II an A: $20 - x \leq 40 \Leftrightarrow x \geq -20$ $20 - x \leq 20 \Leftrightarrow x \geq 0$
 $x \geq -20$ und $x \geq 0$, zusammengefasst $x \geq 0$ (1)

II an B: $30 - y \leq 40 \Leftrightarrow y \geq -10$ $30 - y \leq 30 \Leftrightarrow y \geq 0$
 $y \geq -10$ und $y \geq 0$, zusammengefasst $y \geq 0$ (2)

II an C: $x + y - 10 \leq 40 \Leftrightarrow y \leq -x + 50$ $x + y - 10 \leq 15 \Leftrightarrow y \leq -x + 25$
 $y \leq -x + 50$ und $y \leq -x + 25$, zusammengefasst $y \leq -x + 25$ (6)



Planungsfünfeck mit den Eckpunkten M(10|0), P(20|0), Q(20|5), R(0|25), S(0|10).
 Kostenminimum M(10|0). I liefert an A 10 Stück und an B 0 Stück.

M(10|0)

	A	B	C
I	10	0	15
II	10	30	0
	20	30	15

$$10 \cdot 9,00 \text{ EUR} + 15 \cdot 4,00 \text{ EUR} = 150,00 \text{ EUR}$$

$$10 \cdot 8,00 \text{ EUR} + 30 \cdot 3,00 \text{ EUR} = 170,00 \text{ EUR}$$

$$\underline{\underline{320,00 \text{ EUR}}}$$

Auf der y-Achse: $\frac{z}{4} - 75 = 5 \Leftrightarrow z = 320$.

P(20|0)

	A	B	C
I	20	0	5
II	0	30	10
	20	30	15

$$20 \cdot 9,00 \text{ EUR} + 5 \cdot 4,00 \text{ EUR} = 200,00 \text{ EUR}$$

$$30 \cdot 3,00 \text{ EUR} + 10 \cdot 5,00 \text{ EUR} = 140,00 \text{ EUR}$$

$$\underline{\underline{340,00 \text{ EUR}}}$$

Q(20|5)

	A	B	C
I	20	5	0
II	0	25	15

$$20 \cdot 9,00 \text{ EUR} + 5 \cdot 6,00 \text{ EUR} = 210,00 \text{ EUR}$$

$$25 \cdot 3,00 \text{ EUR} + 15 \cdot 5,00 \text{ EUR} = 150,00 \text{ EUR}$$

$$\underline{\underline{360,00 \text{ EUR}}}$$

R(0|25)

	A	B	C
I	0	25	0
II	20	5	15
	20	30	15

$$25 \cdot 6,00 \text{ EUR} = 150,00 \text{ EUR}$$

$$20 \cdot 8,00 \text{ EUR} + 5 \cdot 3,00 \text{ EUR} + 15 \cdot 5,00 \text{ EUR} = 250,00 \text{ EUR}$$

$$\underline{\underline{400,00 \text{ EUR}}}$$

S(0|10)

	A	B	C
I	0	10	15
II	20	20	0
	20	30	15

$$10 \cdot 6,00 \text{ EUR} + 15 \cdot 4,00 \text{ EUR} = 120,00 \text{ EUR}$$

$$20 \cdot 8,00 \text{ EUR} + 20 \cdot 3,00 \text{ EUR} = 220,00 \text{ EUR}$$

$$\underline{\underline{340,00 \text{ EUR}}}$$

22. Wir stellen die Angaben der Aufgabe in einer Tabelle zusammen und setzen für die Liefermengen Platzhalter ein.

	A		B		C		Zur Verfügung m ³
	EUR	m ³	EUR	m ³	EUR	m ³	
I	8,00	x	7,00	y	9,00	400 - x - y	400
II	10,00	500 - x	8,00	200 - y	9,00	x + y - 100	600
Bedarf		500		200		-300	

II an C: $600 - (500 - x) - (200 - y) = x + y - 100$

(1) Gleichung der Zielfunktion:

z EUR Gesamttransportkosten

$$z = 8x + 7y + 9(400 - x - y) + 10(500 - x) + 8(200 - y) + 9(x + y - 100)$$

$$z = 8x + 7y + 3600 - 9x - 9y + 5000 - 10x + 1600 - 8y + 9x + 9y - 900$$

$$z = -2x - y + 9300 \Leftrightarrow y = -2x + (9300 - z)$$

Beachte: (9300 - z) ist der y-Achsenabschnitt. Da z subtrahiert wird, werden die Transportkosten umso niedriger, je größer der y-Achsenabschnitt im Achsenkreuz ist.

(2) Nebenbedingungen:

$$x \geq 0 \quad (1), \quad y \geq 0 \quad (2)$$

I an A: $x \leq 400$ und $x \leq 500$, zusammengefasst $x \leq 400 \quad (3)$

I an B: $y \leq 400$ und $y \leq 200$, zusammengefasst $y \leq 200 \quad (4)$

I an C: $400 - x - y \leq 400 \Leftrightarrow y \geq -x$; $400 - x - y \leq 300 \Leftrightarrow y \geq -x + 100$
 $y \geq -x$ und $y \geq -x + 100$, zusammengefasst $y \geq -x + 100 \quad (5)$

II an A: $500 - x \leq 600 \Leftrightarrow x \geq -100$ $500 - x \leq 500 \Leftrightarrow x \geq 0$
 $x \geq -100$ und $x \geq 0$, zusammengefasst $x \geq 0 \quad (1)$

II an B: $200 - y \leq 600 \Leftrightarrow y \geq -400$ $200 - y \leq 200 \Leftrightarrow y \geq 0$
 $y \geq -400$ und $y \geq 0$, zusammengefasst $y \geq 0 \quad (2)$

II an C: $x + y - 100 \leq 600 \Leftrightarrow y \leq -x + 700$ $x + y - 100 \leq 300 \Leftrightarrow y \leq -x + 400$
 $y \leq -x + 700$ und $y \leq -x + 400$, zusammengefasst $y \leq -x + 400 \quad (6)$

Zusammenfassung der Nebenbedingungen:

$$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq 400 \wedge y \leq 200 \wedge x + y \geq -x + 100 \wedge y \leq -x + 400$$

Planungsfünfeck mit den Eckpunkten M(400|0), P(200|200), Q(0|200), R(0|100), S(100|0).

Kostenminimum M(400|0). I liefert an A 400 m³ und an B 0 m³.

M(400|0)

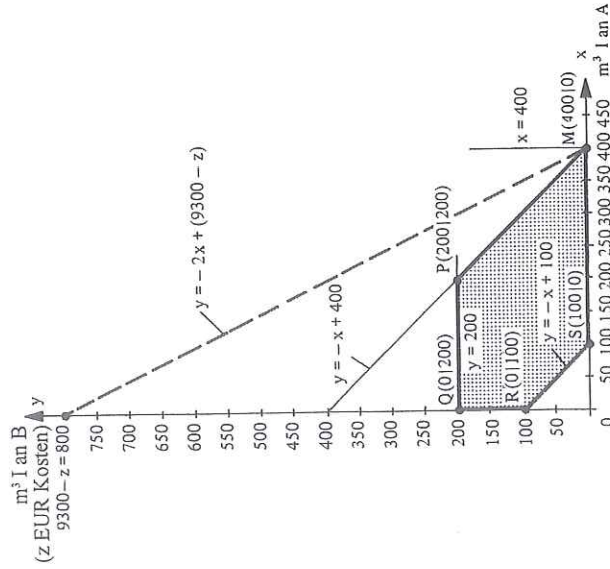
	A	B	C
I	400	0	400
II	100	200	300
	500	200	300

Minimale Gesamttransportkosten:

$$400 \cdot 8,00 \text{ EUR} = 3200,00 \text{ EUR}$$

$$100 \cdot 10,00 \text{ EUR} + 200 \cdot 8,00 \text{ EUR} + 300 \cdot 9,00 \text{ EUR} = 5300,00 \text{ EUR}$$

$$\underline{\underline{8500,00 \text{ EUR}}}$$



Auf der y-Achse: 9300 - z = 800 ⇔ z = 8500

Das Kostenmaximum liegt in R(0|100)

	A	B	C
I	0	100	300
II	500	100	0
	500	200	300

Maximale Gesamttransportkosten:

$$100 \cdot 7,00 \text{ EUR} + 300 \cdot 9,00 \text{ EUR} = 3400,00 \text{ EUR}$$

$$500 \cdot 10,00 \text{ EUR} + 100 \cdot 8,00 \text{ EUR} = 5800,00 \text{ EUR}$$

$$\underline{\underline{9200,00 \text{ EUR}}}$$

9 Potenzen

9.1 Begriff der Potenz

- $4 \cdot 6$
 - 6^4
 - $3z$
 - z^3
 - $(a+b)^2$
 - $2(a+b)$
 - $2xy$
 - $(xy)^2$
- $4 \cdot 4 \cdot 4$
 - $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
 - $x \cdot x \cdot x$
 - $x + x + x$
 - $(x+y)(x+y)$
 - $(x+y) + (x+y)$
- 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1024
 - 100; 1000; 10 000; ...; 1 000 000 000
- 3^2
 - 2^3
 - 5^3
 - 2^5
 - 4^2 oder 2^4
 - 8^2 oder 4^3 oder 2^6
 - 10^3
 - 10^5
- $\frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{9}{16}; \frac{8}{125}; \frac{27}{1000}; \frac{16}{81}; \frac{256}{625}$
 - 0,01; 0,09; 0,001; 0,008; 0,0081; 0,0625; 0,00032
 - $0^n = 0; 1^n = 1$
 - gerade Hochzahl: +1; ungerade Hochzahl: -1; -8; +16; -32; +64
- 8 und 9; 25 und 32; 16 und 16; 256 und 64; 243 und 125
 - 12; 81; 81; -81; -81; -64; 64
 - 8; -9; -8; 9; 8; -9; -18; 24
 - Ausnahme: $4^2 = 16; 2^4 = 16$
- 27; 50; 20; 49; 100; 29
 - 13; 1; 1; 7; -5; 5
 - 35; 125; 19; 1; -19; -1
- 50 000
 - 25 000
 - 3 200 000
 - 7 400 000 000
 - 1 250 000 000
- 10^4
 - $4 \cdot 10^4$
 - $7 \cdot 10^5$
 - $8 \cdot 10^6$
 - $2 \cdot 10^9$
- $9^9 = 387\,420\,489$
- 1,96; 6,76; 10,24; 16,81; 28,09; 42,25; 60,84; 68,89; 98,01
- 1,9924; 6,0025; 13,2496; 16,4025; 33,1776; 60,3729; 69,7225; 84,8241
- 0,026569; 0,079524; 0,110889; 0,245025; 0,444889; 0,511225; 0,874225
- 136,89; 538,24; 1267,36; 1722,25; 2894,44; 4108,81; 6320,25; 7430,44
- 342,25; 3,4225; 0,034225; 0,00034225; 462,25; 4,6225; 0,046225
- 1,52088; 1,77156; 2,68562; 3,65226; 6,43486; 7,88060; 8,74182; 9,52813
- 11,3906; 21,0246; 40,0017; 78,4028; 134,218; 256,048; 651,714; 967,362
- 0,00500021; 0,0557430; 0,136591; 0,410172; 1,860,87; 16387,1; 381078
- 1953,13; 1,95313; 0,00195313; 107172; 107,172; 0,107172; 0,857375