Quadratische Funktionen

Aufgabenstellung

1. Die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2 - x + 1$ ist gegeben.
   a) Wie lauten die Koordinaten des Scheitelpunktes?
   b) Wie lautet die Gleichung der Parabel
      • nach Spiegelung am Scheitelpunkt?
      • nach Spiegelung an der x-Achse?
      • nach Spiegelung an der y-Achse?

Geg: $y = 2x^2 - x + 1$
Ges: $S = ?$
$y_1 = ?$ (Spiegelung am Scheitelpunkt)
$y_2 = ?$ (Spiegelung an der x-Achse)
$y_3 = ?$ (Spiegelung an der y-Achse)

Lösung:

a) Scheitel S über Scheitelform herleiten:

$$y = 2 \cdot \left[x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right]$$

$$y = 2 \cdot \left[x^2 - \frac{1}{2}x + \underbrace{\left(\frac{1}{2 \cdot 2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 2}\right)^2}_{\text{quadratische Ergänzung}} + \frac{1}{2}\right]$$

$$y = 2 \cdot \left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{8}{16}\right] = 2 \cdot \left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right]$$

$$\underline{y = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{S\left(\frac{1}{4}\middle|\frac{7}{8}\right)}}$$

b) Spiegelung am Scheitelpunkt (Parameter A wird negativ, S unverändert):

$$y_1 = -2 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} = -2 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) + \frac{7}{8} = \underline{\underline{-2x^2 + x + \frac{3}{4}}}$$

Spiegelung an der x-Achse (Parameter A wird negativ, $S\left(\frac{1}{4}\middle|-\frac{7}{8}\right)$):

$$y_2 = -2 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8} = -2 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) - \frac{7}{8} = \underline{\underline{-2x^2 + x - 1}}$$

Spiegelung an der y-Achse (Parameter A unverändert, $S\left(-\frac{1}{4}\middle|\frac{7}{8}\right)$):

$$y_3 = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} = 2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) + \frac{7}{8} = \underline{\underline{2x^2 + x + 1}}$$

2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion, deren Scheitel die x-Koordinate 5 und die y-Koordinate 0 hat und deren Graph durch den Punkt P(30 | 125) geht.

Geg: S(5 | 0) und P(30 | 125)
Ges: Grundform: $y = Ax^2 + Bx + C$ (A = ?, B = ?, C = ?)
Scheitelform: $y = A\,(x - x_S)^2 + y_S$ ($A = ?$, $x_S = 5$, $y_S = 0$)

Überlegungen:
Bei der Scheitelform müssen der Faktor A und die Koordinaten des Scheitelpunktes S bekannt sein, damit die Funktion eindeutig bestimmbar ist.
Die Koordinaten des Scheitelpunktes sind bereits gegeben. Damit muss nur noch der Parameter A berechnet werden.

Lösungsansatz: Scheitelpunkt S und Punkt P in die Scheitelform einsetzen. Damit erhält man eine Gleichung mit einer Unbekannten (A).

Lösung:

Scheitelform allgemein: $y = A\left(x - x_S\right)^2 + y_S$

S und P eingesetzt: $\underbrace{125}_{\substack{\text{y-Koordinate}\\ \text{von Punkt P}}} = A\left(\underbrace{30}_{\substack{\text{x-Koordinate}\\ \text{von Punkt P}}} - 5\right)^2 + 0 \quad \rightarrow$ nach A auflösen

$$125 = A \cdot 25^2$$

$$A = \frac{125}{25^2} = \underline{\frac{1}{5}}$$

somit:

$$y = \frac{1}{5}\left(x - 5\right)^2 \qquad \text{Scheitelform}$$

$$y = \frac{1}{5}\left(x^2 - 10x + 25\right) = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 5 \qquad \text{Grundform}$$

3. Berechnen Sie x_S und y_S so, dass der Graph von $y = (x - x_S)^2 + y_S$ durch die Punkte P (–3 | 5) und Q (5 | 5) geht.

Geg: A = 1, P (–3 | 5), Q (5 | 5)
Ges: x_S = ?, y_S = ?

Überlegungen:
Es sind zwei Unbekannte gesucht, damit sind zwei Informationen (Gleichungen) notwendig um die Aufgabe zu lösen. Die x- bzw. y-Werte sind von den Punkten P bzw. Q bekannt. Damit können x_S bzw. y_S berechnet werden.

Die zweite Variante nutzt die Symmetrie der Funktion aus. Ist sehr elegant, muss aber zuerst erkannt werden (Die y-Koordinaten der beiden Punkte sind gleich gross, somit muss die x-Koordinate des Scheitelpunktes in der Mitte der x-Koordinaten der beiden Punkte liegen).

Lösung:
Variante mit Gleichungssystem P bzw. Q in Scheitelform einsetzen:

P eingesetzt:	(1)	$5=(-3-x_S)^2+y_S$
Q eingesetzt:	(2)	$5=(5-x_S)^2+y_S$
	$(1a)$	$5=9+6x_S+x_S^{\;2}+y_S \quad \vert\cdot(-1)$
	$(2a)$	$5=25-10x_S+x_S^{\;2}+y_S$
	$(1b)$	$-5=-9-6x_S-x_S^{\;2}-y_S$
	$(2b)$	$5=25-10x_S+x_S^{\;2}+y_S$
	$(1b+2b)$	$0=16-16x_S$
somit:	(3)	$x_S=\underline{\underline{1}}$
	$(3\text{ in }2)$	$5=(5-1)^2+y_S$
somit:		$y_S=5-16=\underline{\underline{-11}}$

Variante mit Ausnutzung der Symmetrie:

x_S berechnen:	$x_S=\dfrac{P(x)+Q(x)}{2}=\dfrac{-3+5}{2}=\underline{\underline{1}}$
Q und x_S einsetzen:	$5=(5-1)^2+y_S$
somit:	$y_S=5-16=\underline{\underline{-11}}$

4. Eine Funktion der Form $y = (x - d)^2$ nimmt für $x = -1$ und $x = 9$ den gleichen Funktionswert an. Für welchen x–Wert nimmt y ihr Minimum an?

Geg: $y(-1) = y(9)$ und $y = (x - d)^2$
Ges: $x_S = ?$

Überlegungen:
Da die y-Werte für die beiden x-Werte gleich gross sind, muss der Scheitel in der Mitte der beiden x-Werte liegen.

Lösung:

$$x_S = \frac{-1+9}{2} = \underline{\underline{4}}$$

Weitere Aufgaben mit Lösungen

http://www.munterbunt.ch
http://mypage.bluewin.ch/manuel.erdin/mathematik/mathe.html