Schnittpunkte Parabel mit Gerade

Aufgabenstellung 1

Der Produzent einer Spezialkamera ist Monopolist. Bei der Produktion von x Kameras entstehen ihm die Produktionskosten $y_1 = 30x + 600$ *(Kostenfunktion)*. Sein Erlös lässt sich erfahrungsgemäss durch die Funktionsgleichung $y_2 = -2x^2 + 160x$ *(Erlösfunktion)* beschreiben.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion für $0 \le x \le 80$.
b) Zeichnen Sie den Graphen der Kostenfunktion ins gleiche Koordinatensystem.
c) Berechnen Sie den Bereich, in dem der Produzent Gewinn macht.
d) Wie gross ist der Gewinn bzw. Verlust bei einer Produktion von 15 bzw. 65 Kameras?
e) Bei welcher Anzahl Spezialkameras ist der Erlös für den Produzenten am grössten? **Berechnen** Sie die Anzahl der Spezialkameras und den maximalen Erlös.

Geg: $y_1 = 30x + 600$, $y_2 = -2x^2 + 160x$
Ges: $y_1 = y_2$ und $y_{G(15)} = y_2 - y_1$ bzw. $y_{G(65)} = y_2 - y_1$ und S

Lösung:

c) Bestimmung Gewinnschwelle bzw. Gewinngrenze:

Ansatz: $y_1 = y_2$

$$30x + 600 = -2x^2 + 160x$$

$$-2x^2 + 130x - 600 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-130 \pm \sqrt{130^2 - 4 \cdot 2 \cdot 600}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-130 \pm 110}{-4}$$

$$x_1 = \underline{5}$$

$$x_2 = \underline{60}$$

somit: Der Produzent macht Gewinn zwischen 5 und 60 verkauften Kameras.

d) Bestimmung Gewinn:

$$y_G = y_2 - y_1 = -2x^2 + 160x - 30x - 600 = \underline{-2x^2 + 130x - 600}$$

$$y_{G(15)} = -2 \cdot 15^2 + 130 \cdot 15 - 600 = \underline{900}$$

$$y_{G(65)} = -2 \cdot 65^2 + 130 \cdot 65 - 600 = \underline{-600}$$

somit: Bei einer Produktion von 15 Kameras beträgt der Gewinn Fr. 900.–
Bei einer Produktion von 65 Kameras beträgt der Verlust Fr. 600.–

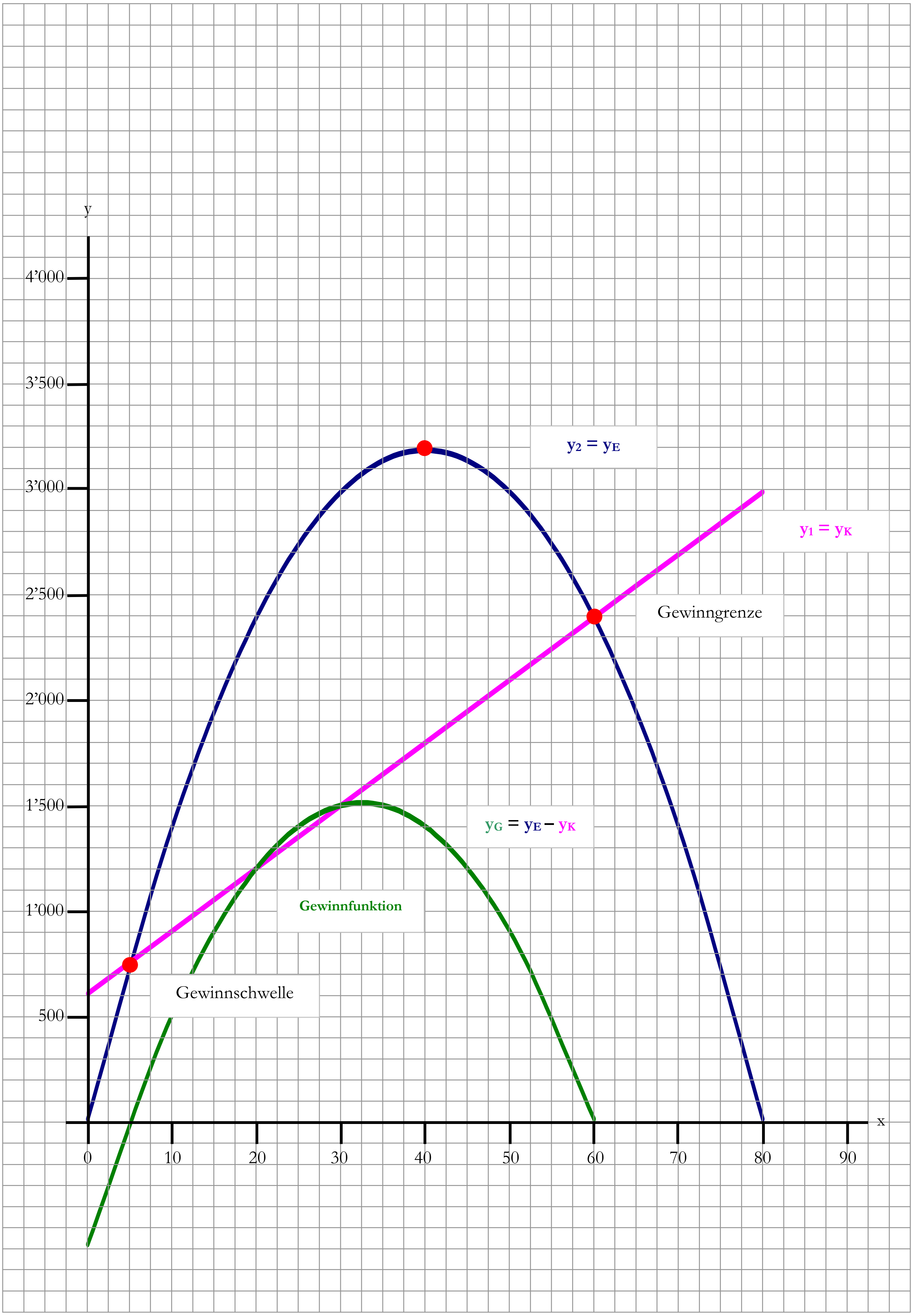
e) Bestimmung Scheitelform:

$$y_2 = -2\left(x^2 - 80x\right) = -2\left[\left(x - 40\right)^2 - 1'600\right] = \underline{-2\left(x - 40\right)^2 + 3'200}$$

$$\underline{\underline{S(40 / 3'200)}}$$

somit: Bei 40 Kameras beträgt der maximale Erlös Fr. 3'200.–

zur Aufgabenstellung 1:



Aufgabenstellung 2

Gegeben sind die Parabel y = – x^2 + 4x + 5 und die Gerade y = 2x + 1.

a) Zeichnen Sie die beiden Graphen in das bestehende Koordinatensystem ein.

Bestimmen Sie:
b) den Scheitelpunkt S der Parabel.
c) die Schnittpunkte A und B der Parabel mit der Geraden.
d) den y-Achsenabschnitt b der Geraden y = 2x + b so, dass die Gerade die Parabel berührt. Wie heissen die Koordinaten des Berührungspunktes C?

Geg: $y_g = 2x + 1$, $y_p = -x^2 + 4x + 5$
Ges: $y_1 = y_2$, S und b bzw. C(x/y)

Lösung:
b) Bestimmung Scheitelform:

$$y_P = -x^2 + 4x + 5 = -\left(x^2 - 4x - 5\right) = -\left(x^2 - 4x + 4 - 4 - 5\right) =$$

$$-\left[\left(x-2\right)^2 - 9\right] = \underline{-\left(x-2\right)^2 + 9}$$

somit: $\underline{\underline{S(2/9)}}$

c) Schnittpunkte A und B: $y_P = y_G$

$$-x^2 + 4x + 5 = 2x + 1 \quad \rightarrow \quad -x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{-2}$$

$$x_1 = \underline{-1.24} \quad \text{und} \quad x_2 = \underline{3.24}$$

$$y_1 = 2x_1 + 1 = \underline{-1.47} \quad \text{und} \quad y_2 = 2x_2 + 1 = \underline{7.47}$$

somit: Punkt $\underline{\underline{A(-1.24/-1.47)}}$ und Punkt $\underline{\underline{B(3.24/7.47)}}$

d) Ansatz: $y_P = y_G$ und Diskriminante = 0

$$-x^2 + 4x + 5 = 2x + b \quad \rightarrow \quad -x^2 + 2x + 5 - b = 0$$

$$A = -1,\ B = 2 \text{ und } C = 5 - b$$

$$\sqrt{B^2 - 4AC} = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (5-b)} = 0$$

$$\sqrt{2^2 + 4 \cdot (5-b)} = \sqrt{2^2 + 20 - 4b} = \sqrt{24 - 4b} = 0$$

$$24 - 4b = 0 \quad \rightarrow \quad 4b = 24 \quad \rightarrow \quad b = \underline{6}$$

somit: Der y-Achsenabschnitt b muss $\underline{\underline{6}}$ sein!

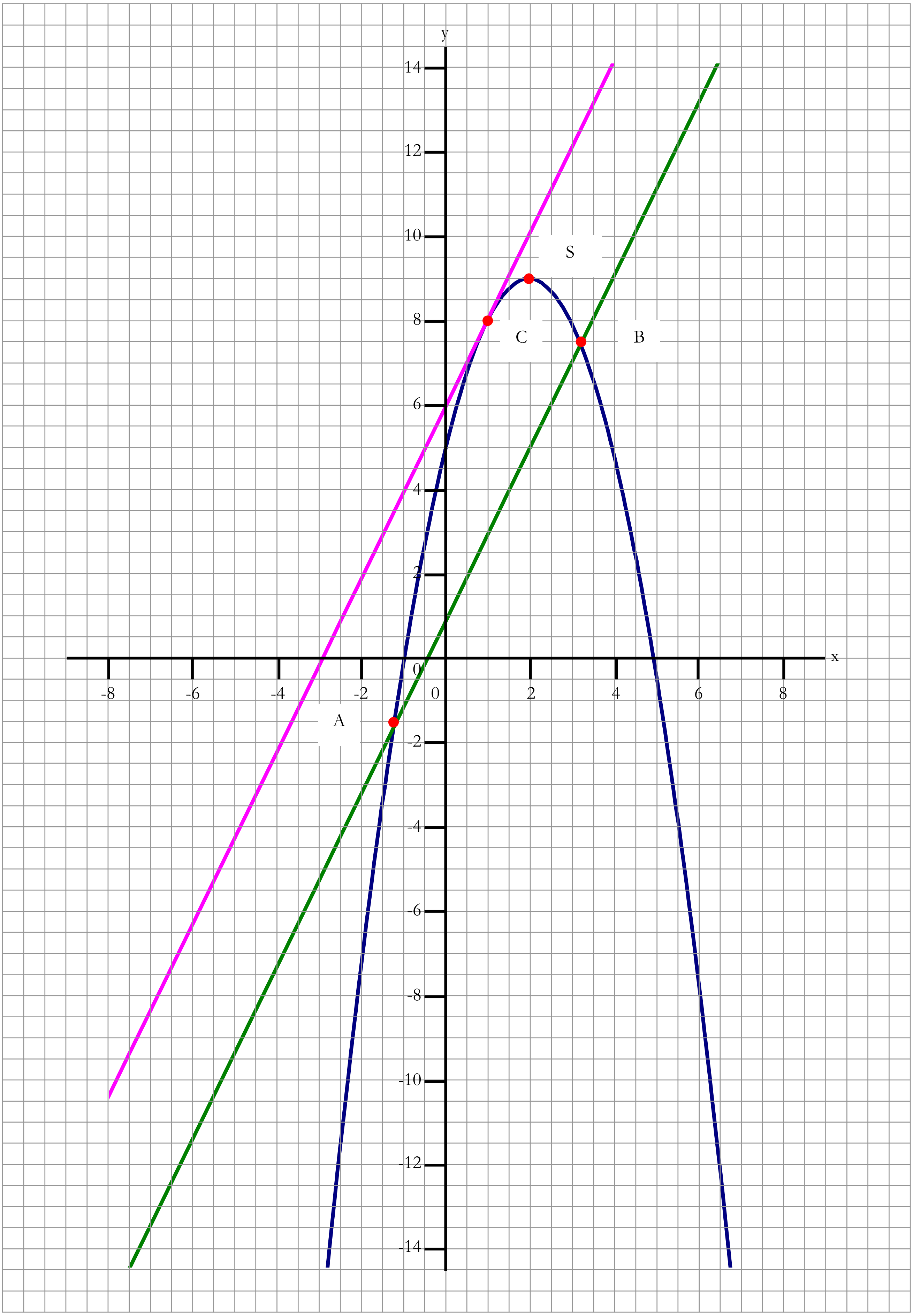
Ansatz für Berührungspunkt C: $y_P = y_G$ und Diskriminante = 0

$$-x^2 + 4x + 5 = 2x + 6 \quad \rightarrow \quad -x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x_1 = x_2 = x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B \pm 0}{2A} = \frac{-2}{-2} = \underline{1} \quad \rightarrow \quad y = 2x + 6 = \underline{8}$$

somit: Der Berührungspunkt C hat die Koordinaten $\underline{\underline{(1/8)}}$!

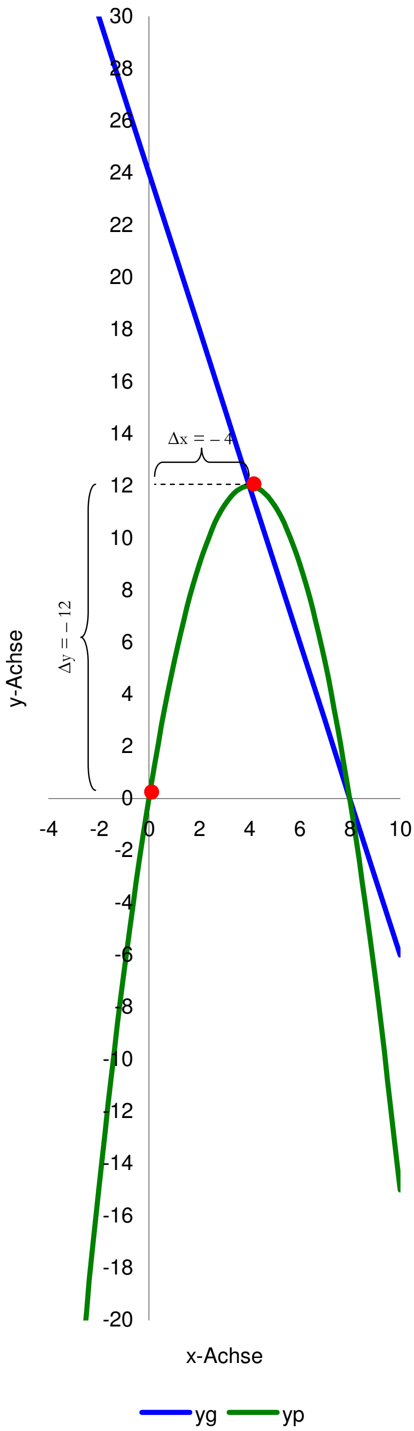
zur Aufgabenstellung 2:



Aufgabenstellung 3

Eine Parabel geht durch den Ursprung des Koordinatensystems. Der zweite Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse, sowie der Scheitelpunkt liegen auf der Geraden $y = -3x + 24$.

a) Berechnen Sie die 2 Nullstellen und die Koordinaten des Scheitels der Parabel.
b) Wie heisst die Gleichung der Parabel?
c) Stellen Sie die Gerade und die Parabel graphisch dar.



Geg: $y_G = -3x + 24$, $y_P = A \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ (A muss negativ sein!)
Ges: $y_P = ?$, $x_1 = ?$, $x_2 = ?$ und S

Lösung:

a) Bestimmung Nullstellen:

$$\underline{\underline{N_1 = (0/0)}} \quad \text{und} \quad y_G = -3x + 24 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x = 24$$

$$\underline{\underline{N_2 = (8/0)}}$$

Bestimmung S:

$$x_S = \frac{x_{N_1} + x_{N_2}}{2} = \frac{8+0}{2} = \underline{4} \quad \rightarrow \quad y_S = -3x_S + 24 = \underline{12}$$

somit: $\underline{\underline{S = (4/12)}}$

b) Bestimmung Funktionsgleichung Parabel y_P:

Ansatz: $y_P = A \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ und $N_2(8/0)$

$S(4/12)$ einsetzen: $y_P = A \cdot (x-4)^2 + 12$

$N_2(8/0)$ einsetzen: $0 = A \cdot (8-4)^2 + 12$

$$0 = A \cdot 16 + 12 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{12}{16} = \underline{-\frac{3}{4}}$$

somit: $y_P = -\frac{3}{4} \cdot (x-4)^2 + 12 = -\frac{3}{4} \cdot (x^2 - 8x + 16) + 12$

$$\underline{\underline{y_P = -\frac{3}{4}x^2 + 6x}}$$

b) Bestimmung Funktionsgleichung Parabel y_P: (anschauliche Variante)

Ansatz: $y_P = A \cdot (x - x_S)^2 + y_S$

$S(4/12)$ einsetzen: $y_P = A \cdot (x-4)^2 + 12$

Parameter A: aus Graph ersichtlich: $\Delta x = -4$ und $\Delta y = -12$

somit: $\Delta y = A \cdot \Delta x^2 \quad \rightarrow \quad A = \frac{\Delta y}{\Delta x^2} = \frac{-12}{(-4)^2} = \underline{-\frac{3}{4}}$

damit wird: $y_P = -\frac{3}{4} \cdot (x-4)^2 + 12 = -\frac{3}{4} \cdot (x^2 - 8x + 16) + 12$

$$\underline{\underline{y_P = -\frac{3}{4}x^2 + 6x}}$$

zur Aufgabenstellung 3: