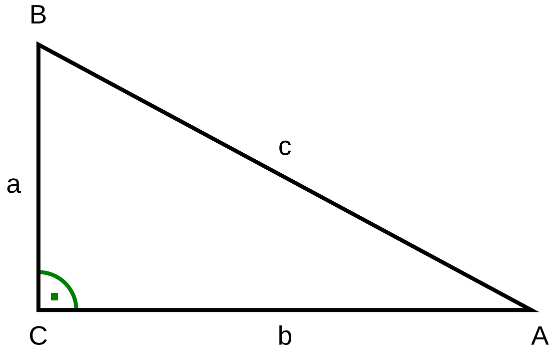
15 Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks

Trigonometrie (von *trigonon* [griechisch]; Dreieck, und *metrein* [griechisch]; messen)

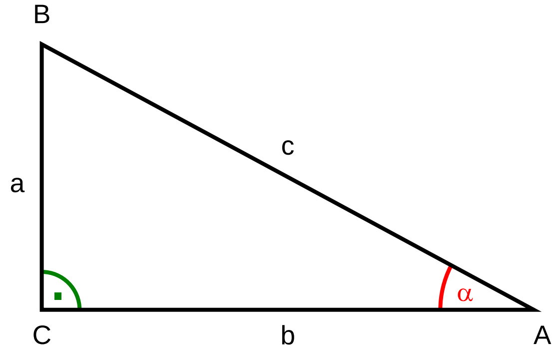
15.1 Einführung (Gegenüberstellung Pythagoras und Trigonometrie)

Pythagoras



Berechnung **nur mit Seiten (ohne Winkel)**

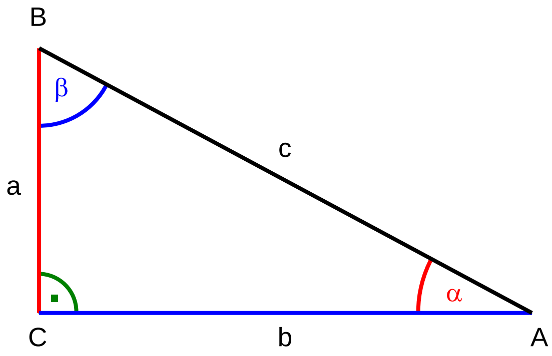
Trigonometrie



Berechnung **mit Seiten und Winkeln**

> Die ***Trigonometrie*** ermöglicht aus gegebenen Seiten und Winkeln die übrigen Stücke eines Dreiecks zu berechnen.

<u>Bezeichnung der Dreieckstücke</u>



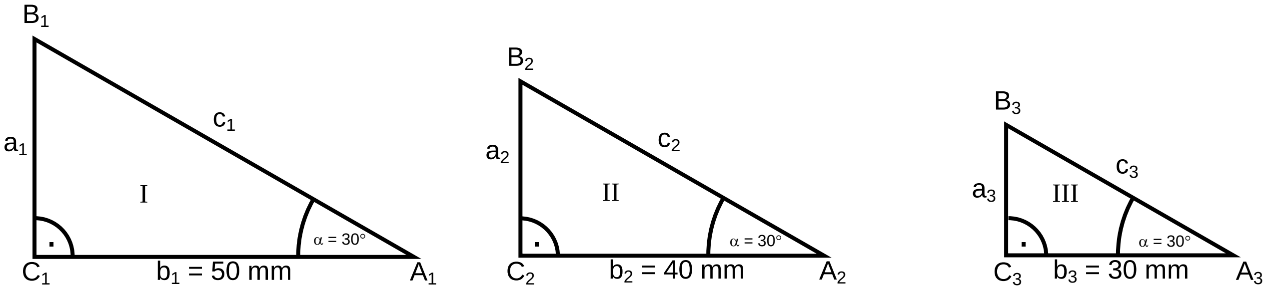
vom Winkel α aus betrachtet:

a	Gegenkathete
b	Ankathete
c	Hypotenuse

vom Winkel β aus betrachtet:

a	Ankathete
b	Gegenkathete
c	Hypotenuse

15.2 Ähnlichkeit der Dreiecke



Verhältnisse (Masse aus den Skizzen herausgemessen)

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{29\,[mm]}{57\,[mm]} = \underline{0{,}51} \qquad \frac{a_2}{c_2} = \frac{23\,[mm]}{46\,[mm]} = \underline{0{,}50} \qquad \frac{a_3}{c_3} = \frac{17\,[mm]}{35\,[mm]} = \underline{0{,}49}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{29\,[mm]}{50\,[mm]} = \underline{0{,}58} \qquad \frac{a_2}{b_2} = \frac{23\,[mm]}{40\,[mm]} = \underline{0{,}58} \qquad \frac{a_3}{b_3} = \frac{17\,[mm]}{30\,[mm]} = \underline{0{,}57}$$

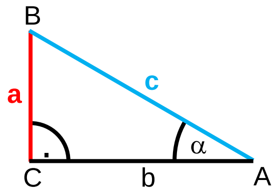
Erkenntnis

Die Verhältnisse $\frac{a}{c}$ bzw. $\frac{a}{b}$ sind **nur** vom Winkel α abhängig. Die Verhältnisse haben also für ***den gleichen Winkel immer den gleichen Wert***, ohne Rücksicht auf die Grösse des Dreiecks.

Die Verhältniswerte sind eine Funktion des Winkels!

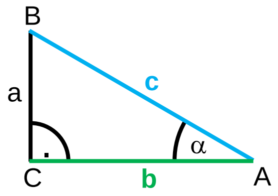
15.3 Trigonometrische Funktionen

Geben wir nun den obengenannten Verhältnissen noch einen Namen, so heissen die Verhältnisse → *Winkelfunktionen* oder *trigonometrische Funktionen*.



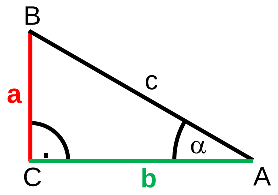
$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

Sinusfunktion



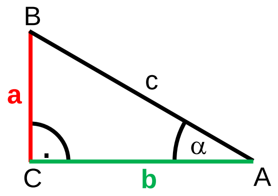
$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

Kosinusfunktion



$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

Tangensfunktion



$$\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$$

Kotangensfunktion

<u>Merke</u>

Die meisten Taschenrechner stellen die Kotangensfunktion nicht zur Verfügung.
Aus der Tabelle ist jedoch ersichtlich:

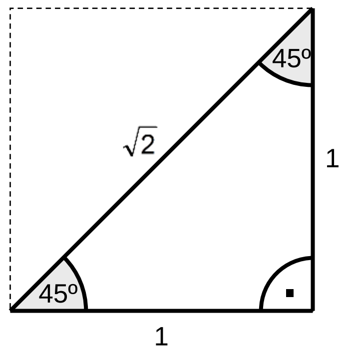
$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} = \cot\alpha \quad \rightarrow$$

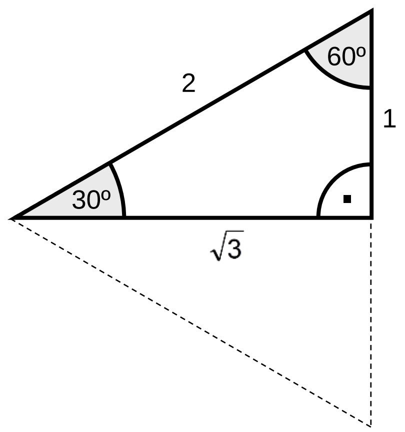
$$\boxed{\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

oder $\tan\alpha = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad a = \tan\alpha \cdot b$ somit: $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{b}{\tan\alpha \cdot b} = \frac{1}{\tan\alpha}$

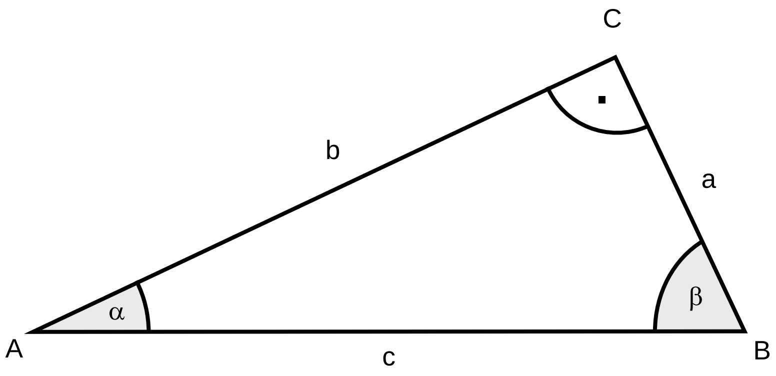
15.4 Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionswerten

Kommen in rechtwinkligen Dreiecken Winkelgrössen von 30º und 60º oder 45º vor, so ergeben sich besondere Werte für die Winkelfunktionen.





α in Bogenmass	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
α in º	0º	30º	45º	60º	90º
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert
$\cot\alpha$	nicht definiert	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



Die folgenden Beziehungen lassen sich aus der nebenstehenden Zeichnung herleiten.

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	(1)	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	(1)
$\cos\beta = \frac{a}{c}$	(2)	$\sin\beta = \frac{b}{c}$	(2)
$\beta = 90^o - \alpha$	(3)	$\beta = 90^o - \alpha$	(3)
Aus (1) und (2) folgt $\rightarrow$ $\sin\alpha = \cos\beta$	(4)	Aus (1) und (2) folgt $\rightarrow$ $\cos\alpha = \sin\beta$	(4)
(3) in (4) $\rightarrow$ $\underline{\underline{\sin\alpha = \cos(90^o - \alpha)}}$		(3) in (4) $\rightarrow$ $\underline{\underline{\cos\alpha = \sin(90^o - \alpha)}}$	

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	(1)	$\cot\alpha = \frac{b}{a}$	(1)
$\cot\beta = \frac{a}{b}$	(2)	$\tan\beta = \frac{b}{a}$	(2)
$\beta = 90^o - \alpha$	(3)	$\beta = 90^o - \alpha$	(3)
Aus (1) und (2) folgt $\rightarrow$ $\tan\alpha = \cot\beta$	(4)	Aus (1) und (2) folgt $\rightarrow$ $\cot\alpha = \tan\beta$	(4)
(3) in (4) $\rightarrow$ $\underline{\underline{\tan\alpha = \cot(90^o - \alpha)}}$		(3) in (4) $\rightarrow$ $\underline{\underline{\cot\alpha = \tan(90^o - \alpha)}}$	

Merke

Der Sinus eines Winkel ist gleich dem Kosinus seines Ergänzungswinkels (Komplementwinkel)

z.B. sin 60º = cos 30º

$$\boxed{\begin{gathered}\sin\alpha = \cos(90^o - \alpha)\\ \cos\alpha = \sin(90^o - \alpha)\end{gathered}}$$

Der Tangens eines Winkel ist gleich dem Kotangens seines Ergänzungswinkels (Komplementwinkel)

z.B. tan 75º = cot 15º

$$\boxed{\begin{gathered}\tan\alpha = \cot(90^o - \alpha)\\ \cot\alpha = \tan(90^o - \alpha)\end{gathered}}$$

15.5 Ermitteln der Winkelfunktionswerte mit dem Taschenrechner

Beispiel: Sie wollen den Sinus von 35º 15' 30'' ermitteln!

Vorgehen

1. Winkelsystem auf Altgrad einstellen → *DEG* bei HP, *DRG* bei Texas
2. Winkel in Altgrad umwandeln → 35,26º (auf zwei Stellen gerundet)
3. Sinustaste betätigen → 0,58 (auf zwei Stellen gerundet)
4. Resultat: sin 35,26º = 0,58

Beispiel: Sie wissen, dass der tan α =0,88 beträgt und möchten den dazugehörigen Winkel ermitteln!

Vorgehen

1. Winkelsystem auf Altgrad einstellen → *DEG* bei HP, *DRG* bei Texas
2. Verhältnis eintippen → 0,88
3. Arcustangenstaste (*TAN*$^{-1}$ bei HP, *INV TAN* bei Texas) betätigen → 41,35º (auf zwei Stellen gerundet)
4. Resultat: arc tan 0,88 = 41,35º

Beispiele (Resultate auf 2 Stellen gerundet)

1. Geg: sin α = 0,99
   Ges: Winkel α = ?

   Lösung:

   Winkel α = 81,89º

2. Geg: Winkel δ = 80º
   Ges: tan δ = ?

   Lösung:

   tan δ = 5,67

3. Geg: Winkel β = 75º
   Ges: cot β = ?

   Lösung:

   cot β = tan (90º-β) = tan 15º = 0,27

4. Geg: Winkel α = π/8 rad
   Ges: cos α = ?

   Lösung:

   π/8 rad = 22,50º → cos 22,50º = 0,92

5. Geg: cot λ = 0,12
   Ges: Winkel λ = ?

   Lösung:

   $\tan\lambda = \frac{1}{\cot\lambda} = \frac{1}{0{,}12} = 8{,}33$

   Winkel λ = 83,16º

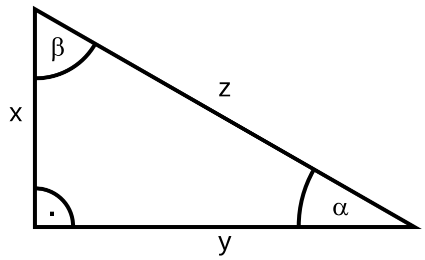
6. Geg: Winkel α = 30º
   Ges: cos α = ?

   Lösung:

   cos α = 0,87

15.6 Übungen

1. Der sin α, sin β, cot α und cot β sollen in dem nebenstehenden Dreieck durch das Verhältnis der Seiten ausgedrückt werden.



2. Berechnen Sie die Werte folgender Winkelgrössen (auf 4 Stellen gerundet):

a) sin 45º20‘	b) cos 88º10‘	c) sin 10º40‘	d) sin 63º50‘	e) cos 33º30‘	f) cos 87º20‘
g) cos 45º00‘	h) sin 45º00‘	i) cos 79º10‘	j) sin 10º40‘	k) sin 30º00‘	l) cos 4º50‘

3. Berechnen Sie die Winkel von folgenden Werten (Winkel auf 2 Stellen gerundet, Dezimalformat):

a) sin α = 0,78	b) cos β = 0,34	c) cot δ = 8,37	d) tan γ = 1,00	e) sin φ = 0,15	f) cos λ = 0,75
g) tan γ = 2,50	h) cot δ = 5,00	i) sin α = 0,50	j) cos λ = 1,00	k) tan γ = 99,99	l) cot δ = 1,55

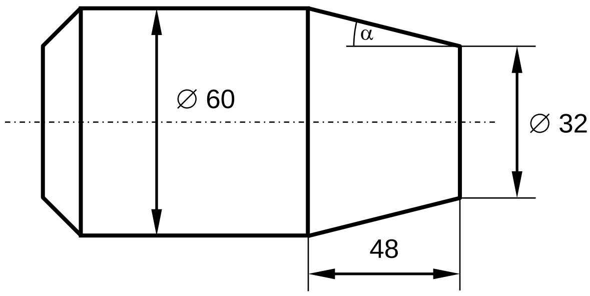
4. Zeichen Sie die Sinus- und die Kosinusfunktion von 0º bis 360º auf (in 10º Gradschritten). Die x-Achse entspricht dem Winkel und die y-Achse dem Funktionswert.
Damit die Resultate vergleichbar sind verwenden Sie den folgenden Massstab: 360º entspricht 18 cm (x-Achse) und eine 1 entspricht 5 cm (y-Achse).

5. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind: a = 7 cm und α = 40º. Berechnen Sie die Grösse des dritten Winkels und die Längen der übrigen Seiten.

6. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind: a = 38 mm und c = 62 mm. Berechnen Sie die beiden Winkel α, β und die Seite b.

7. Die Steigung einer Strasse wird mit 12% angegeben. Wie gross ist der Steigungswinkel?

8. Wie gross ist der Winkel α am skizzierten Drehstück?



9. Die Spitze eines Schornsteins erblickt man aus 125 m Entfernung unter dem Erhebungswinkel α = 24º 20’. Welche Höhe hat der Schornstein, wenn die Augenhöhe des Beobachters 1,4 m beträgt?

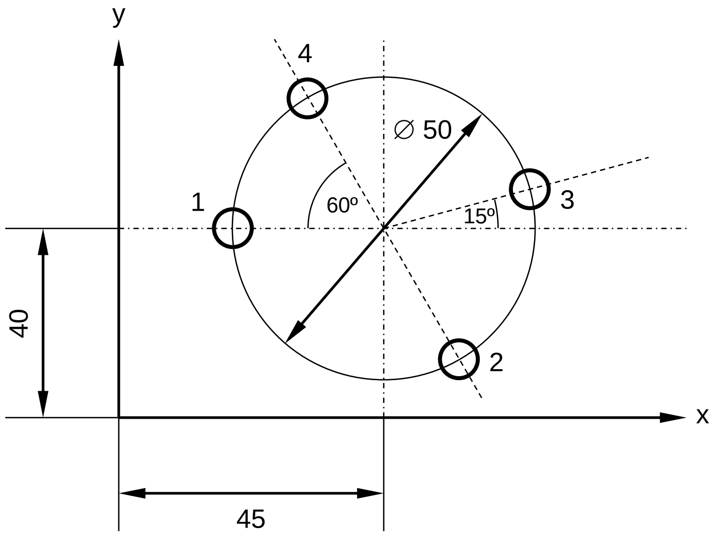
10. Ein Beobachter steht in den Dünen 6 m über dem Meeresspiegel und sieht die Spitze eines 45 m hohen Leuchtturmes unter dem Erhebungswinkel α = 3º 20’. Wie weit ist der Beobachter von dem Leuchtturm entfernt?

11. Eine Wetterwarte lässt einen Messballon aufsteigen. Ein Beobachter, der 650 m entfernt ist, sieht den Messballon unter einem Winkel von 24º zur Horizontalen. Wie weit war der Ballon in diesem Augenblick vom Beobachter entfernt, wenn er senkrecht aufgestiegen ist?

12. Ein gerader Kegel hat einen Durchmesser von 26 cm und einen Spitzenwinkel γ = 33º 10’. Wie gross ist der Rauminhalt des Kegels?

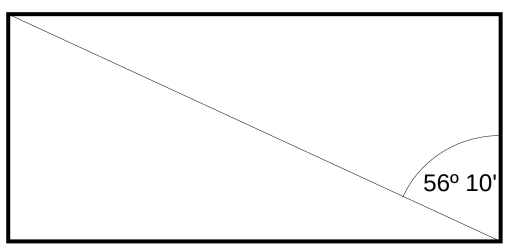
13. Welche Höhe hat ein Baum, wenn sein Schatten 58 m lang ist, und die Sonnenstrahlen mit dem Erdboden einen Winkel von 23º 30’ bilden.

14. Für eine NC-gesteuerte Bohrmaschine müssen die Bohrungen 1 bis 4 in den x-y-Koordinaten programmiert werden.
Berechnen Sie die x-y Abstände!



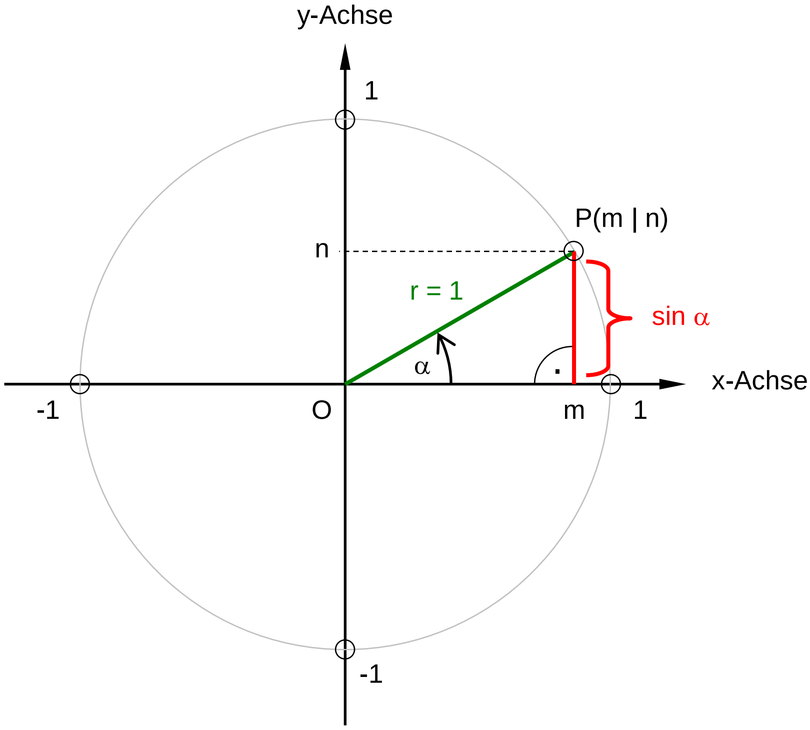
15. Ein kugelförmiger Wasserbehälter befindet sich auf einem 15 m hohen Stahlgerüst. Sein Durchmesser wird von einem Punkt, der in waagrechter Richtung 250 m vom Fussmittelpunkt des Gerüstes entfernt ist, unter einem Winkel von 2º 30’ gesehen (Augenhöhe: 1,6 m). Berechnen Sie den Durchmesser des Wasserbehälters unter der Annahme, dass der Sehstrahl den höchsten Punkt des Wasserbehälters trifft.

16. Berechnen Sie die Seiten und die Diagonale des Rechtecks, wenn die Fläche des Rechtecks 47,48 m^2 beträgt!



15.7 Sinusfunktion am Einheitskreis

Zeichnet man mit Hilfe des Einheitskreisverfahrens (Radius mit der Längeneinheit 1) ein rechtwinkliges Dreieck, so ist der Zahlenwert der Länge der Gegenkathete gleich dem Sinuswert sin α.



Beweis

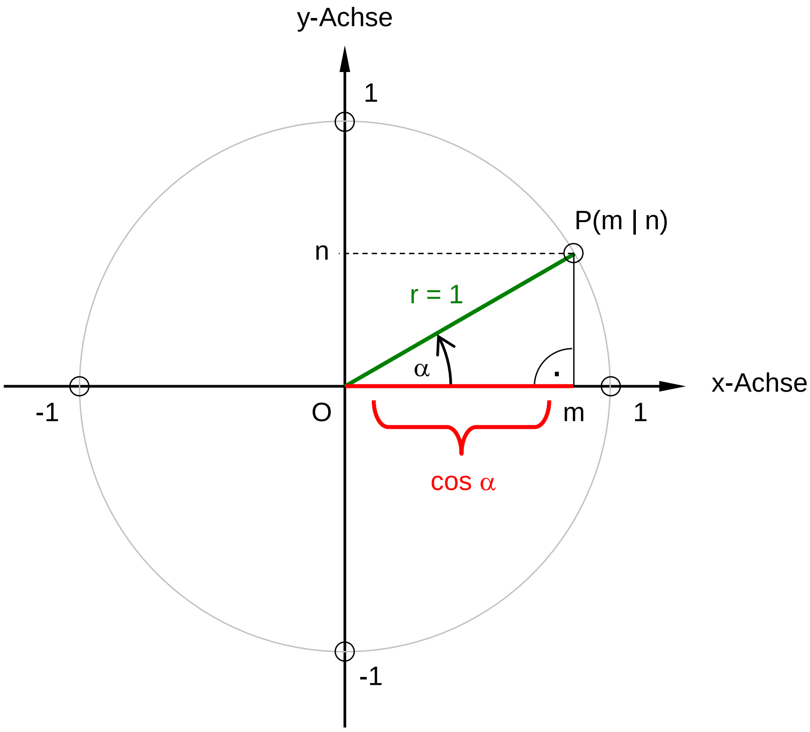
$$\sin\alpha = \frac{n}{r} = \frac{n}{1} \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = n$$

Weitere Erkenntnisse

Aus der nebenstehenden Zeichnung ist ersichtlich, dass zwischen dem Winkel $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ die Sinusfunktion positiv ist und immer ≤ 1.
Zwischen dem Winkel $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ ist die Sinusfunktion negativ und immer ≥ -1.

15.8 Kosinusfunktion am Einheitskreis

Auch hier ist es zweckmässig die Konstruktion, wie schon beim Sinus, am Einheitskreis vorzunehmen. So erhält man als Kosinuswert immer die Länge der Ankathete.



Beweis

$$\cos\alpha = \frac{m}{r} = \frac{m}{1} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = m$$

Weitere Erkenntnisse

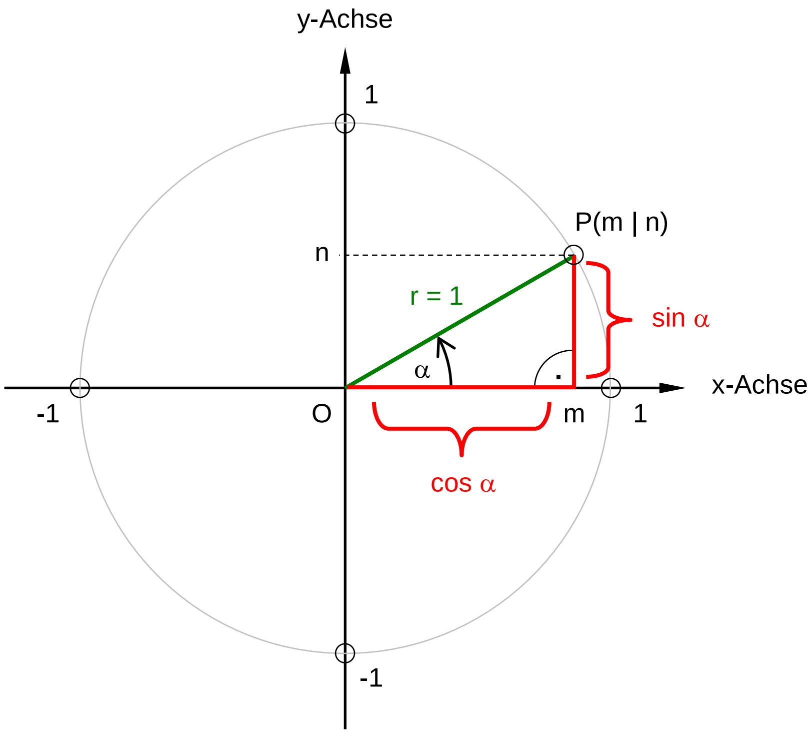
Aus der nebenstehenden Zeichnung ist ersichtlich, dass zwischen dem Winkel $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ bzw. $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ die Kosinusfunktion positiv ist und immer ≤ 1.
Zwischen dem Winkel $90^\circ < \alpha < 270^\circ$ ist die Kosinusfunktion negativ und immer ≥ -1.

15.9 Weitere Zusammenhänge

Aufbauend auf der Sinus- bzw. Kosinusfunktion am Einheitskreis, können noch folgende Beziehungen abgeleitet werden:

$$\tan\alpha = \frac{n}{m} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{m}{n} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$



Zum Schluss wenden wir noch den Satz von Pythagoras an:

$n^2 + m^2 = 1^2 = 1$ bzw.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Zusammenfassung

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$
$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

$$\tan\alpha = \cot(90° - \alpha)$$
$$\cot\alpha = \tan(90° - \alpha)$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

15.10 Übungen

1. Zwei Kräfte $F_1 = 120$ N und $F_2 = 90$ N wirken am gleichen Angriffspunkt im rechten Winkel zueinander. Wie gross ist der Betrag ihrer Resultierenden und wie gross ist der Winkel, zwischen der Resultierenden und der Kraft F_1?

2. Unter einem Winkel von 45º wirken zwei Kräfte $F_1 = 220$ N und $F_2 = 140$ N am gleichen Angriffspunkt.

   Gesucht:
   a) der Betrag der resultierenden Kraft
   b) und der Winkel zwischen den Wirklinien der Resultierenden und der Kraft F_2.

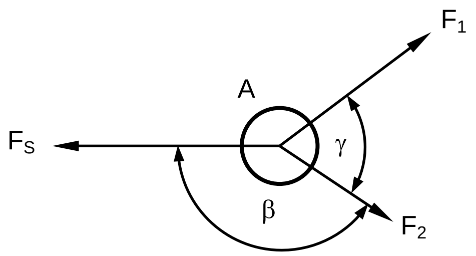
3. Unter einem Winkel von 135º wirken zwei Kräfte $F_1 = 100$ N und $F_2 = 250$ N am gleichen Angriffspunkt.

   Gesucht:
   a) der Betrag der resultierenden Kraft
   b) und der Winkel zwischen den Wirklinien der Resultierenden und der Kraft F_2.

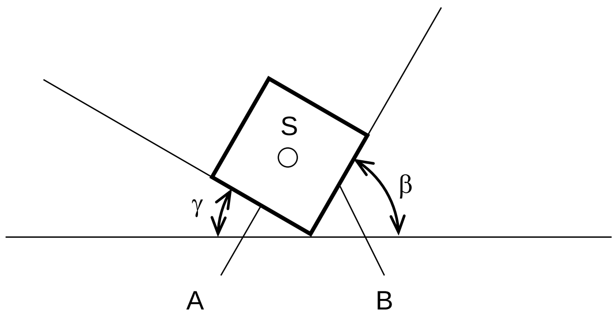
4. Bestimmen Sie grafisch und rechnerisch die Resultierende aus zwei Geschwindigkeiten 6 m/s und 15 m/s, die einen Winkel von 75º einschliessen. Geben Sie die Richtung in Bezug auf die grössere Geschwindigkeit an.

5. Zwei Spannkräfte ziehen mit den Kräften $F_1 = 500$ N und $F_2 = 300$ N an einem Pfosten A unter einem Winkel $\gamma = 80º$ zueinander.

   Gesucht:
   a) der Betrag der Spannkraft F_S, die den Kräften F_1 und F_2 das Gleichgewicht hält,
   b) der Winkel β.



6. Ein prismatischer Körper mit der Gewichtskraft von 750 N liegt auf zwei unter den Winkel $\gamma = 35º$ und $\beta = 55º$ zur Waagrechten geneigten ebenen Flächen auf. Wie gross sind die Stützkräfte an den Flächen A und B?



7. Ein Flugzeug fliegt gegenüber der Luft mit 80 m/s. Wie lange braucht es zum Überfliegen einer 400 km langen Strecke im Hin- bzw. Rückflug bei Windstille?
   Wie lange braucht das Flugzeug bei einem konstanten Rückenwind von 20 m/s in Richtung der Flugstrecke für eine Strecke? Wie lange braucht das Flugzeug bei einem Wind von 20 m/s quer zur Flugstrecke für eine Strecke und unter welchem Winkel zur Flugstrecke muss die Flugachse gerichtet sein?