

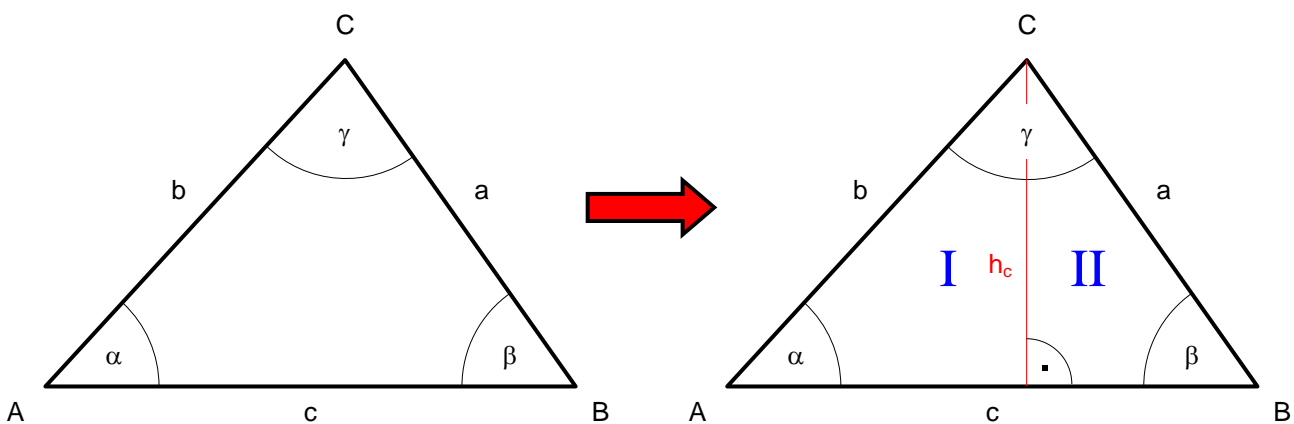
## 17 Schiefwinklige Dreiecke

### 17.1 Einleitung

Die Winkelfunktionen gelten nur für die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke. Schiefwinklige Dreiecke kann man mit diesen Funktionen nur berechnen, wenn das schiefwinklige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird.

### 17.2 Sinussatz

Sind **eine Seite und zwei Winkel** oder **zwei Seiten und ein Gegenwinkel** bekannt, so muss der Sinussatz angewendet werden!



$$\Delta \text{ I: } \sin \alpha = \frac{h_c}{b} \rightarrow h_c = b \cdot \sin \alpha$$

$$\Delta \text{ II: } \sin \beta = \frac{h_c}{a} \rightarrow h_c = a \cdot \sin \beta$$

somit:

$$\begin{array}{c} \text{aus} \\ \triangle \text{ I} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{aus} \\ \triangle \text{ II} \end{array} \\ h_c = h_c$$

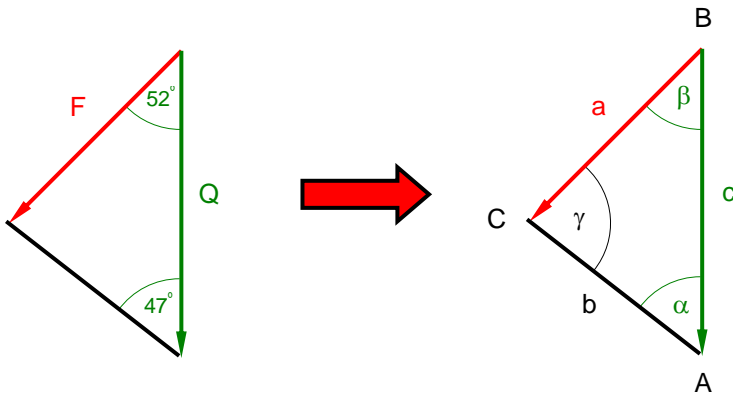
$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Daraus folgt der Sinussatz

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

**Beispiel**

In einem Kräftdreieck gemäss nachfolgender Skizze soll die Kraft  $F$  berechnet werden, wenn die Kraft  $Q = 800 \text{ N}$  ist.



Geg:  $Q = 800 \text{ N}$ ,  $\angle\alpha = 47^\circ$ ,  $\angle\beta = 52^\circ$

Ges:  $F = ?$

**Lösung:**

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad (1)$$

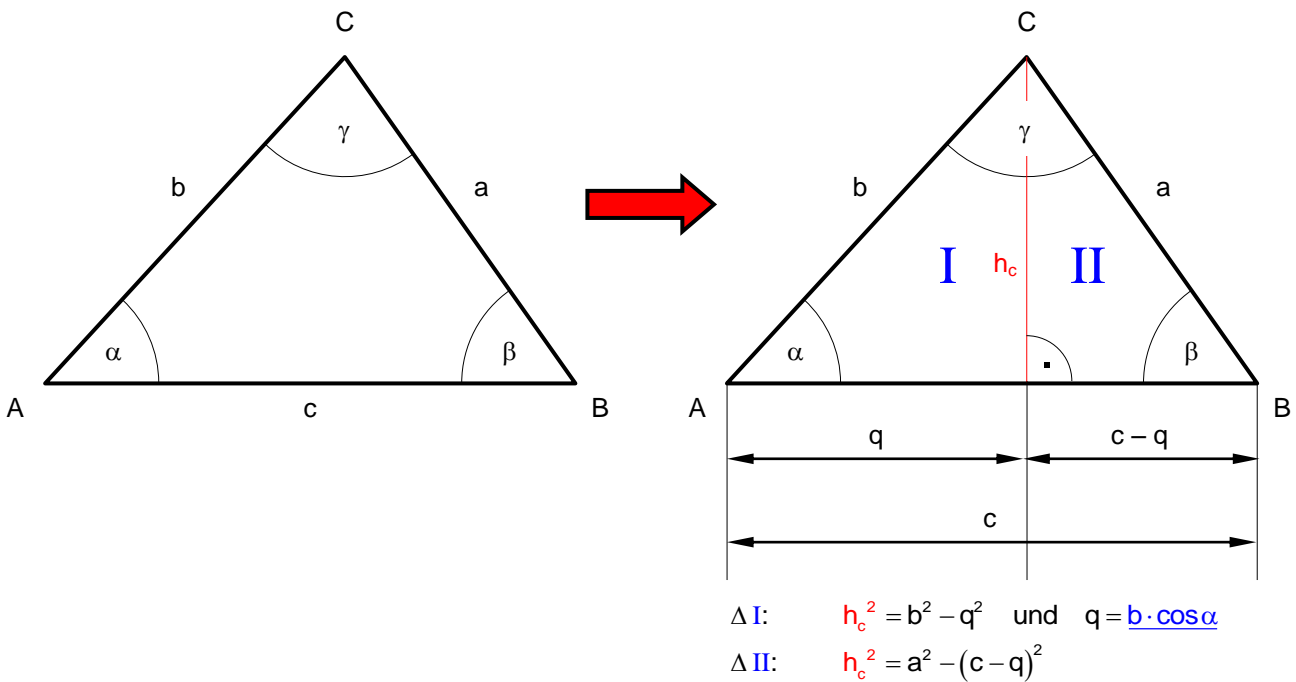
$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \quad (2)$$

somit:

$$F \cong a = c \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = 800 \text{ N} \cdot \frac{\sin 47^\circ}{\sin(180^\circ - 47^\circ - 52^\circ)} = \underline{\underline{592.38 \text{ N}}}$$

## 17.3 Kosinussatz

Sind **drei Seiten** oder **zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel** bekannt, so muss der Kosinussatz angewendet werden!



somit:

$$\begin{aligned}
 & \text{aus } \triangle I \quad \text{aus } \triangle II \\
 & h_c^2 = h_c^2 \\
 & b^2 - q^2 = a^2 - (c - q)^2 \\
 & b^2 - q^2 = a^2 - (c^2 - 2cq + q^2) \\
 & b^2 - q^2 = a^2 - c^2 + 2cq - q^2 \\
 & a^2 = b^2 + c^2 - 2cq \\
 & \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{q = b \cdot \cos \alpha}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt der Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

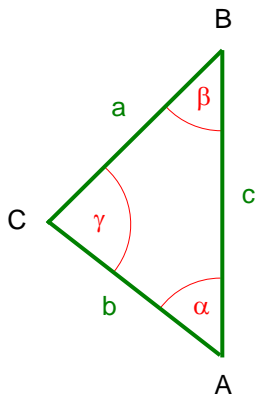
analog gilt:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

**Beispiel**

In einem Dreieck sind:  $a = 16.4 \text{ cm}$ ,  $b = 6.5 \text{ cm}$ ,  $c = 18 \text{ cm}$ . Berechnen Sie die Winkel des Dreiecks!



Geg:  $a = 16.4 \text{ cm}$ ,  $b = 6.5 \text{ cm}$ ,  $c = 18 \text{ cm}$

Ges:  $\angle\alpha = ?$ ,  $\angle\beta = ?$ ,  $\angle\gamma = ?$

**Lösung :**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \rightarrow$$

$$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{6.5^2 \text{ cm}^2 + 18^2 \text{ cm}^2 - 16.4^2 \text{ cm}^2}{2 \cdot 6.5 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm}} = \underline{0.42} \rightarrow \angle\alpha = \arccos 0.42 = \underline{\underline{65.43^\circ}}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \rightarrow$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2 \rightarrow$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{16.4^2 \text{ cm}^2 + 18^2 \text{ cm}^2 - 6.5^2 \text{ cm}^2}{2 \cdot 16.4 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm}} = \underline{0.93} \rightarrow \angle\beta = \arccos 0.93 = \underline{\underline{21.13^\circ}}$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 65.43^\circ - 21.13^\circ = \underline{\underline{93.44^\circ}}$$

## 17.4 Übungen

1. Eine Kraft  $F = 480 \text{ N}$  ist in zwei Komponenten zu zerlegen, deren Richtung mit der Richtung der gegebenen Kraft die Winkel  $\alpha = 10^\circ 20'$  und  $\beta = 36^\circ 50'$  bildet.  
Wie gross sind die Beträge der Komponenten?
2. Zwei Punkte A und B am Ufer eines Flusses sind  $45 \text{ m}$  voneinander entfernt. Am anderen Ufer steht ein Baum C. Es werden folgende Winkel gemessen:  $\angle \overline{CAB} = 72^\circ 20'$  und  $\angle \overline{CBA} = 83^\circ 50'$ .  
Wie breit ist der Fluss?
3. Zwei Kräfte  $F_1 = 390 \text{ N}$  und  $F_2 = 140 \text{ N}$  wirken an einem Punkt unter dem Winkel  $\alpha = 54^\circ 10'$ .  
Wie gross ist der Betrag der Resultierenden R, und welche Winkel bildet ihre Richtung mit der Richtung beider Kräfte?
4. Zwei Orte A und B liegen auf verschiedenen Seiten eines Sees. Zwei Strassen, die von den Orten A und B geradlinig ausgehen, treffen sich in C unter einem Winkel von  $57^\circ 40'$ .  
Wie weit ist der Ort A von dem Ort B entfernt (Luftlinie), wenn die Entfernung von B bis C  $5.4 \text{ km}$  und die Entfernung von A bis C  $8.4 \text{ km}$  beträgt?
5. Zwei Personenkraftwagen A und B (A:  $55 \text{ km/h}$ ; B:  $68 \text{ km/h}$ ) fahren gleichzeitig von einer Strassenkreuzung in verschiedene Richtungen geradlinig ab. Die Strassen bilden einen Winkel von  $106^\circ 40'$ .  
Wie weit sind die beiden Personenkraftwagen nach 25 Minuten voneinander entfernt?