18 Gleichungen 1. Grades mit mehreren Unbekannten

18.1 Einführung

Gegeben ist die Gleichung $3x+y=12$. Dies ist eine Gleichung 1. Grades mit zwei Variablen. Für x und y können unendlich viele Wertepaare eingesetzt werden, welche die Gleichung erfüllen.

Beispiel

x	1	-5	4	3	0	7
y	9	27	0	3	12	-9
3x + y	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**

Damit eindeutige Lösungen gefunden werden, sind Gleichungssysteme notwendig. Die folgenden zwei Gleichungen stellen ein Gleichungssystem ersten Grades mit zwei Variablen dar:

$3x+y=12$ (1)

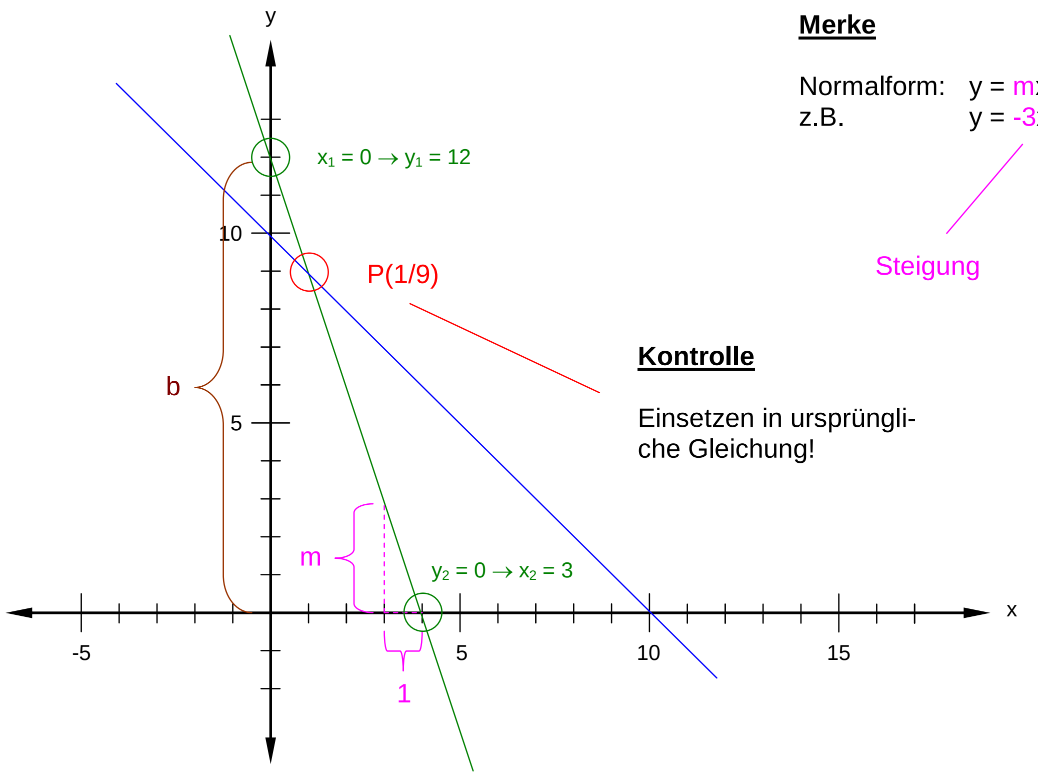
$x+y=10$ (2)

Es ist ein Wertepaar zu suchen, das beide Gleichungen erfüllt. Wir versuchen nun, solche Gleichungssysteme aufzulösen. Dabei lassen sich verschiedene Methoden anwenden.

18.2 Grafische Lösung

Aus (1): $y=-3x+12$

Aus (2): $y=-x+10$



Merke

Normalform: y = mx + b
z.B. y = -3x + 12

Steigung y- Achsenabschnitt

Kontrolle

Einsetzen in ursprüngliche Gleichung!

Zusammenfassung

Um die Lösungsmenge grafisch darstellen zu können, bringt man beide Gleichungen durch Äquivalenzumformung auf die Normalform y = mx + b. Der Graf der Lösungsmenge einer jeden Gleichung ist eine Gerade im Koordinatensystem. Um die Geraden zu zeichnen, benötigt man mindestens zwei Punkte pro Gerade. Am einfachsten bestimmt man die beiden Punkte einer Gerade wie folgt: Zuerst $x_1 = 0$ annehmen $\rightarrow$ y_1 bestimmen, danach $y_2 = 0$ annehmen $\rightarrow$ x_2 bestimmen).

Die Koordinaten des Schnittpunktes P(x/y) sind das einzige Zahlenpaar, das beide Gleichungen erfüllt. Anhand des Beispiels erkennt man, dass es drei Möglichkeiten gibt:

1. die beiden Geraden schneiden sich $\rightarrow$ es gibt eine Lösung
2. die beiden Geraden sind deckungsgleich $\rightarrow$ unendlich viele Lösungen
3. die beiden Geraden sind parallel $\rightarrow$ es gibt keine Lösung

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen lässt sich mit Hilfe einer Zeichnung nicht genau bestimmen. Es ist deshalb notwendig die Lösungsmenge rechnerisch zu ermitteln.

Merke

Wenn eine Aufgabe zwei Unbekannte aufweist, müssen zwei Gleichungen (Gleichungssystem) aufgestellt werden, damit die Unbekannten eindeutig bestimmt werden können.

Allgemein: Anzahl Unbekannte = Anzahl Gleichungen

18.3 Einsetzungsmethode (Substitutionsmethode)

Eine weitere Methode beim Auflösen von Gleichungssystemen ist die *Einsetzungsmethode*. Man bildet die Normalform für eine Variable (z.B. y = ...) aus einer Gleichung und setzt den erhaltenen Term in den anderen Gleichungen ein. Das Verfahren kann so lange fortgesetzt werden, bis man bei einer Gleichung mit einer Variablen angelangt ist.

Beispiel

$3x + y = 12$ (1)

$x + y = 10$ (2)

Gleichung (1) wird nach y umgeformt: $y = 12 - 3x$ (3)

Danach wird (3) in (2) eingesetzt: $x + \underbrace{12 - 3x}_{y} = 10$ (4)

Gleichung (4) wird gelöst: $-2x = -2 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$ (5)

Nun wird (5) noch in (3) eingesetzt: $y = 12 - 3 = \underline{\underline{9}}$

18.4 Gleichsetzungsmethode

Jede der beiden Gleichungen wird nach einer Unbekannten (z.B. nach x) aufgelöst. Danach können die Gleichungen gleichgesetzt werden.

Beispiel

	$2x + y = 7$	(1)
	$5x + y = 13$	(2)
Gleichung (1) wird nach y umgeformt:	$y = 7 - 2x$	(3)
Gleichung (2) wird nach y umgeformt:	$y = 13 - 5x$	(4)
Somit gilt (3) = (4):	$7 - 2x = 13 - 5x$	(5)
Gleichung (5) wird gelöst:	$7 - 2x = 13 - 5x$ $3x = 6$ $x = \underline{\underline{2}}$	(6)
Nun wird (6) noch in (3) eingesetzt:	$y = 7 - 2x = 7 - 4 = \underline{\underline{3}}$	

Die Gleichungen können auch so gelöst werden (Auflösung nach x):

	$2x + y = 7$	(1)
	$5x + y = 13$	(2)
Gleichung (1) wird mit 5 erweitert:	$10x + 5y = 35$	(3)
Gleichung (2) wird mit 2 erweitert:	$10x + 2y = 26$	(4)
Gleichung (3) wird nach 10x aufgelöst:	$10x = 35 - 5y$	(5)
Gleichung (4) wird nach 10x aufgelöst:	$10x = 26 - 2y$	(6)
Somit gilt (5) = (6):	$35 - 5y = 26 - 2y$	(7)
Gleichung (7) wird gelöst:	$35 - 5y = 26 - 2y$ $3y = 9$ $y = \underline{\underline{3}}$	(8)
Nun wird (8) noch in (5) eingesetzt:	$10x = 35 - 5y = 35 - 15 = 20 \quad \rightarrow \quad x = \underline{\underline{2}}$	

18.5 Additionsmethode

Auch für dieses Verfahren soll das schon bekannte Gleichungssystem angewendet werden.

Beispiel 1 (x eliminieren)

	$x+4y=12$	(1)
	$x+2y=10$	(2)
Gleichung (2) wird mit -1 multipliziert:	$-x-2y=-10$	(3)
Gleichungen (1) und (3) werden addiert:	$2y=2$	(4)
Gleichung (4) wird gelöst:	$y=\underline{\underline{1}}$	(5)
Gleichung (5) wird in (1) eingesetzt:	$x+4y=12$ $x+4=12$ $x=\underline{\underline{8}}$	

Beispiel 2 (y eliminieren)

	$5x+3y=21$	(1)
	$7x+8y=37$	(2)
Gleichung (1) wird mit 8 multipliziert:	$40x+24y=168$	(3)
Gleichung (2) wird mit -3 multipliziert:	$-21x-24y=-111$	(4)
Gleichungen (3) und (4) werden addiert:	$19x=57$	(5)
Gleichung (5) wird gelöst:	$x=\underline{\underline{3}}$	(6)
Gleichung (6) wird in (1) eingesetzt:	$15+3y=21$ $3y=6$ $y=\underline{\underline{2}}$	

Merke

> Oft müssen beide Gleichungen durch Multiplikation mit einer Zahl umgeformt werden, bevor man die Additionsmethode anwenden kann.

18.6 Übungen

Bestimmen Sie von folgenden Gleichungssystemen die Lösungsmenge grafisch:

1. $$\begin{aligned} 6y - 8 &= 4x \\ 7y - 3x &= 2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 8y + 5x &= 16 \\ 4x - 2y &= -10 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 4x - 2y &= 0 \\ 3x - 1{,}5y &= 6 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie von folgenden Gleichungssystemen die Lösungsmengen:

4. $$\begin{aligned} 2x + 2y &= 20 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 10x + 2y &= 80 \\ 3x + y &= 26 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 3x + 7y &= 60 \\ 2x + 18y &= 80 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 18x - 2y &= 12 \\ 3x + \frac{y}{3} &= 10 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 3x - 3y &= 3 \\ 2x + y &= 11 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} 4x - 2y &= 16 \\ 3x + y &= 17 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 4x + 6y &= -36 \\ 3x + 2y &= -17 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} 30x - 28y &= 100 \\ 5x - 2y &= 30 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

18.7 Übungen

1. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 27. Multipliziert man die erste Zahl mit 2 und die zweite mit 3, so wird die Differenz gleich 41. Wie heissen die beiden Zahlen?

2. Die kleinere von zwei Zahlen ist der achte Teil der grösseren Zahl. Die Differenz der beiden Zahlen beträgt 63. Wie heissen die beiden Zahlen?

3. Die Quersumme einer zweiziffrigen Zahl ist 12. Subtrahiert man 18 von dieser Zahl, so erhält man eine zweiziffrige Zahl mit denselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge. Wie heisst die Zahl?

4. Eine Seite eines rechteckigen Bügeltisches ist 40 cm länger als die andere. Der gesamte Umfang des Bügeltisches beträgt 3,60 m. Wie lang sind die beiden Seiten?

5. In einem Dreieck ist die Summe von zwei Winkeln 111° 20'. Die Differenz der beiden Winkel beträgt 30° 10'. Wie gross sind die beiden Winkel?

6. Aus einer Leiste von 1,56 m Länge soll ein Bilderrahmen hergestellt werden. Die Länge des Bilderrahmens soll 1,6 mal länger als die Breite sein. Welche Masse erhält der Bilderrahmen?

7. Von zwei runden Teppichen ist der Durchmesser des einen 10 cm länger. Der Flächeninhalt des grösseren Teppichs ist um 24,335 dm^2 grösser. Welche Durchmesser haben die beiden Teppiche?

8. Gibt ein Lehrling einem zweiten Lehrling 3 Fr. ab, so haben beide gleich viel Geld; gibt aber der zweite Lehrling dem ersten 2 Fr., so hat der erste sechsmal soviel wie der zweite. Wieviele Franken hat jeder?

9. Ein Motorboot fährt in drei Stunden 48,27 km den Strom abwärts. Für den Rückweg braucht es fünf Stunden. Wie schnell würde das Boot in stillem Wasser fahren, und wie hoch ist die Geschwindigkeit der Strömung?

10. Zwei Arbeiter A und B erhalten zusammen 960 Franken Wochenlohn (fünf Tage). Wieviele Franken erhält jeder, wenn A in zehn Tagen 185 Franken mehr verdient als B in sieben Tagen?

11. Die jährlichen Zinsen zweier Kapitalien von 7'000 Franken und 15'000 Franken betragen zusammen 1'170 Franken. Zu wieviel Prozent ist das erste Kapital ausgeliehen, wenn das zweite Kapital um 1% niedriger verzinst wird als das erste?

12. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 40 cm. Ein Schenkel ist 5 cm länger als die Grundseite. Wie lang sind Schenkel und Grundseite?

13. Jemand hat für seinen Urlaub von bestimmter Dauer eine bestimmte Summe Geldes gespart. Gibt er täglich 36 Franken aus, so kommt er mit dem Geld neun Tage länger aus als vorgesehen; gibt er aber täglich 51 Franken aus, so muss er seinen Urlaub um einen Tag abkürzen. Wie lange sollte seine Urlaubsreise dauern, und wieviel Geld hatte er gespart?

14. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 6. Das Zehnfache der grösseren Zahl ist gleich dem Fünfzehnfachen der kleineren Zahl. Wie heissen die beiden Zahlen?

15. Die Quersumme einer zweiziffrigen Zahl ist 12. Stellt man die Ziffern um, so ist die neue Zahl 1 ¾ mal kleiner als die ursprüngliche. Wie heisst die ursprüngliche Zahl?

16. Wenn man die Kante a eines Würfels um 2 m verlängert, dann wächst die Würfeloberfläche um 84 m^2. Wie lang ist die Würfelkante a [m]?