20 Proportionen

20.1 Einführung

Gleichbenannte Grössen können auf zwei Arten miteinander verglichen werden.

1. Man untersucht, um wieviel die eine Grösse grösser oder kleiner ist als die andere. Man bildet die Differenz beider Grössen. Das Ergebnis ist eine benannte Zahl (besitzt eine Einheit).

Zu vergleichen:	120 Fr. und 40 Fr.	(gleichbenannte Grössen)
	120 Fr. – 40 Fr. = 80 Fr.	(arithmetisches Verhältnis)

2. Man fragt, wieviel die eine Grösse grösser ist als die andere. Das Ergebnis ist eine unbenannte Zahl.

Zu vergleichen:	120 Fr. und 40 Fr.	(gleichbenannte Grössen)
	120 Fr. : 40 Fr. = 3	(geometrisches Verhältnis)

In diesem Kapitel soll nun die zweite Fragestellung weiter untersucht werden. Allgemein gilt:

$$\boxed{a : b = \frac{a}{b} \quad ; \quad a \in Q \quad ; \quad b \in Q \setminus \{0\}}$$

Beim Ausrechnen von Verhältnissen gelten alle Rechengesetze, die für das Bruchrechnen Anwendung finden. Werden zwei Verhältnisse zu einer Gleichung zusammengefasst, so erhalten wir eine Verhältnisgleichung oder Proportion:

$$\boxed{a : b = c : d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{oder} \quad a \cdot d = b \cdot c}$$

Produktengleichung

Das Produkt der *äusseren* Gliedern ist gleich dem Produkt der *inneren* Glieder.
Aus der Produktengleichung können folgende Proportionen abgeleitet werden:

$a : b = c : d$	bzw.	$b : a = d : c$
$a : c = b : d$		$b : d = a : c$
$d : b = c : a$		$c : a = d : b$
$d : c = b : a$		$c : d = a : b$

Aus dieser Aufstellung wird ersichtlich, dass eine Proportion wahr bleibt, wenn:
- die Innenglieder unter sich vertauscht werden
- die Aussenglieder unter sich vertauscht werden
- die Aussenglieder mit den Innenglieder vertauscht werden
- die beiden Seiten unter sich vertauscht werden

Fortlaufende Proportionen

Gilt $a : b = c : d$ und $a : b = e : f$, so kann auch eine fortlaufende Proportion geschrieben werden:

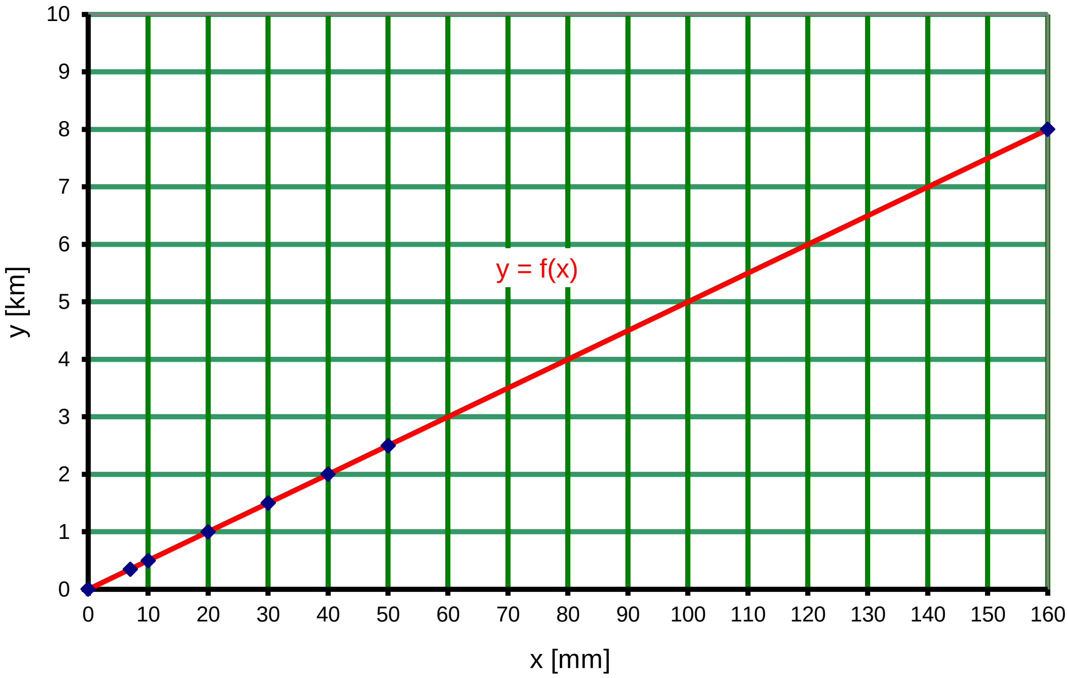
$$\boxed{a : b = c : d = e : f}$$

20.2 Direkte Proportionalität

Auf einer topographischen Karte (Massstab 1:50'000) werden Strecken gemessen (= x-Werte). Dann wird die dazugehörige wirkliche Strecke berechnet (= y-Werte).

x-Werte	y-Werte
7 mm 10 mm 20 mm 30 mm 40 mm 50 mm ↓	0,35 km 0,50 km 1,00 km 1,50 km 2,00 km 2,50 km ↓

Graphische Darstellung:



- Die graphische Darstellung im Koordinatensystem ergibt Punkte, die auf einer Geraden liegen, die durch den Nullpunkt geht.
- Bei der direkten Proportionalität ist der Quotient $\frac{y}{x}$ konstant.
- y erhält man, indem man x mit dem Proportionalitätsfaktor multipliziert
  $y = k \cdot x$ $\quad$ $k \neq 0 \rightarrow$ im Beispiel oben ist k = 50'000

Zwei Grössen heissen proportional zueinander, wenn ihr Quotient konstant ist.

Beispiele für direkte Proportionalität

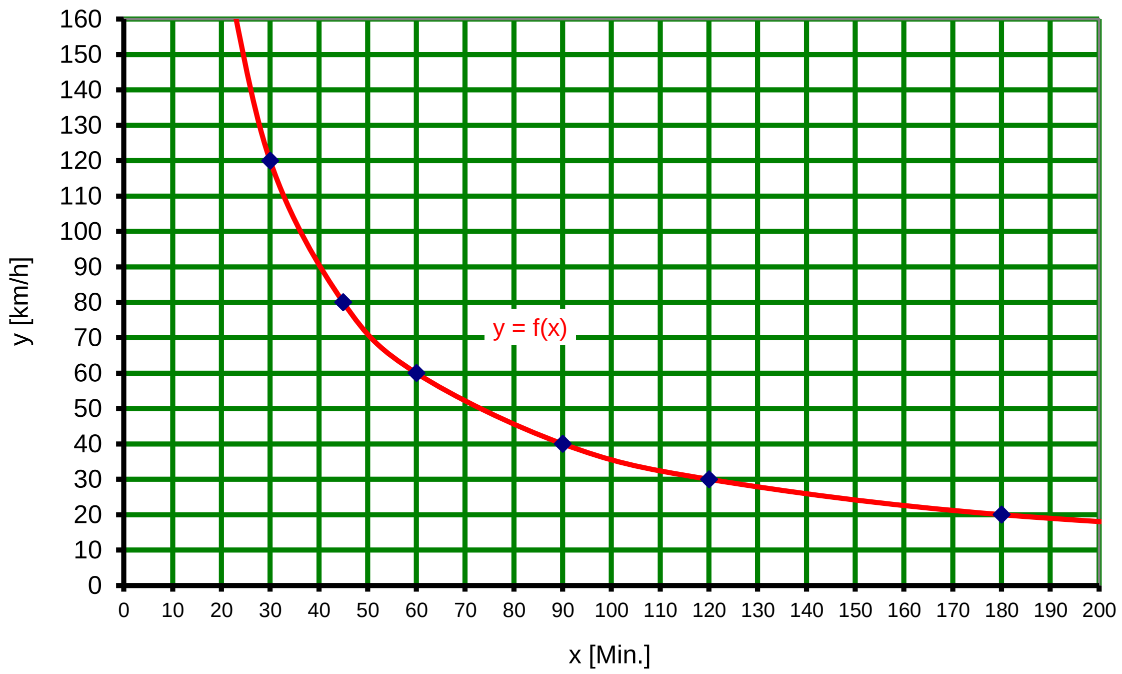
- Preis und Warenmenge (vorausgesetzt, der Preis einer Einheit bleibt gleich)
- Arbeitszeit und Lohn (solange der Stundenlohn gleich bleibt)
- Fahrpreis und Fahrstrecke
- Zurückgelegter Weg und Zeit (bei konstanter Geschwindigkeit)
- Umfang und Durchmesser beim Kreis

20.3 Umgekehrte (indirekte) Proportionalität

Wird eine Strecke (s = 60 km) mit verschiedenen Durchschnittsgeschwindigkeiten durchfahren, so erhält man verschiedene Fahrzeiten.

x-Werte	y-Werte
45 Min. 60 Min. 90 Min. 120 Min. 180 Min. 360 Min. ↓	80 km/h 60 km/h 40 km/h 30 km/h 20 km/h 10 km/h ↓

Graphische Darstellung:



- Die graphische Darstellung im Koordinatensystem ergibt Punkte, die auf einem Hyperbelast liegen.
- Bei der umgekehrten Proportionalität ist das Produkt x · y konstant (x · y = k).

- y erhält man, indem man k durch x dividiert.

  $y = \frac{k}{x}$, $k \in Q \setminus \{0\} \rightarrow$ im Beispiel oben ist k = 3'600

Zwei Grössen heissen indirekt proportional zueinander, wenn ihr Produkt konstant ist.

Beispiele für indirekte Proportionalität

- Umdrehungszahl und Radumfang
- Kraft und Länge des Hebelarms
- Arbeitszeit und Anzahl der Arbeiter
- Zeitbedarf und Geschwindigkeit

20.4 Übungen

1. 14 : 5 = 28 : x x = ?

2. x : (2x + 7) = 9 : 21 x = ?

3. Das Alter eines Sohnes verhält sich zu dem seines Vaters wie 6 : 13. Der Vater ist 28 Jahre älter als der Sohn. Wie alt ist jeder?

4. Die Zahl 63 soll in zwei Summanden zerlegt werden, dass diese beiden Zahlen sich zueinander verhalten wie 6 : 8. Wie heissen die beiden Zahlen?

5. Eine Pumpe soll 1‘000 Umdrehungen in der Minute machen. Der Antrieb erfolgt über ein Zahnrad mit 20 Zähnen, das 800 Umdrehungen macht. Berechnen Sie die Anzahl der Zähne des Zahnrades auf der Pumpwelle!

6. Wenn Mutter allein abwäscht, braucht sie dazu 35 Minuten. Wenn ihr Fritz dabei hilft, dauert es bloss 25 Minuten und wenn zusätzlich Vreni hilft, dann schaffen sie es zu dritt sogar in 15 Minuten. Wie lange braucht Vreni allein?

7. Ein Aquarium soll bis auf eine Wasserhöhe von 29 cm aufgefüllt werden. Dazu verwendet man einen Kessel, der 8 Liter fasst. Nach dem Einfüllen des ersten Kessels misst man 5 cm Wasserhöhe. Wie viele Liter Wasser muss man ins Aquarium insgesamt einfüllen?

8. Eine Gartenarbeit wird vom Gärtner A allein in 32 Tagen, von den Gärtnern A und B zusammen in 19 Tagen ausgeführt.

   a) Wie lange braucht B allein für die ganze Arbeit?
   b) Wie lange dauert die gesamte Arbeit, wenn A allein beginnt und B nach 21 Tagen bis zum Schluss mitarbeitet?

9. Für eine Gruppe von 34 Arbeitern, die alle gleich entlöhnt werden, betrug die Lohnsumme für 12 Arbeitstage 65'280 Fr. Welche Lohnsumme erhalten 45 Arbeiter für 18 Arbeitstage?

10. In 72 Tagen erhält man für ein Kapital von 320 Fr. einen Zins von 5,12 Fr. Welches ist beim gleichen Zinsfuss der Zins für ein Kapital von 475 Fr. in 135 Tagen?

11. Für 9 Meerschweinchen hat man in 24 Tagen 10,8 kg Futter verbraucht. Wie lange reicht ein Vorrat von 20,4 kg für 12 Meerschweinchen, wenn auf die gleiche Art gefüttert wird?

12. Eine Maschine vom Typ A, zwei vom Typ B und zwei vom Typ C benötigen für die Produktion einer gewissen Menge eines Artikels 5 Tage. Ersetzt man die Maschine A durch eine C, so werden 6 Tage benötigt. A allein braucht 20 Tage. Wie viele Tage würde eine Maschine vom Typ C allein brauchen?

13. Berechnen Sie x aus folgender Verhältnisgleichung:

$$(5x-35) \div (5x-21) = (5x+21) \div (5x-35)$$

14. Für die Ausführung einer Arbeit rechnet der Baumeister mit 12 Arbeitern und 2 Lehrlingen in 30 Tagen fertig zu werden, wobei die Arbeit zweier Lehrlinge der Arbeit eines Arbeiters entspricht. Nach 10 Tagen müssen 3 Arbeiter dringend auf einer anderen Baustelle arbeiten. Wie viele Tage verzögert sich die Arbeit?

15. Vier Personen A, B, C und D sind an einem Unternehmen beteiligt. Da sie in ganz verschiedener Weise daran mitwirken, ergibt sich eine recht komplizierte Verteilung des Gesamtgewinns von 34'500 Fr. Die Gewinnanteile von A und D verhalten sich wie 1 : 2, jene von A und C wie 2 : 3 und jene von B und C wie 5 : 6. Wie viel erhält jeder?

16. Bilden Sie eine fortlaufende Proportion (a : b : c = ? : ? : ?):

a) a : b = 3 : 4
b : c = 8 : 9

b) a : b = 12 : 7
a : c = 16 : 11