22 Funktionen

22.1 Darstellung von Funktionen

In den Naturwissenschaften, in der Technik und in der Wirtschaft spielen Funktionen eine grosse Rolle. Die wichtigsten Darstellungsarten sind:

1. Darstellung durch eine Gleichung

$y = 2x + 3$
$f(x) = 2x + 3$

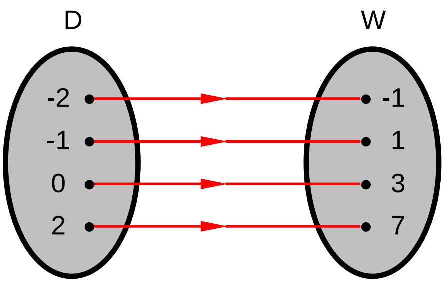
2. Darstellung durch eine Paarmenge

Die Paarmenge kann in beschreibender Form oder durch Angabe der Elemente angegeben werden. Die zweite Form ist nur für eine begrenzte Anzahl von Elementen geeignet.

$f = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = 2x + 3\}$
$f = \{(-2, -1), (-1, 1), (0, 3), (2, 7), \ldots\}$

3. Darstellung durch ein Pfeildiagramm

Bei der Zuordnung durch Pfeile werden die Elemente der Mengen zu einer Menge von „geordneten Paaren“ verbunden. Diese Art der Darstellung ist nur für eine geringe Anzahl von Elementen geeignet.



4. Darstellung in Tabellenform

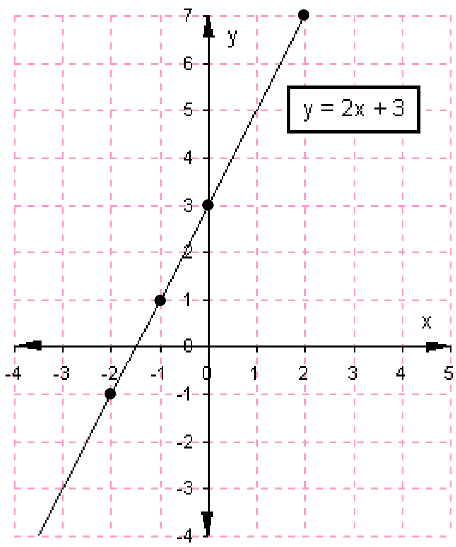
Jedem x-Wert ist ein y-Wert zugeordnet. Auch diese Art der Darstellung ist nur für eine geringe Anzahl

x	-2	-1	0	2	Definitionsmenge
y	-1	1	3	7	Wertemenge

5. Darstellung im Koordinatensystem

Die schwarze Gerade ist der Graph der Funktion. Jeder x-Koordinate eines Punktes ist eine y-Koordinate zugeordnet. Diese Darstellungsart eignet sich für unbegrenzt viele Punkte und wird hauptsächlich für Funktionsdarstellungen verwendet. Die schwarze Gerade ist also der Graph der Punktmenge

$f = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = 2x + 3\}$.



22.2 Empirische Funktionen

Die Darstellung einer Funktion mit Hilfe einer Funktionsgleichung wird häufig als *analytische Darstellung* der Funktion bezeichnet. Stammen die Funktionswerte hingegen aus Erfahrungen und Beobachtungen, so spricht man von *empirischen* Funktionen.
In der modernen Wissenschaft und Technik sind empirische Funktionen und ihre Interpretation sehr wichtig. Viele Zusammenhänge werden mit Hilfe eines Diagramms dargestellt. Man kann solche Diagramme mit einem Blick übersehen und erhält Aufschluss über die Art der Veränderungen.

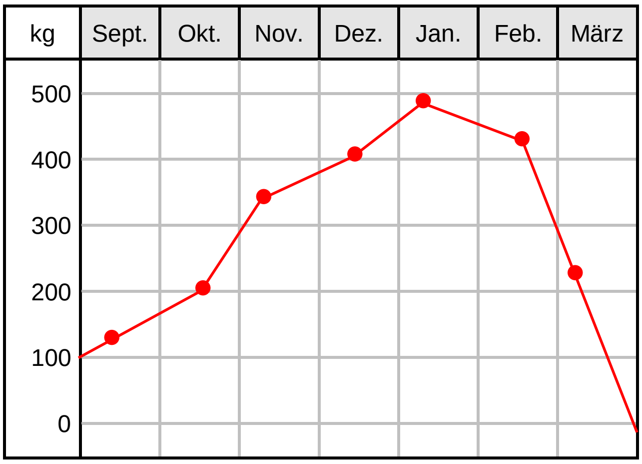
Beispiel 1

Einer bestimmten Körperlänge eines erwachsenen „Normalmenschen“ ist ein bestimmtes Gewicht zugeordnet.

Länge cm	Männer kg	Frauen kg
155	55,1	53,8
160	58,2	56,9
165	61,8	59,7
170	65,7	62,2
175	69,2	66,9
180	73,8	69,6

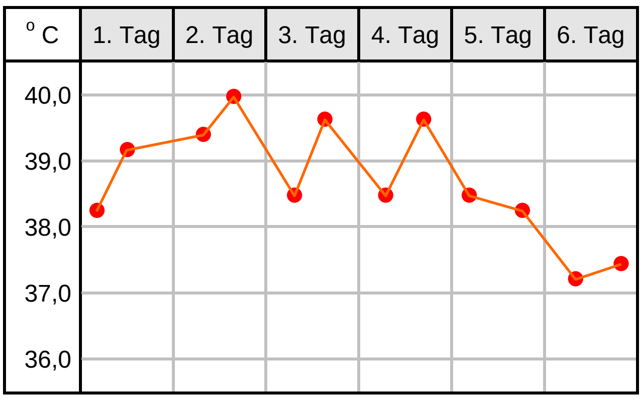
Beispiel 2

Das nebenstehende Diagramm veranschaulicht den Kohlenverbrauch in einem Haushalt. Monat und Verbrauch in kg sind einander zugeordnet. Indem man die einzelnen Messwerte (Punkte) miteinander verbindet, kann man auch *wahrscheinliche* Zwischenwerte ablesen.



Beispiel 3

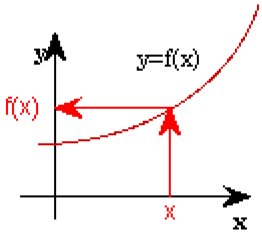
Bei der Fieberkurve eines Kranken sind Temperatur und Zeit einander zugeordnet. Die Fieberkurve entsteht, wenn man die Paare (Punkte) miteinander verbindet. Die einander zugeordneten Werte werden auf zwei Achsen abgetragen. Die Massstäbe können beliebig sein. Man nennt eine solche Darstellung auch ein Diagramm.



22.3 Wichtiges über mathematische Funktionen

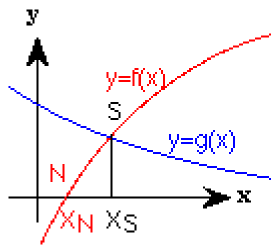
22.3.1 Definition Funktion

Wird durch die Gleichung y = f(x) jedem x des Definitionsbereiches genau ein y des Wertebereiches zugeordnet, nennen wir dies eine Funktion f. In einer Wertetabelle können Zahlenpaare (x/y), welche y = f(x) erfüllen, aufgeschrieben werden. Zeichnen wir alle Punkte P(x/y), deren Koordinatenpaare Lösungen der Gleichung y = f(x) sind, in ein Koordinatensystem, entsteht der Graf von f. Falls kein Definitionsbereich angegeben wird, ist dafür die grösstmögliche Teilmenge der reellen Zahlen zu nehmen, für welche der Term f(x) definiert ist.



22.3.2 Nullstellen (Schnittpunkte)

Schneidet der Graf einer Funktion f die x-Achse in einem Punkt N, ist x_N Lösung der Gleichung f(x) = 0 und x_N heisst Nullstelle von f. Schneiden sich die Grafen von zwei Funktionen f und g in einem Punkt S, ist x_S Lösung der Gleichung f(x) = g(x). Falls diese Lösungen nicht exakt berechnet werden können, werden sie mit einem Näherungsverfahren auf dem Taschenrechner oder Computer approximativ bestimmt.

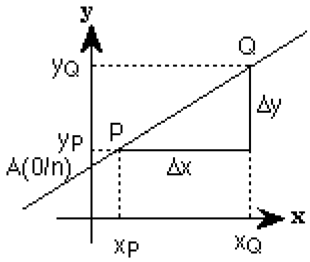


22.3.3 Lineare Funktionen (Geraden)

Eine Funktion f mit der Gleichung y = mx + n heisst lineare Funktion. Sie hat als Graf eine Gerade durch den Punkt A(0/n) mit Steigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

y = mx + n wird oft explizite Geradengleichung genannt. Eine andere Darstellung der Geraden hat die Form ax + by + c = 0. Sie heisst implizite Geradengleichung und kann, wenn b nicht Null ist, nach y aufgelöst werden. Falls b = 0 und a <>0 ist, erhalten wir eine Parallele zur y-Achse.

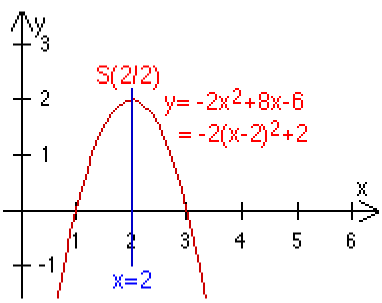


22.3.4 Quadratische Funktionen

Eine Funktion f mit der Gleichung f(x) = ax^2 + bx + c heisst quadratische Funktion. Ihr Graf ist symmetrisch zur Geraden x = -b/2a und ist stets eine Parabel. Für D = b^2 - 4ac > 0 hat f zwei Nullstellen:

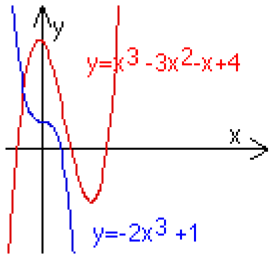
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sind die Lösungen der quadratischen Gleichung f(x) = 0.
Eine andere Darstellung für f hat die Form y = $a(x-u)^2$ + v. Sie entsteht, wenn die Parabel y = ax^2 parallel verschoben wird, bis ihr Scheitel neu im Punkt S(u/v) liegt.



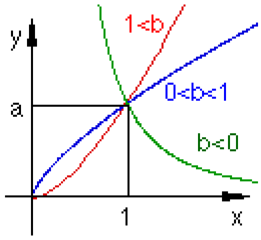
22.3.5 Polynomfunktionen

Eine Funktion f mit der Gleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a <> 0$) heisst Polynomfunktion dritten Grades. f hat mindestens eine Nullstelle, je nach Wahl der Koeffizienten a, b, c, d manchmal auch drei Nullstellen und in Spezialfällen zwei Nullstellen. f hat entweder zwei lokale Extremalstellen oder keine und hat immer genau einen Wendepunkt. Analoge Aussagen gelten bei Polynomfunktionen vierten ($f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$) und höheren Grades. Statt von Polynomfunktionen oder Polynomen spricht man auch von ganzrationalen Funktionen.



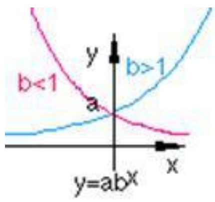
22.3.6 Potenzfunktion

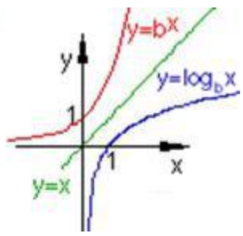
Eine Funktion f mit der Gleichung $f(x) = ax^b$ heisst Potenzfunktion. Sie verläuft für jede Wahl von b durch den Punkt P(1/a). Die Zeichnung zeigt mit $a > 0$ und $x > 0$ die möglichen Verläufe je nach Wert von b. Falls b ganzzahlig und gerade ist, hat der Graph im II. Quadranten eine achsensymmetrische Fortsetzung. Falls b ganzzahlig und ungerade ist, hat der Graph im III. Quadranten eine punktsymmetrische Fortsetzung. Falls b negativ ist, sind die Koordinatenachsen Asymptoten (asymptos - griech. = nicht zusammenfallend).



22.3.7 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Bei der Potenzfunktion ist die Basis veränderlich. Ist der Exponent veränderlich, so spricht man von einer Exponentialfunktion $f(x) = ab^x$ ($b>0$). Ihr Graf verläuft für beliebige positive Werte von b immer durch den Punkt P(0/a). Die x-Achse ist Asymptote (asymptos - griech. = nicht zusammenfallend). Falls $a = 1$ und $b > 1$ ist, entsteht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ der Graf der Umkehrfunktion (siehe weiter unten) von $y = b^x$, welche Logarithmusfunktion zur Basis b heisst. Man schreibt $y = \log_b x$. Falls $b = 2,718\ldots = e$ ist, wird die spezielle Bezeichnung $y = \ln x$ benutzt. Alle Logarithmusfunktionen haben die y-Achse als Asymptote.



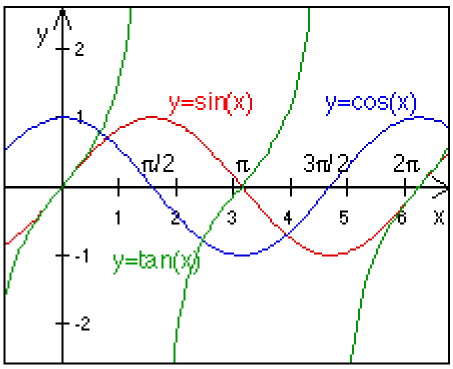


Das organische Wachstum verläuft nach einer Exponentialfunktion:

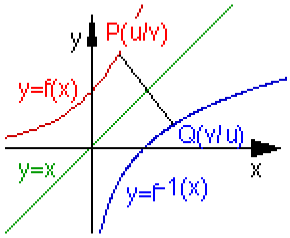
	n	Menge nach Ablauf der Zeit t
$n = n_0 \cdot e^{k \cdot t}$	$n_0 > 0$	Grundmenge
	k	Wachstumsintensität ($k > 0$ Wachstumsprozess, $k < 0$ Abklingprozess
	t	Zeit

22.3.8 Trigonometrische Funktionen

Die Winkel sind im Bogenmass.

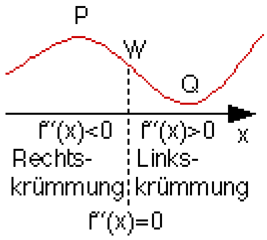


22.3.9 Umkehrfunktion



Wird der Graf der Funktion y = f(x) an der Winkelhalbierenden y = x gespiegelt, entsteht eine Kurve mit der Gleichung x = f(y). Falls f eine umkehrbare Funktion ist, d.h. wenn es für jedes y genau ein x mit f(x) = y gibt, ist das Spiegelbild des Grafen von f der Graf der sog. Umkehrfunktion f^{-1}.

22.3.10 Minimum, Maximum und Wendepunkte



Den grössten bzw. kleinsten Wert, den eine Funktion in einem Bereich annehmen kann, bezeichnet man als ihr globales oder absolutes Maximum (Punkt P) bzw. globales oder absolutes Minimum (Punkt Q) in bezug auf diesen Bereich. In beiden Punkten ist die Steigung der Kurve = 0.
Beim Wendepunkt W geht eine Funktion f von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung über.

22.4 Nützliche Internet-Adressen zum Thema Funktionen

Adresse	Inhalt der Webseite
http://www.univie.ac.at/future.media/mo/onlinewerkzeuge.html	Online-Werkzeuge (z.B. Funktionsplotter)
http://www.univie.ac.at/future.media/mo/mathint/lexikon/index.html	Mathematisches Lexikon
http://www.univie.ac.at/future.media/mo/galerie.html	Mathematische Lernhilfen (z.B. Funktionen erkennen)
http://www.ub.uni-bielefeld.de/tb_math/daten/index/index_a.htm	Mathematisches Lexikon

Beispiel 1

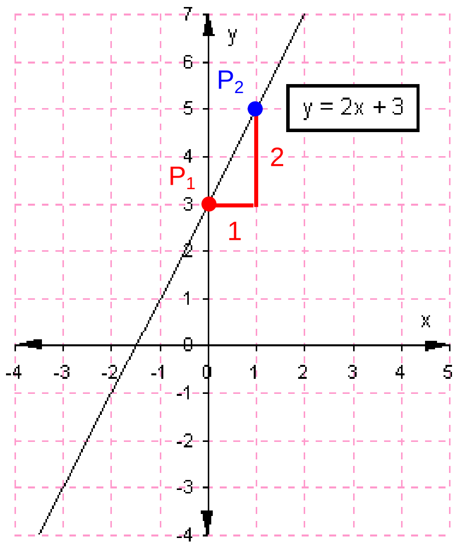
Zeichnen Sie den Graf der Funktion 4x – 2y + 6 = 0!

1. <u>Methode</u>

$$2y = 4x + 6 \quad \rightarrow \quad y = \underline{2x + 3} \quad \rightarrow \quad \text{Steigung } m = 2,\ \text{Schnittpunkt mit y-Achsenabschnitt} = 3$$

Vorgehen beim Graf zeichnen:

- der Punkt $P_1(0/3)$ wird ins Koordinatensystem eingezeichnet
- $m = \frac{y}{x} = 2$, mit x = 1 wird y = 2 → Steigung vom Punkt P_1 aus eintragen, womit der Punkt $P_2(1/5)$ bestimmt ist
- Gerade durch die beiden Punkte zeichnen

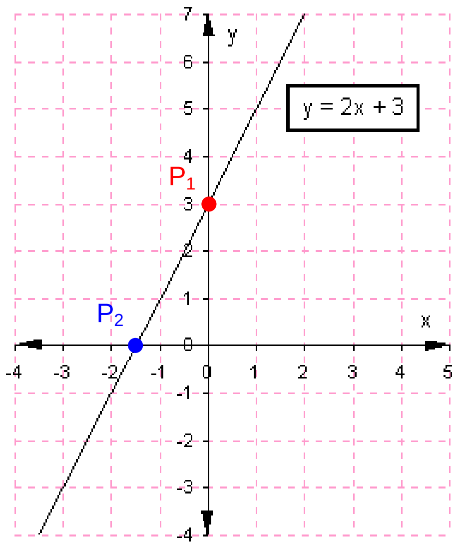


2. <u>Methode</u>

Annahme $x = 0$:	$-2y + 6 = 0$	$\rightarrow$	$y = 3$	$\rightarrow$	$P_1(0/3)$	y-Achsenabschnitt
Annahme $y = 0$:	$4x + 6 = 0$	$\rightarrow$	$x = -\frac{3}{2}$	$\rightarrow$	$P_2\left(-\frac{3}{2}/0\right)$	x-Achsenabschnitt

Vorgehen beim Graf zeichnen:

- der Punkt $P_1(0/3)$ wird ins Koordinatensystem eingezeichnet
- der Punkt $P_2(-1{,}5/0)$ wird ins Koordinatensystem eingezeichnet
- Gerade durch die beiden Punkte zeichnen



Beispiel 2

Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte A(-1/-2) und B(-3/1)?

1. Methode

Ansatz:	$y = mx + n$ siehe Kapitel 24.3.3	(1)
Steigung bestimmen:	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1+2}{-3+1} = -\frac{3}{2}$ Skizze machen	(2)
Steigung in Ansatz (1) einsetzen:	$y = -\frac{3}{2}x + n$	(3)
Koordinaten von Punkt A(-1/-2) in Gleichung (3) einsetzen:	$-2 = -\frac{3}{2} \cdot (-1) + n \rightarrow -2 = \frac{3}{2} + n \rightarrow n = -2 - \frac{3}{2} = \underline{-\frac{7}{2}}$	(4)
(4) und (2) in Ansatz (1) einsetzen:	$\underline{\underline{y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}}}$	

2. Methode

Ansatz:	$y = mx + n$ siehe Kapitel 24.3.3	(1)
Koordinaten von Punkt A(-1/-2) in Ansatz (1) einsetzen:	$-2 = (-1) \cdot m + n$	(2)
Koordinaten von Punkt B(-3/1) in Ansatz (1) einsetzen:	$1 = (-3) \cdot m + n$	(3)
Von Gleichung (2) Gleichung (3) subtrahieren (Additionsmethode):	$-3 = 2m \rightarrow m = \underline{-\frac{3}{2}}$	(4)
(4) in (2) einsetzen:	$-2 = (-1) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + n \rightarrow -2 = \frac{3}{2} + n \rightarrow n = -2 - \frac{3}{2} = \underline{-\frac{7}{2}}$	(5)
(5) und (4) in Ansatz (1) einsetzen:	$\underline{\underline{y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}}}$	

22.5 Übungen

1. Stellen Sie für die nachfolgenden Funktionsgleichungen eine Wertetabelle auf.

   a) $y = 5x - 3$

   b) $y = \frac{2}{3}x + 4$

2. Zeichnen Sie folgende Funktionsgleichungen (Tipp: Kontrollieren Sie Ihre Lösungen mit Hilfe eines Funktionsplotter, URL-Adresse http://www.univie.ac.at/future.media/mo/onlinewerkzeuge.html, danach mathe online Funktions-Plotter wählen).

   a) $y = 3x$

   b) $y = 3x - 1$

   c) $y = x^2$

   d) $y = -3x^2$

   e) $y = 0{,}5^x$

   f) $y = 1{,}5^x$

3. a) Was verstehen Sie unter einer analytischen Funktion? Machen Sie ein praktisches Beispiel dazu!
   b) Was verstehen Sie unter einer empirischen Funktion? Machen Sie ein praktisches Beispiel dazu!

4. Von einer Geraden sind zwei Punkte P_1(-8/-3) und P_2(4/6) bekannt. Bestimmen Sie:
   a) die Steigung m
   b) die Funktionsgleichung
   c) den Schnittpunkt P_3 mit der x-Achse
   d) den Schnittpunkt P_4 mit der y-Achse

5. Bestimmen Sie grafisch die Lösungsmenge der Gleichung 4x – 12 = x – 10.

6. Bestimmen Sie grafisch die Lösungsmenge der Gleichungen 2x + 3y = 12 und 2x – y = 4.

7. Die Funktion $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ ist eine …?

   a) Lineare Funktion b) Potenzfunktion c) Exponentialfunktion c) keine richtige Lösung

8. Die Funktion $y = \frac{x^4}{3}$ ist eine …?

   a) Lineare Funktion b) Potenzfunktion c) Exponentialfunktion c) keine richtige Lösung