23 Quadratische Gleichungen

23.1 Die rein quadratische Gleichung

Definition: Gleichungen von der Form:

$ax^2 + b = 0 \qquad (a, b \in R, a \neq 0)$

heissen *rein quadratische* Gleichungen. $(a, b \in R, a \neq 0)$

Lösung:

$$ax^2 + b = 0 \qquad |:a$$
$$x^2 + \frac{b}{a} = 0$$
$$x^2 = -\frac{b}{a} \qquad \left| \text{Sei} -\frac{b}{a} = c \right.$$
$$x^2 = c$$
$$\underline{x_1 = \sqrt{c}}$$
$$\underline{x_2 = -\sqrt{c}}$$

Beispiel:

$$4x^2 - 25 = 0$$
$$x^2 = \frac{25}{4}$$
$$\underline{x_1 = \frac{5}{2}} \quad ; \quad \underline{x_2 = -\frac{5}{2}}$$

23.2 Die allgemeine quadratische Gleichung

Beispiel:

$x^2 - 10x - 11 = 0$

$x^2 - 10x = 11$ — Das Glied ohne x kommt auf die rechte Seite.

$x^2 - 10x + 25 = 11 + 25$ — Man will ein vollständiges Quadrat erhalten und bildet die quadratische Ergänzung. Die quadratische Ergänzung wird auf beiden Seiten addiert. Sie ist positiv und gleich dem halben Faktor von x im Quadrat $(-10/2)^2 = 25$.

$(x-5)^2 = 36$ — Umformung

$\sqrt{(x-5)^2} = \pm\sqrt{36}$ — Radizieren

$x - 5 = \pm 6$ — Auflösen nach x; 2 Lösungen

$\underline{L = \{-1; 11\}}$

Definition: Gleichungen von der Form: $(a, b \in R, a \neq 0)$
$ax^2 + bx + c = 0$ heissen *quadratische* Gleichungen.

Allgemein: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Zuerst wird der Koeffizient von x^2 weggeschafft.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Das Glied ohne x kommt auf die rechte Seite.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Es folgt die Bildung der quadratischen Ergänzung.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Umformung

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Radizieren

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

Auflösen nach x

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Im Resultat kommt der Term $T = \sqrt{b^2 - 4ac}$ vor. Der Term $b^2 - 4ac$ kann positiv, gleich 0 oder negativ sein. Dieser Term wird *Diskriminante* genannt.
Ist die Diskriminante D > 0, dann hat die Wurzel zwei verschiedene Lösungen. Ist D = 0, so erhalten wir $x_1 = x_2 = -(b/2a)$. Ist D < 0, so muss aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel gezogen werden.

23.3 Übungen

1. $3x^2 = 48$

2. $\frac{2x^2}{18} = 576$

3. $\frac{45}{x} = \frac{x}{5}$

4. $\frac{9}{16} + 2x^2 = 3x^2 + \frac{1}{2}$

5. $x^2 + 14 - 9x = 0$

6. $x^2 - 6x - 7 = 0$

7. $3x^2 - 25x + 8 = 0$

8. $-3x^2 + 33x = 90$

9. $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} - 11 = 0$

10. $3 \cdot (10 - x) \cdot (2x - 15) = x$

11. $-7x^2 - 81x = 44$

12. $\frac{2}{x} - 2x = 3$