# 4 Rationale Zahlen

## 4.1 Einführung

Die Gleichung 3 · x = 9 hat die Lösung 3.
$3 \in \mathbf{Z}$

$$3 \cdot x = 9$$
$$x = \frac{9}{3} = 3$$

Die Gleichung 3 · x = 1 hat die Lösung $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3} \notin \mathbf{Z}$

$$3 \cdot x = 1$$
$$x = \frac{1}{3}$$

**Definition**

Die Gleichung b · x = a, mit a, b $\in$ **Z** und b $\neq$ 0, hat die Lösung:

$$b \cdot x = a$$
$$x = \frac{a}{b} = a \div b$$

Ist a kein Vielfaches von b, so entsteht eine neue Zahl, *Bruch* oder *rationale Zahl* genannt. Sie bilden die Menge **Q**.

$$\frac{\text{Dividend (Zähler)}}{\text{Divisor (Nenner)}} \rightarrow \underbrace{\frac{a}{b}}_{\substack{\text{Quotient}\\\text{(Bruch)}}} = \underbrace{a \div b}_{\substack{\text{Quotient}\\\text{(Bruch)}}}$$

$a \in \mathbf{Z}$ ; $b \in \mathbf{Z} \setminus \{0, 1\}$

**Spezialfälle**

$\frac{0}{a} = 0$ denn 0 · a = 0

$\frac{a}{a} = 1$ denn a = a · 1

$\frac{a}{0}$ ist nicht erlaubt

**Vorzeichen**

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Deshalb gelten sinngemäss die gleichen Vorzeichenregeln wie für die Multiplikation.

**Brucharten**

Stammbrüche: z.B. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{12}$

Echte Brüche: z.B. $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{11}{13}$

Unechte Brüche: z.B. $\frac{10}{9}$; $\frac{12}{8}$; $\frac{17}{7}$

Scheinbrüche: z.B. $\frac{5}{1}$; $\frac{15}{3}$; $\frac{4}{2}$

Reziproke bzw. inverse Brüche: z.B. $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{7}$ und $\frac{7}{5}$

Dezimalbrüche: z.B. $0{,}1$; $0{,}37$; $0{,}6$

Gleichnamige Brüche: z.B. $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{6}{7}$

Ungleichnamige Brüche: z.B. $\frac{3}{7}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$

## 4.2 Erweitern und Kürzen

Brüche kann man Erweitern und Kürzen. Ihr Wert verändert sich dabei nicht.
Solche Brüche nennt man *gleichwertig*.

Erweitern heisst: Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multiplizieren.

z.B. $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

Kürzen heisst: Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) dividieren.

z.B. $\frac{10}{15} = \frac{10 \div 5}{15 \div 5} = \frac{2}{3}$

Man kürzt nur, wenn beide Divisionen ganze Zahlen ergeben.

**Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)**

Jede natürliche Zahl lässt sich als Produkt von *Primzahlen (eine Primzahl ist nur durch sich selbst oder durch 1 teilbar)* schreiben, lässt sich also in *Primfaktoren* zerlegen. Zur Bestimmung des kgV stellt man jede Zahl als Produkt ihrer Primzahlen dar. Tritt dabei eine Primzahl öfter auf, so benutzt man die Potenzschreibweise.

**Beispiel 1**

Geg: 9, 15, 21
Ges: kgV

Lösung:

| | 3 | | 5 | | 7 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | **$3^2$** | | | | | | |
| 15 | 3 | · | **5** | | | | |
| 21 | 3 | · | | | **7** | | |
| kgV | **$3^2$** | · | **5** | · | **7** | = | **315** |

**Beispiel 2**

Geg: 4, 7, 28
Ges: kgV

Lösung:

| | 2 | | 7 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | **$2^2$** | | | | |
| 7 | | | **7** | | |
| 28 | $2^2$ | · | 7 | | |
| kgV | **$2^2$** | · | **7** | = | **28** |

**Beispiel 3**

Geg: 8ab, 12bx, 14ax
Ges: kgV

Lösung:

| | 2 | | 3 | | 7 | | a | | b | | x | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8ab | **$2^3$** | · | | | | | **a** | · | **b** | | | | |
| 12bx | $2^2$ | · | **3** | | · | | | | b | · | **x** | | |
| 14ax | 2 | · | | | **7** | · | a | · | | | x | | |
| kgV | **$2^3$** | · | **3** | · | **7** | · | **a** | · | **b** | · | **x** | = | **168abx** |

**Merke**

*Das kgV von Zahlen ist das Produkt der höchsten auftretenden Primzahlenpotenzen dieser Zahlen.*

**Grösster gemeinsamer Teiler (ggT)**

Wird ein Bruch durch den grössten gemeinsamen Teiler, den ggT, gekürzt, so ist er nicht weiter zu kürzen.

**Beispiel 1**

<u>Geg:</u> 48, 84, 120
<u>Ges:</u> ggT

<u>Lösung:</u>

| | 2 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 48 | **2 · 2** · 2 · 2 · | **3** | | |
| 84 | **2 · 2** · | **3** · | | **7** |
| 120 | **2 · 2** · 2 · | **3** · | 5 | |
| ggT | **2 · 2** · | **3** | = | **12** |

**Beispiel 2**

<u>Geg:</u> 54aby, 45by, 63ab
<u>Ges:</u> ggT

<u>Lösung:</u>

| | 2 | 3 | 5 | 7 | a | b | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 54aby | 2 · | **3 · 3** · 3 · | | | a · | **b** · | y |
| 45by | | **3 · 3** · | 5 · | | | **b** · | y |
| 63ab | | **3 · 3** · | | 7 · | a · | **b** | |
| ggT | | **3 · 3** · | | | | **b** = | **9b** |

**Beispiel 3**

<u>Geg:</u> 60abcx, 120ax, 140abx
<u>Ges:</u> ggT

<u>Lösung:</u>

| | 2 | 3 | 5 | 7 | a | b | c | x | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60abcx | **2 · 2** · | 3 · | **5** · | | **a** · | b · | c · | **x** | |
| 120ax | **2 · 2** · 2 · | 3 · | **5** · | | **a** · | | | **x** | |
| 140abx | **2 · 2** · | | **5** · | 7 · | **a** · | b · | | **x** | |
| ggT | **2 · 2** · | | **5** · | | **a** · | | | **x** | = **20ax** |

**Merke**

*Der ggT von Zahlen ist das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren dieser Zahlen.*

## 4.3 Übungen

Berechnen Sie das kgV mit Hilfe eines Schemas:

1. 3, 17, 51, 102
2. 16, 24, 49, 56
3. 66, 396, 714, 924
4. 6x, 8x, 5xz, 12x, 108xy
5. 4mn, 6mp, 8np, 10m, 24p
6. 4x + 2y, 6x + 3y, 8x + 4y

Berechnen Sie den ggT mit Hilfe eines Schemas:

7. 180, 210, 270, 300
8. 28abx, 112acx, 224adx, 336ax
9. 4b + 2c, 8b + 4c, 12b + 6c
10. 36ax - 24ay, 48bx - 32by, 72abx - 48aby
11. 306xyz, 170yz, 136xz, 204z
12. 3ax + 6cx, 9ax + 18cx, 12ax + 24cx

Kürzen von Bruchtermen:

13. $\frac{8ac-4adx-2a}{2a}$
14. $\frac{39abd-12acd}{3a}$
15. $\frac{-6a+2a-8x}{-4ax}$
16. $\frac{14ab+7ac+42ab}{70ab+14ac+7ab}$
17. $-\frac{b-2}{2-b}$
18. $\frac{25ab-5az}{15bx-3xz-5ab+az}$
19. $\frac{3ab-6ac}{-6cx+3bx}$
20. $\frac{2ax+2cx-5ay-5cy}{3a+3c}$
21. $\frac{2ab+3ay-2bx-3xy}{2bc+3cy-2bx-3xy}$

## 4.4 Addition und Subtraktion

### a) von gleichnamigen Brüchen

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - \frac{d}{c} = \frac{a+b-d}{c}$$

*Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler der Brüche bei unverändertem Nenner addiert bzw. subtrahiert.*

Beispiele:

1) $\frac{5a}{12} - \frac{a}{12} + \frac{3a}{12} = \frac{5a-a+3a}{12} = \frac{7a}{12}$

2) $\frac{n+x}{4} + \frac{n-x}{4} = \frac{n+x+n-x}{4} = \frac{2n}{4} = \frac{n}{2}$

3) $\frac{a+b}{a} - \frac{a-b+c}{a} = \frac{a+b-(a-b+c)}{a} = \frac{a+b-a+b-c}{a} = \frac{2b-c}{a}$

### b) von ungleichnamigen Brüchen

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} - \frac{6}{12} = \frac{10+9-6}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$$

*Ungleichnamige Brüche muss man vor dem Addieren und Subtrahieren gleichnamig machen. Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Einzelnenner.*

Beispiele:

1) $\frac{a}{3} + \frac{3a}{4} - \frac{5a}{6} = \frac{4a+9a-10a}{12} = \frac{3a}{12} = \frac{a}{4}$

2) $\frac{m-x}{3} + m = \frac{m-x+3m}{3} = \frac{4m-x}{3}$

3) $\frac{2b}{3} - \frac{7b}{8} + \frac{11b}{12} + \frac{3b}{4} = \frac{16b-21b+22b+18b}{24} = \frac{35b}{24} = 1\frac{11}{24}b$

## 4.5 Multiplikation und Division

### a) Multiplikation

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}$$

*Brüche werden multipliziert indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.*

Beispiele:

1) $\frac{a}{x} \cdot \frac{3b}{2x} = \frac{3ab}{2x^2}$

2) $5 \cdot \frac{3a}{2b} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3a}{2b} = \frac{15a}{2b}$

3) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{b^3} = \frac{2ax}{6b^4} = \frac{ax}{3b^4}$

4) $\left(\frac{-6a}{x}\right) \cdot \left(3 - \frac{2b}{3x}\right) = -\frac{18a}{x} + \frac{\cancel{12}^{\,4}\,ab}{\cancel{3}_{\,1}\,x^2} = \underbrace{-\frac{18a}{x} + \frac{4ab}{x^2} = \frac{-18ax + 4ab}{x^2}}_{\text{je nach Aufgabenstellung, wenn z. B. verlangt wird: Schreiben Sie als einen Bruch!}}$

5) $\left(\frac{2a}{3} - 1\right) \cdot \left(\frac{3x}{2a} + \frac{2}{5}\right) = \frac{6ax}{6a} + \frac{4a}{15} - \frac{3x}{2a} - \frac{2}{5} = x + \frac{4a}{15} - \frac{3x}{2a} - \frac{2}{5}$

6) $1\frac{3}{5}a \cdot \frac{2a}{3b} = \frac{8a}{5} \cdot \frac{2a}{3b} = \frac{16a^2}{15b}$

**b) Division**

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

*Brüche werden dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert.*

Beispiele:

1) $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \div \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$

2) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

3) $\frac{3x}{5a} \div \frac{2a}{3b} = \frac{3x}{5a} \cdot \frac{3b}{2a} = \frac{9bx}{10a^2}$

4) $\frac{2x}{y} \div \frac{x}{a} \div \frac{5}{3} = \frac{2x}{y} \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6ax}{5xy} = \frac{6a}{5y}$

5) $\frac{ax+bx}{a-b} \div (a+b) = \frac{x(a+b)}{a-b} \div \frac{a+b}{1} = \frac{x(a+b)}{a-b} \cdot \frac{1}{a+b} = \frac{x(a+b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{x}{a-b}$

6) $\left(1+\frac{2}{m}+\frac{1}{m^2}\right) \div \left(\frac{1}{m}+1\right) = \left(\frac{m^2+2m+1}{m^2}\right) \div \left(\frac{1+m}{m}\right) = \left[\frac{(m+1)(m+1)}{m^2}\right] \cdot \left(\frac{m}{1+m}\right) = \frac{m+1}{m}$

**Achtung**: Wenn möglich Summen in Faktoren zerlegen und kürzen!

**c) Doppelbrüche (gewöhnlicher)**

$$\frac{\frac{6m}{5a}}{\frac{18n}{10a}} = \frac{6m}{5a} \div \frac{18n}{10a} = \frac{6m}{5a} \cdot \frac{10a}{18n} = \frac{60am}{90an} = \frac{2m}{3n}$$

*Sind Zähler und Nenner eines Bruches wieder Brüche, so spricht man von einem Doppelbruch. Dabei kann der Hauptbruchstrich durch einen Doppelpunkt ersetzt werden.*
*Der Hauptbruchstrich befindet sich auf der Höhe des Gleichheitszeichen (Operationszeichen).*

Beispiele:

1) $$\frac{\frac{m}{a}}{\frac{n}{a}} = \frac{m}{a} \cdot \frac{a}{n} = \frac{m}{n}$$

2) $$\frac{1+\frac{b}{a}}{1+\frac{a}{b}} = \frac{\frac{a+b}{a}}{\frac{b+a}{b}} = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{b}{a}$$

3) $$\frac{\frac{18ab}{25xy}}{\frac{9b}{5y}} = \frac{18ab}{25xy} \cdot \frac{5y}{9b} = \frac{2a}{5x}$$

4) $$\frac{c-\frac{d}{a}}{c+\frac{d}{a}} = \frac{\frac{ac-d}{a}}{\frac{ac+d}{a}} = \frac{ac-d}{a} \cdot \frac{a}{ac+d} = \frac{ac-d}{ac+d}$$

5) $$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} = \frac{\frac{y+x}{xy}}{\frac{y-x}{xy}} = \frac{(x+y)xy}{xy(y-x)} = \frac{x+y}{y-x}$$

6) $$\frac{2-\frac{3}{7}}{\frac{7}{5}+4} = \frac{\frac{14-3}{7}}{\frac{7+20}{5}} = \frac{\frac{11}{7}}{\frac{27}{5}} = \frac{11 \cdot 5}{7 \cdot 27} = \frac{55}{189}$$

**4.6 Übungen**

1. $\frac{4x}{4c-3d}-\frac{3x}{3a-4b}$

2. $\frac{5x}{a+b}-\frac{3y}{cd}+\frac{4x}{a+b}+\frac{8y}{cd}+\frac{x}{cd}$

3. $\frac{2x+5}{4x-4}+\frac{5x-3}{6x-6}-\frac{2x+1{,}5}{2x-2}$

4. $\frac{4a-2}{2a+4}-\frac{8a-7}{6a+12}-\frac{2a-5}{10a+20}$

5. $\frac{12a}{5b}\cdot 9\frac{1}{3}b\cdot\frac{15x}{14a}$

6. $\left(-\frac{15ab}{76xy}\right)\cdot\left(-\frac{4x}{5b}\right)\cdot\left(-7\frac{3}{5}y\right)$

7. $\frac{5x+15}{x^2-y^2}\cdot(x-y)$

8. $\frac{a-3}{3\cdot(a^2-16)}\cdot(3a+12)$

9. $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2$

10. $\left(\frac{3u}{4v}-\frac{5x}{6y}\right)^2$

11. $\frac{6x+3y}{4a-4b}\div\frac{12ax+6ay}{7ax-7bx}$

12. $\left[\left(\frac{2x}{4}\div\frac{1}{3}\right)\div\frac{x}{5}\right]\div 4a$

13. $\left(\frac{3ax}{4bc}\div\frac{6ad}{8c}\right)\div\frac{18x}{2b}$

14. $\left(\frac{3\cdot(a-1)}{a\cdot(x-1)}\div\frac{5\cdot(1-a)}{a\cdot(x+1)}\right)\div\frac{1}{15\cdot(1-x)}$

15. $\dfrac{\frac{1}{x}+y}{\frac{1}{x}-y}$

16. $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{x}{y}}{\frac{a}{b}+\frac{x}{y}}$

17. $-(2x-8y)+3y+(-2x-5y)$

18. $18a-[-(-3a+5b-c)-5a]-2b$

19. $(a-b)\cdot(2a-b)$

20. $(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$

21. $(x^2-8x+7):(x-7)$

22. $(2c^3-18c^2+33c-35):(c-7)$

23. $\dfrac{4a}{5b}:\dfrac{16a^2}{10b}$

24. $\dfrac{14(a^2-b^2)}{\frac{21a-21b}{a+b}}$

25. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2}$

26. $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3}{1-x}$

27. $\dfrac{m}{m-1}\cdot\dfrac{n^2-2n+1}{mn-m}$

28. $\dfrac{\frac{2a}{a-3}-\frac{a}{a+4}}{\frac{a+11}{a^2+a-12}}$