6 Potenzieren

6.1 Einführung

Wenn bei einer Multiplikation lauter gleiche Faktoren auftreten, so wird dafür meistens die Potenzschreibweise gewählt.

$$\boxed{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \ldots \ \cdot a}_{n\text{–Faktoren}} = \underbrace{a^n}_{\text{Potenzwert}}}$$

a: Basis oder Grundzahl, $a \in \mathbb{R}$

n: Exponent oder Hochzahl, $n \in \mathbb{N}^* = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$

Es ist $a^1 = a,\ a^2 = a \cdot a,\ a^3 = a \cdot a \cdot a,\ \ldots$

Basis der Potenz ist 0

Ist die Basis a einer Potenz a^n die 0, ist das zugehörige Produkt ebenfalls 0.

$0^n = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0 = 0$

Basis der Potenz ist 1

Ist die Basis a einer Potenz a^n die 1, ist das zugehörige Produkt ebenfalls 1.

$1^n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$

Das Vorzeichen beim Potenzieren

Bei positiver Basis ist der Wert der Potenz immer positiv.

$$\boxed{(+a)^n = +a^n}$$

z. B. $(+2)^2 = (+2) \cdot (+2) = +2^2 = +4$

z. B. $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +2^3 = +8$

Bei negativer Basis ist der Wert der Potenz positiv, wenn der Exponent gerade ist.

$$\boxed{(-a)^{2n} = +a^{2n}}$$

$n \in \mathbb{N}^* = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$

z. B. $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +2^4 = 16$

Bei negativer Basis ist der Wert der Potenz auch negativ, wenn der Exponent ungerade ist.

$$\boxed{(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}}$$

$n \in \mathbb{N}^* = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$

z. B. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -2^3 = -8$

Achtung, beachten Sie den Unterschied:

$-3^2 = -(3 \cdot 3) = -(3^2) = -9$

$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$

$\underbrace{2a^3}_{2 \cdot a \cdot a \cdot a} \neq \underbrace{(2a)^3}_{2a \cdot 2a \cdot 2a}$

6.2 Addition und Subtraktion von Potenzen

Bei der Addition und bei der Subtraktion können **nur Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten** zusammengefasst werden. Dabei werden die Koeffizienten addiert bzw. subtrahiert.

Beispiele

a. $6a^2 + 2a^2 - b^3 + 2b^2 - b^3 = \underline{\underline{8a^2 - 2b^3 + 2b^2}}$

b. $3a^2b - ab^2 + 2a^2b = \underline{\underline{5a^2b - ab^2}}$

6.3 Multiplikation und Division von Potenzen

Bei der Multiplikation und Division werden zwei Fälle unterschieden. Zum einen können Potenzen gleiche Basen, zum anderen gleiche Exponenten besitzen.

Gleiche Basen – Multiplikation

1. Potenzsatz

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Beweis

$$a^5 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^{5+3} = a^8$$

Potenzen mit gleicher Basis werden **multipliziert**, indem man die Basis unverändert lässt und die **Exponenten addiert**.

Beispiele

Wenden Sie den 1. Potenzsatz an:

1. $a^3 \cdot a \cdot a^2 = ?$ $\quad a^{3+1+2} = \underline{\underline{a^6}}$

2. $(a+b)^2 \cdot (a+b)^3 = ?$ $\quad (a+b)^{2+3} = \underline{\underline{(a+b)^5}}$

3. $2a^2b^3 \cdot 3ab^5 = ?$ $\quad 6a^{2+1}b^{3+5} = \underline{\underline{6a^3b^8}}$

4. $a^{5x-y} \cdot a^{x-y} = ?$ $\quad a^{5x-y+x-y} = \underline{\underline{a^{6x-2y}}}$

5. $10^6 \cdot 10 \cdot 1'000 = ?$ $\quad 10^6 \cdot 10^1 \cdot 10^3 = \underline{\underline{10^{10}}}$

Gleiche Basen – Division

2. Potenzsatz

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Beweis

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^{5-3} = a^2$$

Potenzen mit **gleicher Basis** werden **dividiert**, indem man die Basis unverändert lässt und die Exponenten **subtrahiert**.

Beispiele

Wenden Sie den 2. Potenzsatz an:

1. $x^7 : x^5 = ?$

$x^{7-5} = \underline{\underline{x^2}}$

2. $\dfrac{a^{n+1} \cdot c^x}{a^n \cdot c^{x-1}} = ?$

$a^{n+1-n} \cdot c^{x-(x-1)} = a^{n+1-n} \cdot c^{x-x+1} = \underline{\underline{ac}}$

3. $10^3 : 10^{-5} = ?$

$10^{3-(-5)} = 10^{3+5} = \underline{\underline{10^8}}$

4. $\dfrac{12x^{-n}y^{2n}}{4x^{-(n+1)}y^{-4n}} = ?$

$3x^{-n-[-(n+1)]}y^{2n-(-4n)} = 3x^{-n-[-n-1]}y^{2n+4n} = 3x^{-n+n+1}y^{2n+4n} = \underline{\underline{3xy^{6n}}}$

Luzern, alte BM-Prüfung (analog Nummer 4 oben)

5. $\left[12x^{-n}y^{2n} + 16x^{2-n}y^{4n} - 20x^{-(n-2)}y^{-2n}\right] : \left[4x^{-(n+1)}y^{-4n}\right] = ?$ schrittweise zeigen!

$3x^{-n-[-(n+1)]}y^{2n-(-4n)} + 4x^{2-n-[-(n+1)]}y^{4n-(-4n)} - 5x^{-n+2-[-(n+1)]}y^{-2n-(-4n)} =$

$3x^{-n-[-n-1]}y^{2n+4n} + 4x^{2-n-[-n-1]}y^{4n+4n} - 5x^{-n+2-[-n-1]}y^{-2n+4n} =$

$3x^{-n+n+1}y^{6n} + 4x^{2-n+n+1}y^{8n} - 5x^{-n+2+n+1}y^{2n} =$

$\underline{\underline{3xy^{6n} + 4x^3y^{8n} - 5x^3y^{2n}}} = \underline{\underline{xy^{2n}\left(3y^{4n} + 4x^2y^{6n} - 5x^2\right)}}$

Schwierigkeit Nr. 1

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = 1$$

mit der Formel (2. Potenzsatz) erhält man:

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$$

Dieses Problem lässt sich nur aus der Welt schaffen, indem man festsetzt (definiert):

$$\boxed{a^0 = 1}$$

gilt für $a \neq 0$, der Ausdruck 0^0 ist **nicht** definiert!

Schwierigkeit Nr. 2

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$$

mit der Formel (2. Potenzsatz) erhält man:

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$$

Dieses Problem lässt sich nur aus der Welt schaffen, indem man festsetzt (definiert):

$$\frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

gilt für $a \neq 0$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

gilt für $a \neq 0$, $b \neq 0$

andere Beweisführung für Schwierigkeit Nr. 2 (über $a^0 = 1$):

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

Gleiche Exponenten – Multiplikation

3. Potenzsatz

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$$

Beweis

$$a^3 \cdot b^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = (ab)^3$$

Potenzen mit gleichen Exponenten aber ungleichen Basen werden **multipliziert**, indem man die **Basen multipliziert** und den **Exponenten beibehält.**

Beispiele

Wenden Sie den 3. Potenzsatz an:

1. $25^3 \cdot 4^3 = ?$ $\quad (25 \cdot 4)^3 = \underline{\underline{100^3}}$

2. $(4xy)^2 \cdot xy^2 = ?$ $\quad 4^2 x^2 y^2 \cdot xy^2 = 16x^{2+1}y^{2+2} = \underline{\underline{16x^3y^4}}$

3. $(x-2)^m \cdot x^m = ?$ $\quad [(x-2) \cdot x]^m = \underline{\underline{(x^2-2x)^m}}$

4. $\left(\frac{4}{3}\right)^m \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-m} = ?$ $\quad \left(\frac{4}{3}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^m = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^m = \underline{\underline{2^m}}$

5. $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^3 = ?$ $\quad \left[\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\right]^3 = (7-3)^3 = \underline{\underline{4^3}} = \underline{\underline{64}}$

Gleiche Exponenten – Division

4. Potenzsatz

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Beweis

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Potenzen mit gleichen Exponenten aber ungleichen Basen werden **dividiert**, indem man die **Basen dividiert** und den **Exponenten beibehält.**

Beispiele

Wenden Sie den 4. Potenzsatz an:

1. $24^4 : 6^4 = ?$

$$(24:6)^4 = 4^4 = \underline{\underline{256}}$$

2. $\frac{(-a)^3}{(-b)^3} = ?$

$$\left(\frac{-a}{-b}\right)^3 = \underline{\underline{\left(\frac{a}{b}\right)^3}}$$

3. $\frac{(4x)^n}{x^n} = ?$

$$\left(\frac{4x}{x}\right)^n = \underline{\underline{4^n}}$$

4. $\frac{8x^3}{27y^3} = ?$

$$\frac{2^3x^3}{3^3y^3} = \underline{\underline{\left(\frac{2x}{3y}\right)^3}}$$

5. $\frac{(a^2-b^2)^3}{(a+b)^3} = ?$

$$\left[\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)}\right]^3 = \underline{\underline{(a-b)^3}}$$

6. $\frac{(9a^2-16b^2)^{2n}}{(3a-4b)^{2n}} = ?$

$$\left[\frac{(3a-4b)(3a+4b)}{(3a-4b)}\right]^{2n} = \underline{\underline{(3a+4b)^{2n}}}$$

6.4 Potenzieren von Potenzen

5. Potenzsatz

$$\boxed{\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m}}$$

Beweis

$$\left(a^{3}\right)^{2}=(a\cdot a\cdot a)^{2}=(a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a)=a^{3\cdot 2}=a^{6}$$

Hinweis: $a^{3\cdot 2}=a^{2\cdot 3}$, somit gilt: $\left(a^{3}\right)^{2}=\left(a^{2}\right)^{3}$

Potenzen werden **potenziert**, indem man die **Exponenten multipliziert**.

Beispiele

Wenden Sie den 5. Potenzsatz an:

1. $\left(a^{3}\right)^{-3}=?$

$\underline{\underline{a^{-9}}}$

2. $\left(\dfrac{3a^{2}}{2b^{3}}\right)^{3}=?$

$\dfrac{3^{3}a^{2\cdot 3}}{2^{3}b^{3\cdot 3}}=\underline{\underline{\dfrac{27a^{6}}{8b^{9}}}}$

3. $a^{2^{3}}=?$

$a^{2\cdot 2\cdot 2}=\underline{\underline{a^{8}}}$

4. $\left(a^{2}\right)^{3}=?$

$a^{2}\cdot a^{2}\cdot a^{2}=a^{2+2+2}=\underline{\underline{a^{6}}}$

5. $\left[\left(a^{-2}\right)^{3}\right]^{2}=?$

$\left(a^{-2\cdot 3}\right)^{2}=\left(a^{-6}\right)^{2}=\underline{\underline{a^{-12}}}=\dfrac{1}{\underline{\underline{a^{12}}}}$

6. $\left[2(-x)^{-2}\right]^{-3}=?$

$\left[2(-x)^{\overbrace{-2}^{\text{gerade}}}\right]^{-3}=\left[2\left(\dfrac{1}{x^{2}}\right)\right]^{-3}=2^{-3}\dfrac{1}{x^{-6}}=\underline{\underline{\dfrac{x^{6}}{2^{3}}}}=\underline{\underline{\dfrac{x^{6}}{8}}}$

Detail: $(-x)^{-2}=\dfrac{1}{(-x)^{2}}=\dfrac{1}{x^{2}}$

Resultat positiv, weil der Exponent -2 gerade ist!

7. $(-2)^{5}\left[-\left(4x^{-2}\right)^{-1}\right]^{3}=?$

$-32\left[-\left(\dfrac{x^{2}}{4}\right)\right]^{3}=-32\left[-\dfrac{x^{6}}{4^{3}}\right]=\dfrac{\cancel{32}^{\,1}\,x^{6}}{\cancel{64}_{\,2}}=\underline{\underline{\dfrac{x^{6}}{2}}}$

8. $-\left[4\left(-\frac{x}{2}\right)^3\right]^2 = ?$

$$-\left[4^2\left(-\frac{x}{2}\right)^6\right] = -\frac{16x^6}{2^6} = -\frac{\cancelto{1}{16}\,x^6}{\cancelto{4}{64}} = \underline{\underline{-\frac{x^6}{4}}}$$

9. $\left[2\left(a^3x^4\right)^2\right]^3 = ?$

$$2^3\left(a^3x^4\right)^6 = \underline{\underline{2^3a^{18}x^{24}}} = \underline{\underline{8a^{18}x^{24}}}$$

10. $\left[\left(-\frac{x}{2}\right)^{-3}\right]^2 = ?$

$$\left(-\frac{x}{2}\right)^{\overbrace{-6}^{\text{gerade}}} = \frac{x^{-6}}{2^{-6}} = \underline{\underline{\frac{2^6}{x^6}}} \quad \text{od.} \quad \left(-\frac{x}{2}\right)^{-6} = \frac{1}{\left(-\frac{x}{2}\right)^6} = \frac{1}{\frac{x^6}{2^6}} = \underline{\underline{\frac{2^6}{x^6}}}$$

11. $\frac{2^{38}\cdot5^{38}}{10^{72}} = ?$

$$\frac{(2\cdot5)^{38}}{10^{72}} = \frac{10^{38}}{10^{72}} = 10^{38-72} = \underline{\underline{10^{-34}}} = \underline{\underline{\frac{1}{10^{34}}}}$$

12. $\frac{3^{102}\cdot4^{102}}{2^{100}\cdot6\cdot6^{99}} = ?$

$$\frac{(3\cdot4)^{102}}{2^{100}\cdot(6)^{1+99}} = \frac{12^{102}}{(2\cdot6)^{100}} = 12^{102-100} = \underline{\underline{12^2}} = \underline{\underline{144}}$$

6.5 Potenzen im Überblick

Definition Potenz:		
$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ \dots\ \cdot a}_{\text{n–Faktoren}}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$	$(n \in \mathbf{N}$ und $a \in \mathbf{R})$
Sonderfälle:		
$a^1 = a$	$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$	0^0 ist nicht definiert
Rechenregeln:		
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$	$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$a^n : b^n = (a:b)^n \quad (a \neq 0)$	$(n,\ m \in \mathbf{Z}$ und $a,\ b \in \mathbf{R})$

6.6 Übungen

Wenden Sie die Potenzgesetze an:

1. $\left(b^{3}\right)^{4} = ?$

2. $\left(n^{x}\right)^{2} = ?$

3. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{-3} \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^{-3} = ?$

4. $\left(-x^{-2}\right)^{3} = ?$

5. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = ?$

6. $\left[-\left(-\frac{x^{2}}{2}\right)^{3}\right]^{-1} = ?$

7. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-3} = ?$

8. $\left(a^{n-1}\right)^{3} = ?$

9. $\left(\frac{a^{2}}{x^{3}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2x^{2}}{5a^{3}}\right)^{-1} \cdot 2ax^{-4} = ?$

10. $\left(3ax^{3}\right)^{7} = ?$

11. $\left(b^{x}\right)^{-n} = ?$

12. $\left(\frac{a^{0} \cdot b^{2}}{c^{0}}\right)^{2x} = ?$

13. $\left[\left(x^{2}\right)^{3}\right]^{5} = ?$

14. $\left(\frac{2a^4}{3b^5}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2 : \left(\frac{2a}{3b}\right)^3 = ?$

15. $\frac{\left[(5a)^x\right]^{3b}}{(5a)^{2bx} \cdot (4c)^{bx}} = ?$

16. $7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 10 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 27 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 36 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = ?$

17. $n^{6x+a} \cdot n^{2x-2a} = ?$

18. $(a+b)^{2a-3} \cdot (a+b)^{4a+6} = ?$

19. $b^{a-n} \cdot b^{a+n} = ?$

20. $2 \cdot (n+x)^{4-3a} \cdot 3 \cdot (n+x)^{3+a} - 4 \cdot (n+x)^7 \cdot 3 \cdot (n+x)^{-2a} = ?$

21. $\frac{n^4}{x^3} \div \frac{n^5 b^2}{c x^5} = ?$

22. $\frac{3a^3 b^2}{4n^{-2} d^6} \cdot \frac{3a^{-4} b^3}{d^3 n^2} = ?$

23. $\frac{4a^2 b^{-6}}{d^2 c^{-4}} \div \frac{12a^3 b^{-8}}{d^3 c^3} = ?$

24. $\left(a^3\right)^2 = ?$

25. $\left(a^{-2} + b^{-3}\right)^{-2} = ?$

26. $\left[\left(n^2 x^3\right)^2\right]^{-2} = ?$

6.7 Exponentenschreibweise

In Naturwissenschaft und Technik kommen oft sehr grosse oder sehr kleine Zahlen vor. Zum Beispiel ist die Sonne ungefähr 150000000000 m (Meter) von der Erde entfernt oder ein Elektron trägt die elektrische Ladung von ungefähr 0.00000000000000000016 C (Coulomb) oder rotes Licht hat eine Wellenlänge von 0.00000063 m (Meter). Dies sind sehr unhandliche Zahlen. Deshalb notiert man diese Werte üblicherweise in der wissenschaftlichen Schreibweise oder Exponentenschreibweise. So betragen der Abstand zur Sonne $1.5 \cdot 10^{11}$ m, die Elektronenladung $1.6 \cdot 10^{-19}$ C oder die Wellenlänge von rotem Licht $6.3 \cdot 10^{-7}$ m.

Weiter ist es bei nicht allzu grossen Exponenten üblich, die Zehnerpotenz in einer Vorsilbe (Vorsatz) zu integrieren. So ist der Abstand zur Sonne $150 \cdot 10^{9}$ m = 150 Gm (=Gigameter) oder die Wellenlänge von rotem Licht $630 \cdot 10^{-9}$ = 630 nm (=Nanometer).

Die gebräuchlichen Vorsilben sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

Für grosse Zahlen:

Faktor	Vorsilbe	Zeichen
10^{1}	Deka	da
10^{2}	Hekto	h
10^{3}	Kilo	k
10^{6}	Mega	M
10^{9}	Giga	G
10^{12}	Tera	T
10^{15}	Peta	P
10^{18}	Exa	E

Für kleine Zahlen:

Faktor	Vorsilbe	Zeichen
10^{-1}	Dezi	d
10^{-2}	Zenti	c
10^{-3}	Milli	m
10^{-6}	Mikro	µ
10^{-9}	Nano	n
10^{-12}	Pico	p
10^{-15}	Femto	f
10^{-18}	Atto	a

Teilweise wird zwischen der wissenschaftlichen und der technischen Schreibweise unterschieden. Bei der technischen Notation sind die Exponenten der Zehnerpotenz immer durch drei teilbar.