

## 6 Potenzieren

### 6.1 Einführung

Wenn bei einer Multiplikation lauter gleiche Faktoren auftreten, so wird dafür meistens die Potenzschreibweise gewählt.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}} = \underbrace{a^n}_{\text{Potenzwert}}$$

**a: Basis** oder Grundzahl,  $a \in \mathbf{R}$   
**n: Exponent** oder Hochzahl,  $n \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

Es ist  $a^1 = a$ ,  $a^2 = a \cdot a$ ,  $a^3 = a \cdot a \cdot a$ , ...

#### Basis der Potenz ist 0

Ist die Basis  $a$  einer Potenz  $a^n$  die 0, ist das zugehörige Produkt ebenfalls 0.

$$0^n = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0 = 0$$

#### Basis der Potenz ist 1

Ist die Basis  $a$  einer Potenz  $a^n$  die 1, ist das zugehörige Produkt ebenfalls 1.

$$1^n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$$

#### Das Vorzeichen beim Potenzieren

Bei positiver Basis ist der Wert der Potenz immer positiv.

$$(+a)^n = +a^n$$

z. B.  $(+2)^2 = (+2) \cdot (+2) = +2^2 = +4$   
 z. B.  $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +2^3 = +8$

Bei negativer Basis ist der Wert der Potenz positiv, wenn der **Exponent gerade** ist.

$$(-a)^{2n} = +a^{2n}$$

$n \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$   
 z. B.  $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +2^4 = 16$

Bei negativer Basis ist der Wert der Potenz auch negativ, wenn der **Exponent ungerade** ist.

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$$

$n \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$   
 z. B.  $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -2^3 = -8$

**Achtung**, beachten Sie den Unterschied:

$$-3^2 = -(3 \cdot 3) = -(3^2) = -9$$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$$

$$\underbrace{2a^3}_{2 \cdot a \cdot a \cdot a} \neq \underbrace{(2a)^3}_{2a \cdot 2a \cdot 2a}$$





**Schwierigkeit Nr. 1**

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = 1$$

mit der Formel (2. Potenzsatz) erhält man:

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$$

Dieses Problem lässt sich nur aus der Welt schaffen, indem man festsetzt (definiert):

$$a^0 = 1$$

gilt für  $a \neq 0$ , der Ausdruck  $0^0$  ist **nicht** definiert!

**Schwierigkeit Nr. 2**

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$$

mit der Formel (2. Potenzsatz) erhält man:

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$$

Dieses Problem lässt sich nur aus der Welt schaffen, indem man festsetzt (definiert):

$$\frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

gilt für  $a \neq 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

gilt für  $a \neq 0, b \neq 0$

andere Beweisführung für Schwierigkeit Nr. 2 (über  $a^0 = 1$ ):

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$









## 6.6 Übungen

Wenden Sie die Potenzgesetze an:

1.  $(b^3)^4 = ?$

2.  $(n^x)^2 = ?$

3.  $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{-3} \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^{-3} = ?$

4.  $(-x^{-2})^3 = ?$

5.  $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = ?$

6.  $\left[-\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3\right]^{-1} = ?$

7.  $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-3} = ?$

8.  $(a^{n-1})^3 = ?$

9.  $\left(\frac{a^2}{x^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2x^2}{5a^3}\right)^{-1} \cdot 2ax^{-4} = ?$

10.  $(3ax^3)^7 = ?$

11.  $(b^x)^{-n} = ?$

12.  $\left(\frac{a^0 \cdot b^2}{c^0}\right)^{2x} = ?$

13.  $\left[(x^2)^3\right]^5 = ?$

$$14. \left(\frac{2a^4}{3b^5}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2 : \left(\frac{2a}{3b}\right)^3 = ?$$

$$15. \frac{[(5a)^x]^{3b}}{(5a)^{2bx} \cdot (4c)^{bx}} = ?$$

$$16. 7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 10 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 27 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 36 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = ?$$

$$17. n^{6x+a} \cdot n^{2x-2a} = ?$$

$$18. (a+b)^{2a-3} \cdot (a+b)^{4a+6} = ?$$

$$19. b^{a-n} \cdot b^{a+n} = ?$$

$$20. 2 \cdot (n+x)^{4-3a} \cdot 3 \cdot (n+x)^{3+a} - 4 \cdot (n+x)^7 \cdot 3 \cdot (n+x)^{-2a} = ?$$

$$21. \frac{n^4}{x^3} \div \frac{n^5 b^2}{cx^5} = ?$$

$$22. \frac{3a^3 b^2}{4n^{-2} d^6} \cdot \frac{3a^{-4} b^3}{d^3 n^2} = ?$$

$$23. \frac{4a^2 b^{-6}}{d^2 c^{-4}} \div \frac{12a^3 b^{-8}}{d^3 c^3} = ?$$

$$24. (a^3)^2 = ?$$

$$25. (a^{-2} + b^{-3})^{-2} = ?$$

$$26. [(n^2 x^3)^2]^{-2} = ?$$

## 6.7 Exponentenschreibweise

In Naturwissenschaft und Technik kommen oft sehr grosse oder sehr kleine Zahlen vor. Zum Beispiel ist die Sonne ungefähr 150000000000 m (Meter) von der Erde entfernt oder ein Elektron trägt die elektrische Ladung von ungefähr 0.00000000000000000016 C (Coulomb) oder rotes Licht hat eine Wellenlänge von 0.00000063 m (Meter). Dies sind sehr unhandliche Zahlen. Deshalb notiert man diese Werte üblicherweise in der wissenschaftlichen Schreibweise oder Exponentenschreibweise. So betragen der Abstand zur Sonne  $1.5 \cdot 10^{11}$  m, die Elektronenladung  $1.6 \cdot 10^{-19}$  C oder die Wellenlänge von rotem Licht  $6.3 \cdot 10^{-7}$  m.

Weiter ist es bei nicht allzu grossen Exponenten üblich, die Zehnerpotenz in einer Vorsilbe (Vorsatz) zu integrieren. So ist der Abstand zur Sonne  $150 \cdot 10^9$  m = 150 Gm (=Gigameter) oder die Wellenlänge von rotem Licht  $630 \cdot 10^{-9}$  = 630 nm (=Nanometer).

Die gebräuchlichen Vorsilben sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

Für grosse Zahlen:

Faktor	Vorsilbe	Zeichen
$10^1$	Deka	da
$10^2$	Hekto	h
$10^3$	Kilo	k
$10^6$	Mega	M
$10^9$	Giga	G
$10^{12}$	Tera	T
$10^{15}$	Peta	P
$10^{18}$	Exa	E

Für kleine Zahlen:

Faktor	Vorsilbe	Zeichen
$10^{-1}$	Dezi	d
$10^{-2}$	Zenti	c
$10^{-3}$	Milli	m
$10^{-6}$	Mikro	$\mu$
$10^{-9}$	Nano	n
$10^{-12}$	Pico	p
$10^{-15}$	Femto	f
$10^{-18}$	Atto	a

Teilweise wird zwischen der wissenschaftlichen und der technischen Schreibweise unterschieden. Bei der technischen Notation sind die Exponenten der Zehnerpotenz immer durch drei teilbar.