

7 Radizieren

7.1 Einführung

Unter der n-ten Wurzel aus a versteht man eine Zahl b, die mit n potenziert a ergibt.

$$\sqrt[n]{a} = b \rightarrow b^n = a \quad \text{a: Radikant (a} \geq 0\text{), n: Wurzelexponent}$$

Mehrdeutigkeit von Wurzeln

Ist $a^2 = b$, so ist auch $(-a)^2 = b$. Es gibt also zwei Zahlen, die ins Quadrat erhoben, b ergeben. Man merke sich aber, bei der Quadratwurzel aus einer positiven Zahl ist das Ergebnis als positive Zahl definiert.

$$\sqrt{9} = +3$$

Sollen die positive und die negative Lösung gelten, so muss dies folgendermassen dargestellt werden:

$$a = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$(\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9$$

$$(\sqrt{25})^2 = 5^2 = 25$$

} Wurzelziehen und Quadrieren heben sich auf.

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$$

} Die Umkehrung gilt jedoch nicht immer!

Das Ergebnis der Quadratwurzel ist als positive Zahl definiert!

Radizieren mit dem Taschenrechner

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Beweis:

Annahme: $x = a^{\frac{1}{2}}$

quadrieren: $x^2 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{2}{2}} = a$

radizieren: $x = \sqrt{a}$

Somit: $x = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Beispiele

$$\sqrt[5]{80} = 80^{\frac{1}{5}} = 80^{0,2} = \underline{\underline{2,40}}$$

$$\sqrt[3]{182} = 182^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{5,67}}$$

$$\sqrt[3]{24} = 24^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{2,88}}$$

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{1,26}}$$

7.2 Addition und Subtraktion von Wurzeln

Bei der Addition und der Subtraktion von Wurzeln ist zu berücksichtigen, dass nur Wurzeln mit gleichen Exponenten und Radikanten zu einem Glied zusammengefasst werden können.

$$5\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{b} + 7\sqrt[3]{a} = 12\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{b}$$

7.3 Multiplikation und Division von Wurzeln

$$1. \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\text{z.B.} \quad \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{8} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(8^{\frac{1}{3}}\right) = (27 \cdot 8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27 \cdot 8} = \underline{\underline{6}}$$

$$2. \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b > 0)$$

$$\text{z.B.} \quad \frac{\sqrt[2]{16}}{\sqrt[2]{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \underline{\underline{2}}$$

7.4 Potenzen einer Wurzel und Radizieren von Potenzen

$$3. \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^x = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^x = \left(a^x\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$$

$$\text{z.B.} \quad \left(\sqrt[4]{16}\right)^2 = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(16^2\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16^2} = 16^{\frac{2}{4}} = 16^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{4}}$$

$$4. \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\text{z.B.} \quad \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3]{64^{\frac{1}{2}}} = \left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3 \cdot 2}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \underline{\underline{2}}$$

Achtung

Im Gegensatz zu $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ist $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$!!!

$$\text{Zahlenbeispiel:} \quad \sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} = 6 \cdot 8 = \underline{\underline{48}}$$

$$\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = \underline{\underline{10}}$$

$$\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = \underline{\underline{14}}$$

$$\text{Somit:} \quad \sqrt{36 + 64} \neq \sqrt{36} + \sqrt{64}$$

Merke: **Wurzeln aus Summen ziehen nur die!!!**

Beispiele:

$$1. \quad \sqrt[3]{\sqrt{x^2}} = \sqrt{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{2}{3 \cdot 2}} = x^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{x}}}$$

$$2. \quad \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt{x^3} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3} = \sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2 = \underline{\underline{\sqrt{x^3}}}$$

$$3. \quad \sqrt[5]{28} = 28^{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{1,9473}}$$

$$4. \quad \sqrt[3]{5,2^{2,5}} = 5,2^{\frac{2,5}{3}} = \underline{\underline{3,9507}}$$

$$5. \quad 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{a} - \sqrt{3} - 5 \cdot \sqrt[3]{a} = \underline{\underline{\sqrt{3} + \sqrt{a} - 5 \cdot \sqrt[3]{a}}}$$

$$6. \quad \sqrt[2]{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = \underline{\underline{a^3}}$$

$$7. \quad \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

$$8. \quad \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}} = \underline{\underline{\sqrt[6]{a^5}}}$$

$$9. \quad \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{3}{3}} = \underline{\underline{x}}$$

$$10. \quad \sqrt[3]{\sqrt[2]{2}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{2 \cdot 3}} = 2^{\frac{1}{6}} = \underline{\underline{\sqrt[6]{2}}}$$

$$11. \quad \sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{6^2} = 6^{\frac{2}{4}} = 6^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$$

$$12. \quad \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{4^2} = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$$

$$13. \quad B = \frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt[3]{\underbrace{76,5^2 - 67,5^2}_{\text{Binom: } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 27}{(76,5 + 67,5) \cdot (76,5 - 67,5)}} = \sqrt{\frac{\overset{1}{12} \cdot \overset{3}{27}}{\underset{12}{144} \cdot \underset{1}{9}}} = \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

7.5 Übungen

1. $\sqrt[3m]{(a+b)^{2m}} \cdot \sqrt[3]{(a+b)}$

2. $\sqrt[5]{2\sqrt{x^5}} + \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^6}}$

3. $\frac{\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{\sqrt[4]{a^4 - b^4}} \cdot \frac{\sqrt[4]{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}}{a}$

4. $\sqrt[9]{\frac{(x+y)^6}{z^5}} \cdot \sqrt[9]{\frac{(x+y)^3}{z^4}}$

5. $\sqrt[3]{\sqrt{x^2}}$

6. $\sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^2}}$

7. $(\sqrt[3]{x})^2 \cdot (\sqrt[6]{x})^3$

8. $\sqrt{\left(\frac{n^4 \cdot x^3}{nx}\right)^2}$

Mit Taschenrechner:

9. $\sqrt[5]{500}$

10. $\sqrt[2.5]{3^{\frac{2}{3}}}$

11. $\sqrt[5]{7}$

12. $3,256789 \sqrt[1,256783219]{}$

13. Berechnen und vereinfachen Sie so weit als möglich:

$$E = \frac{\left(\sqrt[4]{u}\right)^3 \cdot s^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{s^{-1}}}{\left(\frac{1}{\sqrt[12]{u}}\right)^5 \cdot s^{-\frac{5}{6}} \cdot \left(\sqrt[3]{u}\right)^2}$$

14. Vereinfachen Sie den Ausdruck E und bestimmen Sie nachher seinen Wert für $a = \frac{2}{7}$ und $b = 3,5$:

$$E = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

15. Berechnen und vereinfachen Sie so weit als möglich:

$$E = \frac{\sqrt[12]{v^5} \cdot t^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{t^{-1}}}{v^{-\frac{3}{4}} \cdot t^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{v^2}}$$

16. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck so weit als möglich:

$$5a \cdot \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} - 2 \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^3} + a \cdot \sqrt[4]{a^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}}$$

17. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck so weit als möglich:

$$a^4 \cdot \left(1 - \frac{2}{a} - \frac{2}{a^2}\right)^2 - a^4 \cdot \left(1 - \frac{2}{a^2}\right)^2$$

18. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck so weit als möglich:

$$A = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{a} - \left(\frac{a}{2} - 1\right)^{-1} \right\}^{-2}$$

7.6 Übungen Potenzieren und Radizieren

1. $(3ax^3)^7$

2. $-a^4 \cdot (-a^6)$

3. $(2a^2b)^3 \cdot (3ab^2)^3$

4. $100 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^{-2}$

5. $-\left[3 \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)^{-2}\right]^3$

6. $\sqrt[3]{27^4}$

7. $\sqrt[x]{a^x}$

8. $(\sqrt[3]{x})^2 \cdot (\sqrt[6]{x})^3$

9. $\frac{\sqrt{98}}{49 \cdot \sqrt{2}}$

10. $\sqrt{\left(\frac{n^4 x^3}{nx}\right)^2}$

11. $(\sqrt[4]{49a})^2 \div 14$

12. $\left[(n^2 \cdot x^3)^2\right]^{-2}$