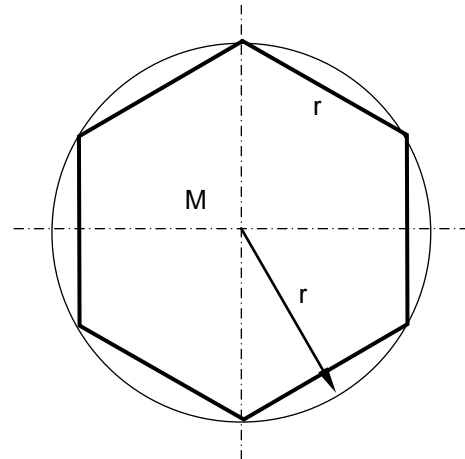


11 Kreisberechnungen

11.1 Kreisumfang

Ein Kreis kann als ein regelmässiges Vieleck mit unendlich grosser Anzahl Ecken angesehen werden.

n	U
6	$6 \cdot r = 3 \cdot d$
12	$3,1058 \cdot d$
24	$3,1326 \cdot d$
...	...
1536	$3,1416 \cdot d$
n	$\left[\left(\sin \frac{180^\circ}{n} \right) \cdot n \right] \cdot d$



$$U = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$$

π ist eine **irrationale** Zahl und kann somit nicht als Bruch geschrieben werden!

11.2 Kreisfläche

Ein Kreis kann in unendlich viele kleine (rechtwinklige) Dreiecke zerlegt werden.

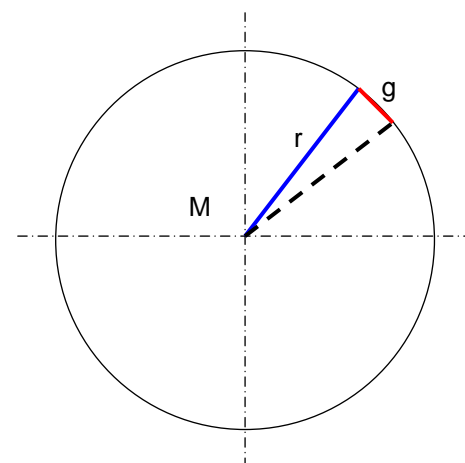
Herleitung:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{g \cdot r}{2}$$

$g \cdot n = U$

$$A_{\text{Kreis}} = A_{\text{Dreieck}} \cdot n = \frac{g \cdot r \cdot n}{2} \quad (n = \text{Anzahl Dreiecke})$$

$$A_{\text{Kreis}} = \frac{U \cdot r}{2} = \frac{d \cdot \pi \cdot d}{2 \cdot 2} = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{(2r)^2 \cdot \pi}{4} = r^2 \cdot \pi$$



$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = r^2 \cdot \pi$$

11.3 Kreisteile

Herleitung Kreisbogen

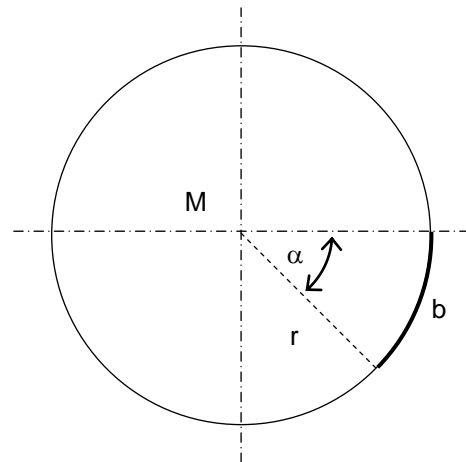
$$U \cong 360^\circ$$

$$b = \frac{U \cdot \alpha}{360^\circ}$$

$$b = \frac{d \cdot \pi \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ}$$

Zur Erinnerung: $\underbrace{\frac{b}{r}} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}$

Bogenmass

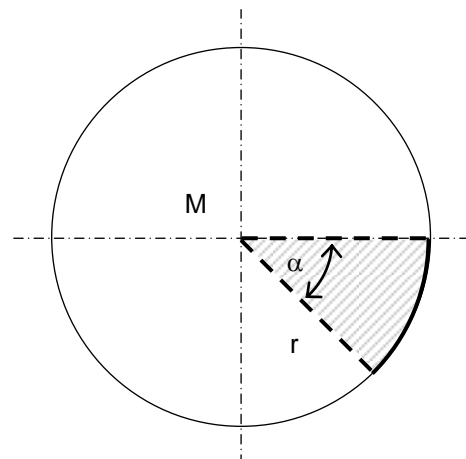


Herleitung Kreissektor (diagonal gestrichelt)

$$A_{\text{Kreis}} \cong 360^\circ$$

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{A_{\text{Kreis}} \cdot \alpha}{360^\circ}$$

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{d^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{4 \cdot 360^\circ} = \frac{(2 \cdot r)^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{4 \cdot 360^\circ} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360^\circ}$$



Beispiel 1

Der Erddurchmesser beträgt am Äquator 12'756,776 [km]. Man lege eine Schnur um den Äquator. Wenn man die Schnur nun um einen Meter verlängern würde, wie gross würde der radiale Abstand?

Geg: $d = 12'756,776$ [km], $U_{\text{Verlängert}} = U_{\text{Äquator}} + \Delta l$, $\Delta l = 1$ [m]

Ges: $x = ?$

Lösung:

$$U_{\text{Verlängert}} = U_{\text{Äquator}} + \Delta l$$

$$D \cdot \pi = d \cdot \pi + \Delta l \quad (1)$$

$$D = d + 2x \quad (2)$$

(2) in (1):

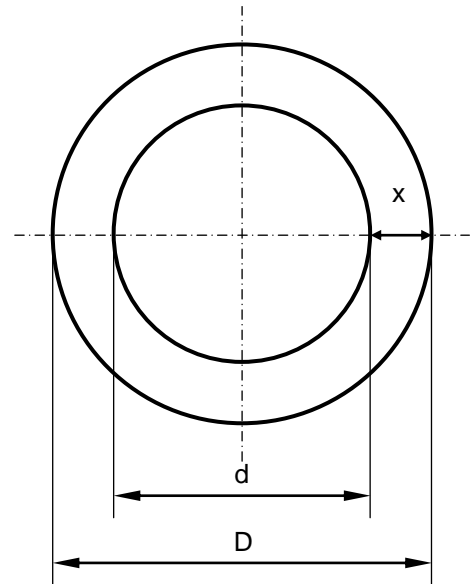
$$(d + 2x) \cdot \pi = d \cdot \pi + \Delta l$$

$$d + 2x = \frac{d \cdot \pi + \Delta l}{\pi} = d + \frac{\Delta l}{\pi}$$

$$2x = d + \frac{\Delta l}{\pi} - d = \frac{\Delta l}{\pi}$$

$$x = \frac{\Delta l}{2 \cdot \pi}$$

eingesetzt: $x = \frac{1}{2 \cdot \pi} = \underline{\underline{0,1592}} \text{ [m]}$

**Beispiel 2**

Berechnen Sie von der gegebenen Skizze: a) allgemeine Lösung für die schraffierte Fläche
b) schraffierte Fläche für $a = 6$ [cm]

Lösung:

a)

$$A = A_{\text{Quadrat}} - 4 \cdot A_{\text{Viertelkreis}}$$

$$A_{\text{Quadrat}} = a^2$$

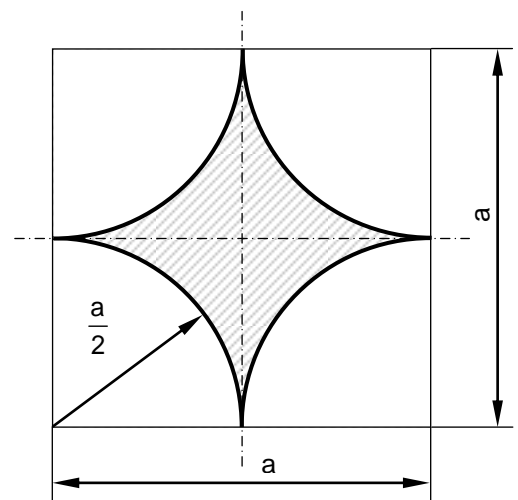
$$4 \cdot A_{\text{Viertelkreis}} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^2 \cdot \pi}{4}$$

Somit :

$$A = a^2 - \frac{a^2 \cdot \pi}{4} = a^2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = a^2 \cdot 0,2146$$

b)

$$A = 6^2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{7,73}} \text{ [cm}^2\text{]}$$



Beispiel 3

Berechnen Sie von der gegebenen Skizze: a) allgemeine Lösung für die schraffierte Fläche
b) schraffierte Fläche für $a = 6$ [cm]

Lösung:

a)

$$A = (A_{\text{Viertelskreis}} - A_{\text{Dreieck}}) \cdot 2 \quad (1)$$

$$A_{\text{Viertelskreis}} = \frac{r^2 \cdot \pi}{4} \quad (2)$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{r^2}{2} \quad (3)$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

(2) und (3) in (1):

$$A = \left(\frac{r^2 \cdot \pi}{4} - \frac{r^2}{2}\right) \cdot 2 = 2 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{4}\right) = r^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{2}\right) \quad (5)$$

(4) in (5):

$$A = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{2}\right) = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi - 2}{2}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{4}\right) = a^2 \cdot 0,2854$$

oder

$$A = (A_{\text{Viertelskreis}} - A_{\text{Dreieck}}) \cdot 2 = A_{\text{Halbkreis}} - \underbrace{A_{\text{Quadrat}}}_{\text{2-rechtwinkliges Dreieck}}$$

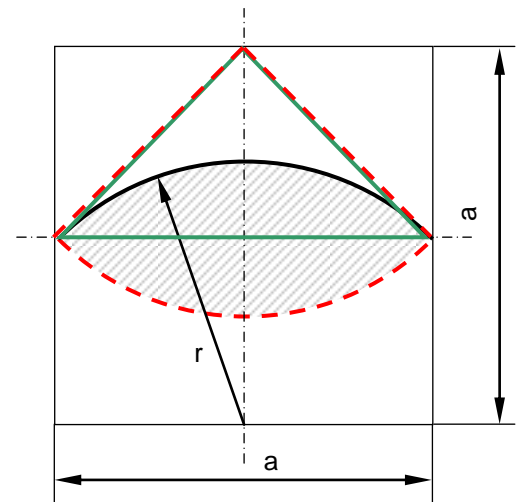
$$A_{\text{Halbkreis}} = \underbrace{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}_{r^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a^2 \cdot \pi}{4}$$

$$A_{\text{Quadrat}} = \underbrace{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}_{r^2} = \frac{a^2}{2}$$

$$A = \frac{a^2 \cdot \pi}{4} - \frac{a^2}{2} = a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)$$

b)

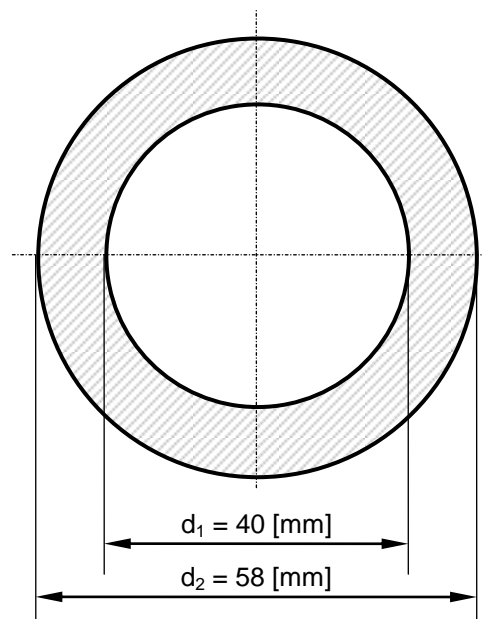
$$A = 6^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{4}\right) = \underline{\underline{10,27 \text{ [cm}^2\text{]}}}$$



11.4 Übungen

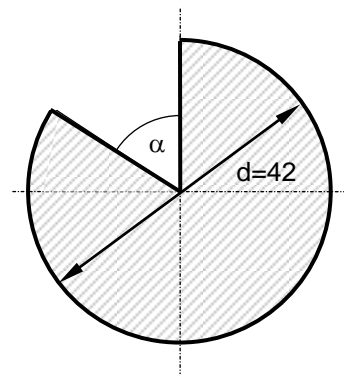
1. Berechnen Sie die Kreisringfläche!

- a) allgemeine Lösung
b) für $d_1 = 40 \text{ mm}$, $d_2 = 58 \text{ mm}$



2. Berechnen Sie die Fläche und den Umfang nebenstehender Figur!

- a) allgemeine Lösung
b) für $\alpha = 40^\circ$ und $d = 42 \text{ mm}$

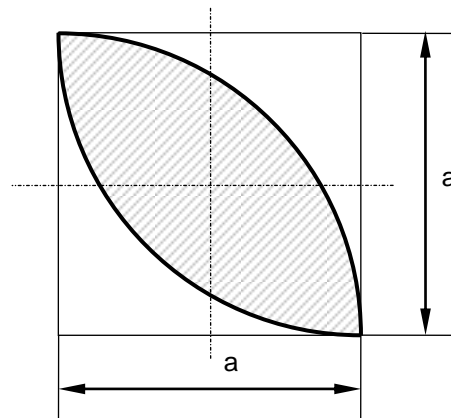


3. Berechnen Sie den Umfang eines Kreises aus dem Flächeninhalt!

- a) allgemeine Lösung
b) für $A = 46,8 \text{ cm}^2$

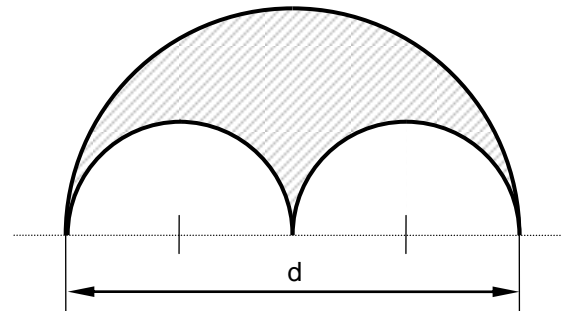
4. Berechnen Sie die Fläche und den Umfang nebenstehender schraffierter Figur!

- a) allgemeine Lösung
b) für $a = 5 \text{ cm}$



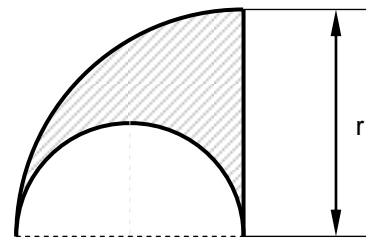
5. Berechnen Sie die schraffierte Fläche!

- a) allgemeine Lösung
b) für $d = 50 \text{ mm}$



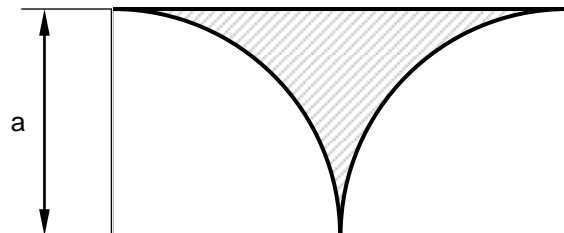
6. Berechnen Sie die schraffierte Fläche!

- a) allgemeine Lösung
b) für $r = 32 \text{ cm}$



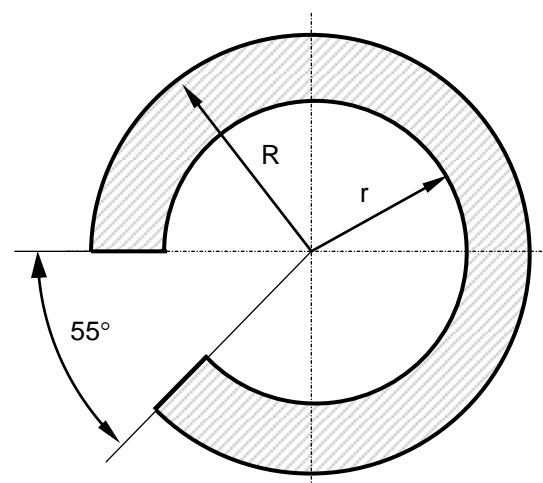
7. Berechnen Sie die schraffierte Fläche!

- a) allgemeine Lösung
b) für $a = 8,5 \text{ cm}$



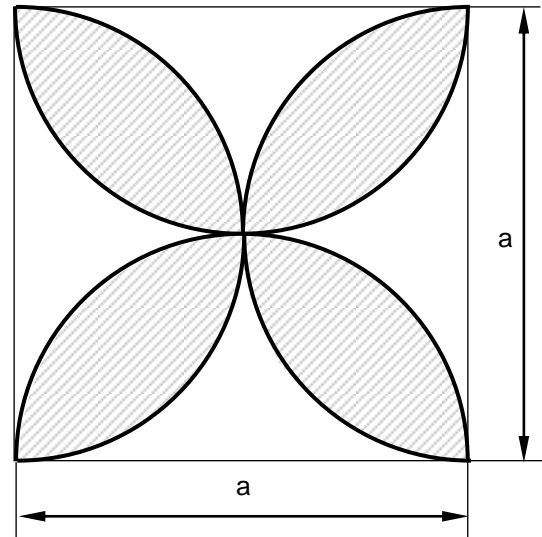
8. Berechnen Sie die Kreisringfläche!

- a) allgemeine Lösung
b) mit $R=62 \text{ mm}$ und $r=42 \text{ mm}$



9. Berechnen Sie die Fläche und den Umfang nebenstehender schraffierter Figur!

- a) allgemeine Lösung
b) für $a = 45 \text{ mm}$



10. Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche aus r .

