2 Rechenarten

2.1 Addition

Das Pluszeichen besagt, dass man zur Zahl a die Zahl b hinzuzählt oder *addiert*. Aus diesem Grunde heisst diese Rechenart auch Addition.

a	+	b	=	c
↓	↓	↓	↓	↓
Summand	plus	Summand	gleich	Summe

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

$a + b = b + a$ z.B. $4 + 2 = 2 + 4$

Die Summe behält ihren Wert, wenn die beiden Summanden vertauscht werden.
Das Kommutativgesetz gilt für beliebig viele Summanden:

$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = c + b + a$

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ z.B. $(5 + 3) + 2 = 5 + (3 + 2) = 5 + 3 + 2$

In einer Summe darf man die Summanden beliebig zu Teilsummen verbinden, ohne dass sich der Wert der Summe ändert. Mit den Klammern kann angegeben werden, welche Zahlen zuerst addiert werden sollen. **Klammern sind aber bei der Addition nicht notwendig.**

Neutrales Element

Setzt man in der Addition a + b für b = 0, so erhält man:

$a + 0 = 0 + a = a$ z.B. $7 + 0 = 0 + 7 = 7$

0 heisst in diesem Fall das neutrale Element der Addition.

Abgekürzte Summe

Ist beispielsweise folgende Addition auszuführen:

$a + a + b + c + a + b + c + a + c$, z.B. $3 + 3 + 5 + 7 + 3 + 5 + 7 + 3 + 7$

so werden die Summen nach dem Kommutativgesetz geordnet:

$a + a + a + a + b + b + c + c + c$ z.B. $3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 7 + 7 + 7$

und dann die gleichen Summanden zusammengefasst zu

$4a + 2b + 3c$. z.B. $4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7$

2.2 Subtraktion

Bei der Subtraktion wird zu einem geordneten Zahlenpaar eine dritte Zahl bestimmt, so dass die zweite Zahl dazu addiert wiederum die erste Zahl ergibt. (Die Subtraktion kann als die Umkehroperation der Addition betrachtet werden.)

a	–	b	=	c
↓	↓	↓	↓	↓
Minuend	minus	Subtrahend	gleich	Differenz

Kommutativgesetz und Assoziativgesetz

$a - b \neq b - a \quad (a \neq b)$ z.B. $5 - 2 \neq 2 - 5$

Bei der Subtraktion gilt das Kommutativgesetz **nicht**.

$(a - b) - c \neq a - (b - c)$ z.B. $(7 - 3) - 1 \neq 7 - (3 - 1)$

Bei der Subtraktion gilt das Assoziativgesetz **nicht**.

Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Subtrahenden

$a - b - c = a - c - b$ z.B. $10 - 5 - 2 = 10 - 2 - 5$

Die **Subtrahenden** können beliebig vertauscht werden.

2.3 Verbindung der Addition mit der Subtraktion

$a + (b - c) = a + b - c$ z.B. $5 + (3 - 2) = 5 + 3 - 2$

Muss eine Differenz zu einer Zahl addiert werden, so addiert man den Minuenden und subtrahiert den Subtrahenden.

$a - (b + c) = a - b - c$ z.B. $8 - (4 + 2) = 8 - 4 - 2$

Muss eine Summe von einer Zahl subtrahiert werden, so kann man die Summanden einzeln vom Minuenden subtrahieren.

$a - (b - c) = a - b + c$ z.B. $7 - (4 - 2) = 7 - 4 + 2$

Wird eine Differenz von einem Ausdruck subtrahiert, so wird der Minuend subtrahiert und der Subtrahend addiert.

$a + [b - (c + d)] = a + [b - c - d] = a + b - c - d$ z.B. $9 + [5 - (4 + 2)] = 9 + [5 - 4 - 2] = 9 + 5 - 4 - 2$

Mehrfache Klammern werden von innen nach aussen schrittweise aufgelöst.

Zusammenfassung (Klammerregeln)

- Steht ein Pluszeichen vor der Klammer, so ändern sich beim Auflösen die Rechenzeichen seiner Glieder nicht.
- Steht ein Minuszeichen vor der Klammer, so erhalten beim Auflösen der Klammer die Glieder entgegengesetzte Rechenzeichen.
- Treten in einer Aufgabe mehrere Klammern auf, so löst man die Klammern unter Beachtung der Klammerregeln von innen nach aussen auf.

2.4 Übungen

1. $9x + 3y + (2x - 2y)$

2. $(3x - 2a + y) - (2x + 3a - 2y)$

3. $-(2x - 8y) + 3y + (-2y + 3x)$

4. $2x - [4y - (2x - 3y) - 4x] - 6y$

5. $a - \{[(3b + 2a) - 2b] - 3a\}$

6. $11a - [(5a + 3b) - 5b - (4a + 5b)]$

7. $-16 + (-25) - (-31) + (-21) - 12 + (-11) - 10$

8. $26a + (-12b) - (-30a) - (-12b) - (+10a) + 12b + 12a$

9. $14a - 9b + c - 5a - 3b - c - 9a - 12c - b + 4a$

10. $-(27a - 16b - 20c) - (5c - 20a + 13b)$

11. $(15x - 23y) - [5x - (40x + 23y) - 20] - [-20x + (3x + y) - (40x - 20)]$

12. $24a - [75a + (13a - b) - (7a + b)] + [12a - (15a - b) - 72b]$

13. $25 + (-12) - (-31) + (-21) - 15 - 17 - (+21) + (-3) + 4 + (-5)$

14. $7 - \{-[-(26 + 37) + 25] - 12 + (-13)\} - 6$

15. $\{[4xy - (6ab - 4rs)] - (3xy + 8ab) - [(16rs - 2xy) - 9ab]\}$

16. $-9 + [-(+16a - 3a^2 + 5ab) - (-7a^2 - 30b)] - (-b^2) + (-a^2 + 12b^2)$

17. $[(-3cd + 5) - 25] - [18 - (7 + 3cd)] + [6 - (cd + 10) - (3cd - 9)]$

18. $10 - 20 - 30 - [40 - (50 - 60) - (70 - 80) - 90] - 100$

Denksportaufgabe

Zwei Mathematiker, die gemütlich beim Abendessen sitzen, unterhalten sich über familiäre Angelegenheiten. Dabei interessiert sich der Gast unter anderem auch für das Alter der drei Kinder seines Freundes.
"Versuche, das Alter meiner drei Kinder zu bestimmen, indem du die folgenden Aussagen geschickt kombinierst", forderte der Mathematiker seinen Kollegen auf, der dieses Spiel gerne eingeht.
"Wenn du die Altersjahre der 3 Kinder miteinander multiplizierst, erhältst du genau die Zahl 36, wobei wir nur ganze Zahlen berücksichtigen."
Nach einer Weile hat der Befragte die verschiedenen Möglichkeiten erkannt und sagt zu seinem Freund: "Dies ergibt doch 8 Varianten, und ich kann hieraus unmöglich folgern, wie alt deine Kinder sind." "Geh bitte rasch hinaus", setzt der Gastgeber die Spielerei fort, "und betrachte meine Hausnummer, denn wenn du die gesuchten Altersjahre zusammenzählst, wirst du dieselbe Zahl erhalten wie meine Hausnummer!"
Der Freund befolgt den Hinweis, kehrt zurück und schüttelt den Kopf: "Damit weiss ich aber noch nicht genug, um das Alter deiner Kinder zu bestimmen, es sei denn, der Älteste hätte eine Vorliebe für Spaghetti!" "Dem ist so, aber woher weisst du das?" fragt der Gastgeber erstaunt. "Nun, diese Vermutung wird durch das Bild an der Wand bestärkt, und jetzt sage ich dir auch die drei gesuchten Zahlen. Es sind dies ...!"

2.5 Multiplikation

Besteht eine Addition aus lauter gleichen Summanden, so kann sie verkürzt als Multiplikation geschrieben werden.

a	·	b	=	c
↓	↓	↓	↓	↓
Multiplikator	mal	Multiplikand	gleich	Produkt

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

a · b = b · a z.B. 6 · 4 = 4 · 6

Der Wert des Produktes ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

a · b · c = (a · b) · c = a · (b · c) z.B. 4 · 7 · 2 = (4 · 7) · 2 = 4 · (7 · 2)

Beim Multiplizieren darf man die Faktoren zu Teilprodukten zusammenfassen.

Neutrales Element

Wird ein Faktor mit 1 multipliziert, so ändert sich der Wert des Faktors nicht.

a · 1 = a z.B. 8 · 1 = 8

1 ist das neutrale Element der Multiplikation.

Vor- und Rechenzeichen

(+ a)	·	(- b)	=	- ab
↓	↓	↓	↓	↓
Vorzeichen	Rechenzeichen	Vorzeichen	gleich	Vorzeichen

Vorzeichenregel der Multiplikation

1. $(+a)\cdot(+b)=(+ab)=ab$
2. $(+a)\cdot(-b)=(-ab)=-ab$
3. $(-a)\cdot(+b)=(-ab)=-ab$
4. $(-a)\cdot(-b)=(+ab)=ab$

Ordnen des Produktes

An den Anfang setzt man die bestimmte Zahl und danach alphabetisch die Variablen.

z.B. 2 · y · a · x · b = 2 a b x y

Punktrechnung vor Strichrechnung

Wenn nicht mit Klammern eine Reihenfolge vorgeschrieben wird, muss immer zuerst die Multiplikation oder Division und erst nachher die Addition oder Subtraktion ausgeführt werden.

z.B. $5 \cdot 4 + 3 \cdot 8 = (5 \cdot 4) + (3 \cdot 8) = 20 + 24 = 44$

Treten nur Operationen gleicher Stufe auf, so wird wenn nicht Klammern etwas anderes vorschreiben, der Reihe nach von links nach rechts gerechnet.

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

Man multipliziert eine Summe mit einem Faktor, indem man jedes Glied der Summe mit dem Faktor multipliziert und nachher die Produkte addiert.

$c \cdot (a + b) = a \cdot c + b \cdot c$ z.B. $5 \cdot (4 + 7) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 7$

Beispiele

1. $a \cdot b \cdot c = abc$

2. $(-3) \cdot (-1) \cdot a \cdot (-2a) = -6a^2$

3. $2a \cdot (3b + 1) = 6ab + 2a$

4. $-3ab \cdot (a - b - 1) = -3a^2b + 3ab^2 + 3ab$

5. $(a + b) \cdot (1 - b) = a - ab + b - b^2 = -ab + a - b^2 + b$

6. $(2 + x) \cdot (1 - x) \cdot x = (2 - 2x + x - x^2) \cdot x = (2 - x - x^2) \cdot x = 2x - x^2 - x^3 = -x^3 - x^2 + 2x$

7. $(x - 1) \cdot (x + y + 1) = x^2 + xy + x - x - y - 1 = x^2 + xy - y - 1$

8. $\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{10}{21}$

2.6 Übungen

1. $9ax \cdot 2cy$

2. $3a \cdot 5y \cdot 6c \cdot 2b$

3. $16a \cdot (-7b) \cdot (-3c)$

4. $(-2x) \cdot (+2y) \cdot (-3z)$

5. $8 \cdot (3x + 4)$

6. $(a + 3) \cdot 3bc$

7. $8 \cdot (2a - 5b + 4c)$

8. $6a + 5ab - 3a \cdot (2 + 5b - c)$

9. $(5b + a - c) \cdot 5x - 4a + 3c$

10. $(3a + 4b) \cdot (b - 11)$

11. $(4a - 5x) \cdot (5c + 4b) \cdot 4n$

12. $(2x + y) \cdot (3m + n) + (2x + y) \cdot (m - 3n)$

13. $(x - y) \cdot (x - z) - (x - 1) \cdot (x + z)$

14. $2 \cdot (a - b) - [3 \cdot (a - b) - a]$

15. $3b \cdot (-4c) \cdot (-2d) \cdot (-1)$

16. $(x - 1) \cdot (x + 2 + y)$

17. $(2x + 4y - 5z) \cdot (3x + 2y - 6z)$

18. $(2m + 4n) \cdot (5a + 6b - 8c) + (3m + 4n) \cdot (9a - 6b + 7c)$

19. $12 \cdot \{5 \cdot (a + b) - 4 \cdot [3b \cdot (3 + a) - 5a \cdot (4 - b)] + 5a\}$

20. Ein zerstreuter Professor hatte drei Töchter. Einmal wurde er von einem Studenten nach dem Alter seiner Töchter gefragt. Der Professor antwortete: „ Ich bin mir nicht ganz sicher. Ich weiss, dass eine der drei die Jüngste ist.“ „Das ist nicht besonders überraschend“, antwortete der Student. „Welche ist denn die Jüngste?“ „Das kann ich wirklich nicht genau sagen; entweder Alice oder Mabel.“ „Nun, und welche ist die Älteste?“
„Das weiss ich auch nicht genau. Ich erinnere mich nur daran, dass entweder Alice die Älteste oder Lilian die Jüngste ist, doch ich kann mich nicht daran erinnern, wer.“
Welche Tochter ist die jüngste und welche die älteste?

2.7 Division

Wenn $c \cdot b = a$ ist, dann gilt:

a	:	b	=	c
↓	↓	↓	↓	↓
Dividend	durch	Divisor	gleich	Quotient

Die Division ist somit die Umkehroperation der Multiplikation.

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

$a : b \neq b : a \quad (a \neq b)$ z.B. $8 : 2 \neq 2 : 8$

Bei der Division gilt das Kommutativgesetz nicht.

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

$(a : b) : c \neq a : (b : c)$ z.B. $(10 : 5) : 2 \neq 10 : (5 : 2)$

Bei der Division gilt das Assoziativgesetz nicht.

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

$(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$ z.B. $(8 + 4) : 2 = (8 : 2) + (4 : 2)$

Die Division und die Null

$0 : a = 0$ weil $0 \cdot a = 0$ z.B. $0 : 5 = 0$ weil $0 \cdot 5 = 0$

Ist der Dividend gleich 0, so ist der Quotient auch gleich 0.

Aus der Definition der Division als Umkehrfunktion der Multiplikation ist ersichtlich, dass die Division durch 0 sinnlos ist.

Beweis:

Wäre $a : 0 = b$, so müsste nach Definition $b \cdot 0 = a$ ergeben.
Wenn aber $a \neq 0$ ist, gibt es keine Zahl b, die diese Gleichung erfüllt. Die Division durch 0 ist somit sinnlos.

Vorzeichenregel der Division

1. $(+a):(+b)=(+c)$
2. $(+a):(-b)=(-c)$
3. $(-a):(+b)=(-c)$
4. $(-a):(-b)=(+c)$

Merke:

$$(+a):(-b)=(-a):(+b)=\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$$

Die Vorzeichen von Zähler und Nenner können miteinander vertauscht werden. Ein Vorzeichen vor dem Bruchstrich kann in den Zähler oder in den Nenner gebracht werden.

Sonderfälle

Da die Multiplikation 1 · a = a ergibt, gilt:
a : a = 1
a : 1 = a

Beispiele

1. $8ab:4a=\frac{8ab}{4a}=2b$

2. $9x:(-18xy)=\frac{9x}{-18xy}=-\frac{1}{2y}$

3. $(8xy+4xz-4):4x=\frac{8xy}{4x}+\frac{4xz}{4x}-\frac{4}{4x}=2y+z-\frac{1}{x}$

4. $16ax+12ab-8ay:4a=16ax+12ab-2y=12ab+16ax-2y$ Achtung: Keine Klammer!

5. $(12x+9y):(4x+3y)=3$ 2. Zurückmultiplizieren

$-(12x+9y)$

0

1. Glied Dividend durch 1. Glied vom Divisor

3. Subtrahieren

2.8 Polynomdivision Schritt für Schritt

Hinweis:

Rot (fett) dargestellt sind jeweils diejenigen Teile, die in dem betreffenden Schritt für die Rechnung genutzt bzw. als Ergebnis dieses Rechenschritts erhalten werden. Die Terme sind bereits geordnet!

1. $(\mathbf{x^3}+6x^2+9x+4):(\mathbf{x}+1)=\mathbf{x^2}$

2. $$\begin{array}{l} (x^3+6x^2+9x+4):\mathbf{(x+1)}=\mathbf{x^2} \\ \mathbf{x^3+x^2} \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} (x^3+6x^2+9x+4):(x+1)=x^2 \\ \mathbf{-(}x^3+x^2\mathbf{)} \\ \hline \quad \mathbf{5x^2+9x+4} \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} (x^3+6x^2+9x+4):(\mathbf{x}+1)=x^2\mathbf{+5x} \\ -(x^3+x^2) \\ \hline \quad \mathbf{5x^2}+9x+4 \end{array}$$

5. $$\begin{array}{l} (x^3+6x^2+9x+4):\mathbf{(x+1)}=x^2\mathbf{+5x} \\ -(x^3+x^2) \\ \hline \quad 5x^2+9x+4 \\ \quad \mathbf{5x^2+5x} \end{array}$$

6. $$\begin{array}{l} (x^3+6x^2+9x+4):(x+1)=x^2+5x \\ -(x^3+x^2) \\ \hline \quad 5x^2+9x+4 \\ \quad \mathbf{-(}5x^2+5x\mathbf{)} \\ \hline \qquad \mathbf{4x+4} \end{array}$$

7. $$\begin{array}{l} (x^3+6x^2+9x+4):(\mathbf{x}+1)=x^2+5x\mathbf{+4} \\ -(x^3+x^2) \\ \hline \quad 5x^2+9x+4 \\ \quad -(5x^2+5x) \\ \hline \qquad \mathbf{4x}+4 \end{array}$$

8. $$\begin{array}{l} (x^3+6x^2+9x+4):\mathbf{(x+1)}=x^2+5x\mathbf{+4} \\ -(x^3+x^2) \\ \hline \quad 5x^2+9x+4 \\ \quad -(5x^2+5x) \\ \hline \qquad 4x+4 \\ \qquad \mathbf{4x+4} \end{array}$$

9. $$\begin{array}{l} (x^3+6x^2+9x+4):(x+1)=\underline{\underline{x^2+5x+4}} \\ -(x^3+x^2) \\ \hline \quad 5x^2+9x+4 \\ \quad -(5x^2+5x) \\ \hline \qquad 4x+4 \\ \qquad \mathbf{-(}4x+4\mathbf{)} \\ \hline \qquad\quad \mathbf{0} \end{array}$$

Kontrolle mit zurückmultiplizieren:

$$(x+1)\cdot\left(x^2+5x+4\right)=x^3+6x^2+9x+4$$

2.9 Übungen

1. $(cx+cy+8x+8y):(x+y)$

2. $(12x^2-11xy-3x-15y^2+5y):(3x-5y)$

3. $(30ax+24bx-35ay-30by):(5a+4b)$

4. $(24ax-12bx+8cx):(-4x)$

5. $(16ac+32ab):(4b+2c)$

6. $(9x+18ax+18+36a):(3+6a)$

7. $(15a^2-26ab+8b^2):(5a-2b)$

8. $(a^5-b^5):(a-b)$

9. $(-39ay+5by-91cy):(-13y)$

10. $21x^2y+35xy-7y:(7xy)$

11. $(16q^2-25p^2):(4q-5p)$

12. $(x^2+2xy+y^2):(x+y)$

13. $(a^2+2a+1):(a+1)$

14. $(28+x-15x^2):(7-5x)$

15. $(2ax-a+10x-5):(a-2ax-10x+5)$

16. $(49x^2-9y^2):(7x+3y)$

17. $(m^2-mn):m$

18. $(12m^2+35mp-3n^2+27p^2):(2m+n+3p)$

19. $(x^3+2y^2-3x^2+xy-xy^2+2x-2y):(x+y-1)$

20. $(2c^3-18c^2+33c-35):(c-7)$

21. $(15x^3+22x^2y+26xy^2+12y^3):(3x+2y)$

22. $(x^3-x^2-13x+21):(x^2+2x-7)$

2.10 Verbindung der Multiplikation mit der Division

Steht ein Multiplikationszeichen vor der Klammer, so kann die Klammer weggelassen werden.

$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ z.B. $3 \cdot (4 \cdot 2) = 3 \cdot 4 \cdot 2$

$a \cdot (b : c) = a \cdot b : c$ z.B. $2 \cdot (8 : 4) = 2 \cdot 8 : 4$

Steht ein Divisionszeichen vor der Klammer, so muss, wenn die Klammer weggelassen wird, das Divisionszeichen in der Klammer durch ein Multiplikationszeichen und das Multiplikationszeichen in der Klammer durch ein Divisionszeichen ersetzt werden.

$a : (b : c) = a : b \cdot c$ z.B. $12 : (6 : 3) = 12 : 6 \cdot 3$

$a : (b \cdot c) = a : b : c$ z.B. $12 : (2 \cdot 3) = 12 : 2 : 3$

Entsprechend ist vorzugehen, wenn Klammern gesetzt werden.

$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ z.B. $3 \cdot 4 \cdot 2 = 3 \cdot (4 \cdot 2)$

$a \cdot b : c = a \cdot (b : c)$ z.B. $2 \cdot 10 : 5 = 2 \cdot (10 : 5)$

$a : b \cdot c = a : (b : c)$ z.B. $12 : 6 \cdot 2 = 12 : (6 : 2)$

$a : b : c = a : (b \cdot c)$ z.B. $18 : 2 : 3 = 18 : (2 \cdot 3)$

2.11 Übungen

1. $16a-[6b+(9a-3b+c+5a-2c+b)+2b]$

2. $(4x^6-9x^2y^4-24xy^5-16y^6):(2x^3-3xy^2-4y^3)$

3. $(3a+5b)\cdot(6x+7y-9z)+(5x+8y-8z)\cdot(4a+5b)$

4. $(3a-5b)\cdot(6x-7y+9z)-(5x-8y+8z)\cdot(4a-5b)$

5. $(x-y)+\{z+[2x-3y+(2z-3x)+p]-y\}$

6. $(a^4-b^4):(a+b)$

7. $(a^2-2a+1):a-1$

8. $(4y+6x)\cdot(3a-5b)-[(2x-6y)\cdot(2a+3b)]$

9. $(a+b+1)\cdot(a-b-1)$

10. $(u^3-3u^2v+2uv^2-u^2+2uv-u+v+1):(u-v-1)$

11. $(4x+8)\cdot(8+2y)-5\cdot(2x-5y+4)$

12. $(26ac-34cb-39ad+51bd):(2c-3d)$

13. $(8u^3-27v^3+24u-36v):(2u-3v)$

14. $(x^3-3x^2+xy-xy^2+2x+2y^2-2y):(x-1+y)$

15. $(2x+4y-5z)\cdot(3x+2y-6z)$

16. $(4x+3y)^2-(2x-y)^2$

17. $(3a-4b)^3$

18. $(a^3-b^3):(a-b)$

19. $(x^5-1):(x-1)$

20. Von einem gewissen Demochares, der ca. 310 v. Chr. in Griechenland gelebt hat, heisst es: Ein Viertel seines Lebens verlebte er als Junge, ein Fünftel als Jugendlicher, ein Drittel als Mann in den besten Jahren und dreizehn Jahre als alter Mann. Wie alt wurde er?