

## 7 Radizieren

### 7.10 Übungen Frommenwiler

124. a) Radikand  $\geq 0$   
 $-a \geq 0$

$$\underline{\underline{a \leq 0}} \text{ oder } \underline{\underline{D = \{a \in \mathbb{R} | a \leq 0\}}} \text{ oder } \underline{\underline{\mathbb{R}_-}} \text{ (die Null ist inbegriffen)}$$

- b) Radikand  $\geq 0 \wedge$  Nenner  $\neq 0 \rightarrow$  Radikand  $> 0$

1 ist bereits positiv!

$$\frac{1}{a} > 0 \rightarrow \frac{+}{+} > 0$$

$$\text{somit: } \underline{\underline{a > 0}} \text{ oder } \underline{\underline{D = \{a \in \mathbb{R} | a > 0\}}} \text{ oder } \underline{\underline{\mathbb{R}_+^*}} \text{ (die Null ist ausgeschlossen)}$$

- f) Radikand  $\geq 0$

$$a + 2 \geq 0 \rightarrow \underline{\underline{a \geq -2}} \text{ oder } \underline{\underline{D = \{a \in \mathbb{R} | a \geq -2\}}} \text{ oder } \underline{\underline{[-2; \infty[}}$$

- i) Radikand  $\geq 0$

$$2a + 3 \geq 0 \rightarrow 2a \geq -3 \rightarrow \underline{\underline{a \geq -\frac{3}{2}}} \text{ oder } \underline{\underline{D = \{a \in \mathbb{R} | a \geq -\frac{3}{2}\}}} \text{ oder } \underline{\underline{[-\frac{3}{2}; \infty[}}$$

125. a) Aussage ist falsch, weil Radikand negativ ist!

- c) Aussage ist falsch, weil Wurzel aus 9 positiv ist:  $\sqrt{9} = 3$

- d) Aussage ist falsch, weil:  $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$

**Achtung**, die folgende Rechnung ist nicht erlaubt, weil die Umwandlung einer Wurzel in eine Potenz nur für positive Radikanden definiert ist:

$$\sqrt{(-4)^2} \neq (-4)^{\frac{2}{2}} = -4$$

- e) Wurzel aus Summen ziehen... Beachten Sie den Unterschied:

$$\underbrace{\sqrt{3^2 \cdot 4^2}}_{12} = \underbrace{\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{4^2}}_{12} \text{ aber } \underbrace{\sqrt{3^2 + 4^2}}_5 \neq \underbrace{\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}}_7$$

- g) Wurzel aus Summen ziehen...

- j) Wenn a negativ eingesetzt wird, bekommen Sie einen Fehler:

sei  $a = -3$ , falls die Aussage wahr wäre, würde gelten:

$$\sqrt{a^2} = a \rightarrow \sqrt{(-3)^2} = (-3) = -3$$

$$\text{korrekt ist aber: } \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = +3$$

126. e) mit Potenzgesetzen gerechnet:  $(\sqrt{2})^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = \underline{\underline{8}}$

mit Wurzelgesetzen gerechnet:  $(\sqrt{2})^6 = \sqrt[2]{2^6} = \sqrt[2]{2^{2 \cdot 3}} = 2^3 = \underline{\underline{8}}$

h)  $\sqrt{6} \left( \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 1}{3}} + \sqrt{\frac{6 \cdot 1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2} + \sqrt{3}}}$

k)  $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{32}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 32}{6}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 2}{1}} = \sqrt{16} = \underline{\underline{4}}$

128. a)  $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = \sqrt{3^2} + \underbrace{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}_{\text{doppeltes Produkt}} + \sqrt{5^2} = 3 + 2\sqrt{3 \cdot 5} + 5 = \underline{\underline{8 + 2\sqrt{15}}}$

b)  $(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{7}) = (\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{7}) = \sqrt{5^2} - \sqrt{7^2} = 5 - 7 = \underline{\underline{-2}}$

d)  $\left( \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{3}} \right)^2 = \sqrt{3^2} - \underbrace{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}}_{\text{doppeltes Produkt}} + \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 3 - \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{1}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = 3 - 2 + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

e)  $(2\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{5} + 2\sqrt{6}) = (2\sqrt{6} - \sqrt{5})(2\sqrt{6} + \sqrt{5}) = 4 \cdot 6 - 5 = 24 - 5 = \underline{\underline{19}}$

i)  $\left( \sqrt{\sqrt{2}-1} + \sqrt{\sqrt{2}+1} \right)^2 =$   
 $\left( \sqrt{\sqrt{2}-1} \right)^2 + \underbrace{2 \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}}_{\text{doppeltes Produkt}} + \left( \sqrt{\sqrt{2}+1} \right)^2 =$   
 $\sqrt{2}-1 + 2 \cdot \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \sqrt{2}+1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2-1} = \underline{\underline{2\sqrt{2}+2}}$   
3. Binom

$$\begin{aligned}
 \text{j) } & \left( \sqrt{\sqrt{6}+3} - \sqrt{3-\sqrt{6}} \right)^2 = \left( \sqrt{3+\sqrt{6}} - \sqrt{3-\sqrt{6}} \right)^2 = \\
 & \left( \sqrt{3+\sqrt{6}} \right)^2 - \underbrace{2 \cdot \sqrt{3+\sqrt{6}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{6}}}_{\text{doppeltes Produkt}} + \left( \sqrt{3-\sqrt{6}} \right)^2 = \\
 & 3 + \sqrt{6} - 2 \cdot \underbrace{\sqrt{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}}_{\text{3. Binom}} + 3 - \sqrt{6} = 6 - 2 \cdot \sqrt{9-6} = \underline{\underline{6-2\sqrt{3}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{k) } & \left[ (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{6}) \right] \cdot \left[ (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (\sqrt{6}) \right] = \\
 & (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2 = 2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 - 6 = \underline{\underline{2\sqrt{6}-1}}
 \end{aligned}$$

$$130. \text{ b) } \frac{1}{4} \sqrt{5} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{\frac{1^2 \cdot 5}{4^2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{5}{16}}}}$$

- e) Die ursprüngliche Zahl ist negativ. Durch das Quadrieren würde das Minus verschwinden. Deshalb wird das Minus separiert und nicht quadriert. Dadurch bleibt die Zahl auch negativ, wenn der Faktor unter die Wurzel gebracht wird!

$$\begin{aligned}
 -2 \sqrt{5} &= (-1) \cdot (2) \sqrt{5} = (-1) \cdot \sqrt{2^2} \sqrt{5} = (-1) \cdot \sqrt{4 \cdot 5} = \underline{\underline{-\sqrt{20}}} \\
 & \text{Minus ausklammern}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } & \underbrace{(2-\sqrt{7})}_{\text{wird negativ}} \sqrt{11-4\sqrt{7}} = \underbrace{-\overbrace{(\sqrt{7}-2)}^{\text{positiv}}}_{\text{Minus ausklammern}} \sqrt{11-4\sqrt{7}} = -\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} \cdot \sqrt{11-4\sqrt{7}} = \\
 & -\sqrt{7-4\sqrt{7}+4} \cdot \sqrt{11-4\sqrt{7}} = -\sqrt{11-4\sqrt{7}} \cdot \sqrt{11-4\sqrt{7}} = -(11-4\sqrt{7}) = \underline{\underline{4\sqrt{7}-11}}
 \end{aligned}$$

$$131. \text{ c) } pq \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{(pq)^2} \sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{p^2 q^2 p}{q}} = \underline{\underline{\sqrt{p^3 q}}}$$

$$\text{e) } xy \cdot \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \sqrt{(xy)^2} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \sqrt{x^2 y^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)} = \sqrt{\frac{x^2 y^2}{x} + \frac{x^2 y^2}{y}} = \underline{\underline{\sqrt{xy^2 + x^2 y}}}$$

$$134. \text{ a) } \sqrt{16a} = \sqrt[4]{2^4 a} = 2^2 \cdot \sqrt{a} = \underline{\underline{4\sqrt{a}}}$$

$$\text{c) } \sqrt{2c^2} = \underline{\underline{\sqrt{2} \cdot |c|}}$$

$$\text{f) } \sqrt{x^3 + x^2} = \sqrt{x^2(x+1)} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{(x+1)} = \underline{\underline{|x| \cdot \sqrt{x+1}}}$$

$$135. \text{ b) } \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5^2} - \sqrt{10}}{\sqrt{5^2}} = \frac{5 - \sqrt{10}}{5} = \underline{\underline{1 - \frac{1}{5}\sqrt{10}}}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{7}}{2 + \sqrt{7}} \cdot \frac{2 - \sqrt{7}}{2 - \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7} - \sqrt{7^2}}{2^2 - \sqrt{7^2}} = \frac{2\sqrt{7} - 7}{4 - 7} = \frac{2\sqrt{7} - 7}{-3} = \underline{\underline{\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{7}}}}$$

$$\text{f) } \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3^2} + 2\sqrt{3 \cdot 2} + \sqrt{2^2}}{\sqrt{3^2} - \sqrt{2^2}} = \frac{3 + 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = \underline{\underline{5 + 2\sqrt{6}}}$$

$$\text{g) } \frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{5} + \sqrt{7}} \cdot \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{7}}{2\sqrt{5} - \sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7 \cdot 5} - 2\sqrt{7^2}}{4\sqrt{5^2} - \sqrt{7^2}} =$$

$$\frac{4\sqrt{35} - 2 \cdot 7}{4 \cdot 5 - 7} = \frac{4\sqrt{35} - 14}{13} = \underline{\underline{-\frac{14}{13} + \frac{4}{13}\sqrt{35}}}$$

$$136. \text{ a) } a > 0 \rightarrow D = \{a \in \mathbf{R} | a > 0\} \quad \frac{a^2}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{a}}{a} = \underline{\underline{a \cdot \sqrt{a}}}$$

$$\text{b) } a > 0 \wedge b > 0 \rightarrow D = \{a, b \in \mathbf{R} | a > 0 \wedge b > 0\}$$

$$\frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \frac{a\sqrt{ab^2} - b\sqrt{a^2b}}{ab} = \frac{ab\sqrt{a} - ab\sqrt{b}}{ab} = \frac{\cancel{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\cancel{ab}} = \underline{\underline{\sqrt{a} - \sqrt{b}}}$$

$$c) a \geq 0 \wedge b \geq 0 \wedge a \neq b \rightarrow D = \{a, b \in \mathbf{R} \mid a \geq 0 \wedge b \geq 0 \wedge a \neq b\}$$

$$\frac{(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{(-1)(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{-\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \underline{\underline{-\sqrt{a} - \sqrt{b}}}$$

oder

$$\frac{b-a}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(b-a)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a-b} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{(-1)(b-a)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{b-a} = \underline{\underline{-\sqrt{a} - \sqrt{b}}}$$

$$d) x \geq 0 \rightarrow D = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$$

$$\frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}} = \frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}} = \underline{\underline{1-\sqrt{x}}}$$

oder

$$\frac{1-x}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-x)(1-\sqrt{x})}{1-x} = \underline{\underline{1-\sqrt{x}}}$$

$$f) m+n > 0 \rightarrow D = \{m, n \in \mathbf{R} \mid m+n > 0\}$$

$$\frac{(m+n)(m-n)}{\sqrt{m+n}} \cdot \frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m+n}} = \frac{(m+n)(m-n) \cdot \sqrt{m+n}}{m+n} = \underline{\underline{(m-n) \cdot \sqrt{m+n}}}$$

$$137. a) \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{3 \cdot \sqrt{2}}}$$

$$b) \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 2} = \underline{\underline{7 \cdot \sqrt{6}}}$$

$$e) \sqrt{12} - \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 4} - \sqrt{3 \cdot 9} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{3} \cdot \underbrace{(\sqrt{4} - \sqrt{9})}_{-1} = \underline{\underline{-\sqrt{3}}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } (3\sqrt{5} - \sqrt{10})(2\sqrt{5} - 3\sqrt{10}) &= (3\sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{5})(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}) = \\
 &= [\sqrt{5}(3 - \sqrt{2})][\sqrt{5}(2 - 3\sqrt{2})] = \sqrt{5^2}(3 - \sqrt{2})(2 - 3\sqrt{2}) = \\
 &= 5(6 - 9\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2^2}) = 5(12 - 11\sqrt{2}) = \underline{\underline{60 - 55\sqrt{2}}}
 \end{aligned}$$

141. a)  $\underline{x \geq 0} \rightarrow D = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 0\} \rightarrow \underline{\mathbf{R}_+}$  (Frommenwiler)

Hinweis:  $\mathbf{R}_+$  (Positive Zahlen der Menge  $\mathbf{R}$  einschliesslich der Null)

- b) Kommen in einer Gleichung oder Ungleichung Betragsterme vor, so müssen diese mit Hilfe einer Fallunterscheidung erst aufgelöst werden, bevor die endgültige Gleichung oder Ungleichung gelöst werden kann. Wir werden Betragsgleichungen bzw. Betragsungleichungen später im Unterricht behandeln.

Beim Auflösen des Betrages müssen Fallunterscheidungen vorgenommen werden. Ist  $T(x)$  ein Term mit der Variablen  $x$ , so gilt:

$$|T(x)| = \begin{cases} T(x) & \text{für } T(x) \geq 0 \\ -T(x) & \text{für } T(x) < 0 \end{cases}$$

1. Fall:  $|+| \rightarrow$  somit gilt  $|x| = x \rightarrow \underline{x \geq 0}$

2. Fall:  $|-| \rightarrow$  somit gilt  $|x| = -x \rightarrow -x \geq 0 \rightarrow \underline{x \leq 0}$

somit:  $\underline{x \geq 0 \vee x \leq 0} \rightarrow \underline{D = \mathbf{R}} \rightarrow \underline{\mathbf{R}}$  (Frommenwiler)

c) 1. Fall:  $(+)(+) \geq 0 \rightarrow \underline{x \geq 0}$

2. Fall:  $(-)(-) \geq 0 \rightarrow \underline{x \leq 0}$

somit:  $\underline{x \geq 0 \vee x \leq 0} \rightarrow \underline{D = \mathbf{R}} \rightarrow \underline{\mathbf{R}}$  (Frommenwiler)

d) 1. Fall:  $(+)(+)(+) \geq 0 \rightarrow \underline{x \geq 0}$

2. Fall:  $(-)(-)(-) \geq 0 \rightarrow$  unmöglich

somit:  $\underline{x \geq 0} \rightarrow \underline{D = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 0\}} \rightarrow \underline{\mathbf{R}_+}$  (Frommenwiler)

Hinweis:  $\mathbf{R}_+$  (Positive Zahlen der Menge  $\mathbf{R}$  einschliesslich der Null)

e)  $-x \geq 0 \rightarrow \underline{x \leq 0} \rightarrow \underline{D = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 0\}} \rightarrow \underline{\mathbf{R}_-}$  (Frommenwiler)

Hinweis:  $\mathbf{R}_-$  (Negative Zahlen der Menge  $\mathbf{R}$  einschliesslich der Null)

f)  $-x \geq 0 \rightarrow \underline{x \leq 0} \rightarrow \underline{D = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 0\}} \rightarrow \underline{\mathbf{R}_-}$  (Frommenwiler)

Hinweis:  $\mathbf{R}_-$  (Negative Zahlen der Menge  $\mathbf{R}$  einschliesslich der Null)

g)  $\frac{1}{x^2} > 0 \rightarrow \underline{x^2 > 0} \rightarrow \underline{D = \{x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}} \rightarrow \underline{\mathbf{R}^*}$  (Frommenwiler)

Hinweis:  $\mathbf{R}^*$  (Menge  $\mathbf{R}$  ohne die Null  $\rightarrow 0$  ist verboten, weil  $x$  im Nenner ist!)

h)  $\frac{1}{x^3} > 0 \rightarrow \underline{x^3 > 0} \rightarrow \underline{D = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}} \rightarrow \underline{\mathbf{R}_+^*}$  (Frommenwiler)

Hinweis:  $\mathbf{R}_+^*$  (Positive Zahlen der Menge  $\mathbf{R}$  ohne die Null  
 $\rightarrow 0$  ist verboten, weil  $x$  im Nenner ist!)

i) 1. Fall:  $|+| \rightarrow |x-2| = x-2 \rightarrow x-2 \geq 0 \rightarrow \underline{x \geq 2}$

2. Fall:  $|-| \rightarrow |x-2| = -(x-2) \rightarrow -x+2 \geq 0 \rightarrow \underline{x \leq 2}$

somit:  $\underline{x \geq 2} \vee \underline{x \leq 2} \rightarrow \underline{D = \mathbf{R}} \rightarrow \underline{\mathbf{R}}$  (Frommenwiler)

j) 1. Fall:  $|+| \rightarrow |x+3| = x+3 \rightarrow x+3 \geq 0 \rightarrow \underline{x \geq -3}$

2. Fall:  $|-| \rightarrow |x+3| = -(x+3) \rightarrow -x-3 \geq 0 \rightarrow \underline{x \leq -3}$

somit:  $\underline{x \geq -3} \vee \underline{x \leq -3} \rightarrow \underline{D = \mathbf{R}} \rightarrow \underline{\mathbf{R}}$  (Frommenwiler)

143. a)  $u^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{u^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{u^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{u^3}}$

d)  $5x^{-0.4} = 5x^{-\frac{2}{5}} = 5\sqrt[5]{x^{-2}} = 5\sqrt[5]{\frac{1}{x^2}} = \frac{5}{\sqrt[5]{x^2}}$

$$g) \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{6}} = (n^{-1})^{\frac{5}{6}} = n^{\frac{5}{6}} = \underline{\underline{\sqrt[6]{n^5}}}$$

$$i) \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{a^2}}}$$

$$147. a) 2 \cdot \sqrt[3]{5} + 3 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5} \cdot (2+3) = \underline{\underline{5 \cdot \sqrt[3]{5}}}$$

$$f) 5 \cdot \sqrt{a} - 8 \cdot \sqrt{a} + 2 \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a} \cdot (5-8+2) = \underline{\underline{-\sqrt{a}}}$$

$$g) \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} \rightarrow \text{kann nicht vereinfacht werden!}$$

$$148. a) \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2^{\frac{4}{4}} = \underline{\underline{2}}$$

$$c) \sqrt{4^5} = \sqrt{(2^2)^5} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = \underline{\underline{32}}$$

$$g) \sqrt[10]{32^6} = \sqrt[10]{(2^5)^6} = 2^{\frac{30}{10}} = 2^3 = \underline{\underline{8}}$$

$$k) \sqrt[3]{125^{-2}} = \sqrt[3]{(5^3)^{-2}} = 5^{\frac{-6}{3}} = 5^{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{25}}}$$

$$m) \sqrt[6]{\frac{1}{64^5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{(2^6)^5}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2^{30}}} = \frac{1}{2^5} = \underline{\underline{\frac{1}{32}}}$$



$$149. \text{ d) } \sqrt[4]{25x^2y^6} = \sqrt[4]{(5xy^3)^2} = \underline{\underline{\sqrt{5xy^3}}}$$

$$\text{f) } \sqrt[3k]{u^k} = \underline{\underline{\sqrt[3]{u}}}$$

$$\text{g) } (\sqrt[2n]{a})^{3n} = \sqrt[2n]{a^{3n}} = \underline{\underline{\sqrt{a^3}}}$$

$$\text{h) } \sqrt[n+2]{b^{5n+10}} = \sqrt[n+2]{b^{5(n+2)}} = \underline{\underline{b^5}} \quad \text{weil } b^{\frac{5(n+2)}{n+2}} = b^5$$

$$\text{j) } \sqrt[5n]{\frac{a^{10}b^5}{c^{20}}} = \sqrt[5n]{\left(\frac{a^2b}{c^4}\right)^5} = \underline{\underline{\sqrt[n]{\frac{a^2b}{c^4}}}}$$

$$150. \text{ e) } \sqrt[3]{\frac{(x-y)^2}{(x-y)^2=(y-x)^2}} : \sqrt[3]{y-x} = \sqrt[3]{\frac{(y-x)^2}{y-x}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{y-x}}}$$

$$\text{f) } \sqrt[10]{15a^5b^7} : \sqrt[3]{3ab} = \sqrt[10]{\frac{15a^5b^7}{3ab}} = \underline{\underline{\sqrt[10]{5a^4b^6}}}$$

$$\text{h) } \sqrt[5]{y^{n+5}} : \sqrt[5]{y^{n-5}} = \sqrt[5]{\frac{y^{n+5}}{y^{n-5}}} = \sqrt[5]{y^{n+5-n+5}} = \sqrt[5]{y^{10}} = \underline{\underline{y^2}}$$

$$\text{i) } (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b^2}) = \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^2b^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{b^3} = \underline{\underline{a - b + \sqrt[3]{(ab)^2} - \sqrt[3]{ab}}}$$

$$\text{j) } (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^k} - \sqrt[n]{y^k}) = \underline{\underline{\sqrt[n]{x^{k+1}} - \sqrt[n]{xy^k} - \sqrt[n]{x^ky} + \sqrt[n]{y^{k+1}}}}$$

$$151. \text{ a) } \left. \begin{array}{l} \sqrt{\frac{3}{10}} = \sqrt[2]{\frac{3}{10}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{10^2}} = \sqrt[4]{\frac{9}{100}} \\ \sqrt[4]{\frac{1}{10}} \end{array} \right\} \rightarrow \underline{\underline{\sqrt[4]{0.1} > \sqrt{0.3}}}$$

$$152. \text{ b) } 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot \frac{1}{8}} = \sqrt[4]{\frac{16}{8}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

$$\text{c) } \frac{1}{3} \cdot \sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^5}} \cdot \sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{\frac{3^3}{3^5}} = \sqrt[5]{\frac{3^3}{3^5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^2}} = \underline{\underline{\sqrt[5]{\frac{1}{9}}}}$$

$$\text{g) } (-\sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = (-1) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = (-1) \cdot \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{2^2}} = -\sqrt[6]{\frac{2^3}{2^2}} = \underline{\underline{-\sqrt[6]{2}}}$$

oder

$$(-\sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = (-1) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = (-1) \cdot \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt[3]{2^{-1}} = -\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}-1}} = -\sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{-\sqrt[3]{\sqrt{2}}}}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } (1+\sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} &= \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3} \cdot \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3 (7+5\sqrt{2})} = \\ &= \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^2 (1+\sqrt{2})(7+5\sqrt{2})} = \sqrt[3]{(1+2\sqrt{2}+2)(7+5\sqrt{2}+7\sqrt{2}+10)} = \\ &= \sqrt[3]{(3+2\sqrt{2})(17+12\sqrt{2})} = \sqrt[3]{51+36\sqrt{2}+34\sqrt{2}+48} = \underline{\underline{\sqrt[3]{99+70\sqrt{2}}}} \end{aligned}$$

$$153. \text{ c) } a^2 \cdot \sqrt[n]{a^{-2}} = \sqrt[n]{a^{2n}} \cdot \sqrt[n]{a^{-2}} = \sqrt[n]{a^{2n} \cdot a^{-2}} = \underline{\underline{\sqrt[n]{a^{2n-2}}}}$$

$$\text{e) } u^2 v \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{v}{u}\right)^3} = \sqrt[4]{u^8 v^4} \cdot \sqrt[4]{\frac{v^3}{u^3}} = \sqrt[4]{u^8 v^4 \cdot \frac{v^3}{u^3}} = \underline{\underline{\sqrt[4]{u^5 v^7}}}$$

$$f) \quad x \cdot \sqrt[n]{x - \frac{1}{x}} = \sqrt[n]{x^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{x^2 - 1}{x}} = \sqrt[n]{x^n \cdot \frac{x^2 - 1}{x}} = \sqrt[n]{x^{n-1} \cdot (x^2 - 1)} = \underline{\underline{\sqrt[n]{x^{n+1} - x^{n-1}}}}$$

$$154. \quad d) \quad \sqrt[5]{2^8} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^3} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2^3} = 2 \cdot \sqrt[5]{2^3} = \underline{\underline{2 \cdot \sqrt[5]{8}}}$$

$$h) \quad \sqrt[5]{5^{-6}} = \sqrt[5]{5^{-5} \cdot 5^{-1}} = \sqrt[5]{5^{-5}} \cdot \sqrt[5]{5^{-1}} = 5^{-1} \cdot \sqrt[5]{5^{-1}} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{5}}$$

$$i) \quad \sqrt[3]{\frac{2^7}{3^{10}}} = \sqrt[3]{\frac{2^6 \cdot 2^1}{3^9 \cdot 3^1}} = \frac{\sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3^9} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{2^2 \cdot \sqrt[3]{2}}{3^3 \cdot \sqrt[3]{3}} = \underline{\underline{\frac{4}{27} \cdot \sqrt[3]{2}}}$$

$$155. \quad g) \quad \sqrt[4]{a^6 - a^5} = \sqrt[4]{a^4(a^2 - a)} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a^2 - a} = \underline{\underline{a \cdot \sqrt[4]{a^2 - a}}}$$

$$i) \quad \sqrt[k]{a^{k+3} \cdot b^{3k+2}} = \sqrt[k]{a^k \cdot a^3 \cdot b^{3k} \cdot b^2} = \sqrt[k]{(ab^3)^k \cdot a^3 \cdot b^2} = \sqrt[k]{(ab^3)^k} \cdot \sqrt[k]{a^3 \cdot b^2} = \underline{\underline{ab^3 \cdot \sqrt[k]{a^3 \cdot b^2}}}$$

$$j) \quad \sqrt[a]{p^{2a} + p^a} = \sqrt[a]{p^a \cdot (p^a + 1)} = \underline{\underline{p \cdot \sqrt[a]{p^a + 1}}}$$

$$156. \quad a) \quad \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = \sqrt{3^2} \cdot 4\sqrt{3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{3^3} = \underline{\underline{4\sqrt{27}}}$$

$$157. \quad g) \quad (\sqrt[3]{u})^2 \cdot 4\sqrt{v^6} \cdot \sqrt{u^2 v^3} = \sqrt[3]{u^{2 \cdot 2}} \cdot 2\sqrt[3]{v^{3 \cdot 3}} \cdot \sqrt[3]{u^{2 \cdot 3} v^{3 \cdot 3}} = \\ \sqrt[6]{u^{4+6} v^{9+9}} = \sqrt[6]{u^{10} \cdot v^{18}} = \sqrt[3]{u^5 v^9} = \sqrt[3]{u^3 u^2 v^9} = \underline{\underline{uv^3 \cdot \sqrt[3]{u^2}}}$$

$$h) \quad \frac{\sqrt[3]{xy^2} \cdot \sqrt[4]{x^3 y}}{\sqrt[4]{x^0 y^2 z} \cdot \sqrt[3]{xz^{-2}}} = \frac{\sqrt[12]{x^4 y^8} \cdot \sqrt[12]{x^9 y^3}}{\sqrt[12]{x^0 y^6 z^3} \cdot \sqrt[12]{x^4 z^{-8}}} = \sqrt[12]{\frac{x^4 y^8 \cdot x^9 y^3}{x^0 y^6 z^3 \cdot x^4 z^{-8}}} = \underline{\underline{\sqrt[12]{x^9 y^5 z^5}}}$$

$$158. \text{ d) } (\sqrt[6]{2} - \sqrt[5]{2})^2 = \sqrt[6]{2^2} - 2 \cdot \underbrace{\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[5]{2}}_{\sqrt[30]{2^5 \cdot 2^6}} + \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[6]{2} - 2 \cdot \underbrace{\sqrt[30]{2^{11}}}_{\sqrt[15]{2^2}} + \sqrt[5]{4}$$

$$\text{f) } (\sqrt[4]{2} + \sqrt[8]{3})^2 = \sqrt[4]{2^2} + 2 \cdot \underbrace{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{3}}_{\sqrt[8]{2^2 \cdot 3}} + \sqrt[8]{3^2} = \sqrt[4]{2} + 2 \cdot \sqrt[8]{12} + \sqrt[4]{3}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } & (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4}) = \\ & [(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})^2 - (\sqrt[3]{4})^2] = \\ & \sqrt[3]{2^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{4^2} = \\ & \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{16} \end{aligned}$$

$$161. \text{ e) } \sqrt[5]{\sqrt[3]{m^5 n^{10}}} = \sqrt[15]{m^5 n^{10}} = \sqrt[3]{\cancel{m^2} \cdot n^2} = \sqrt[3]{mn^2}$$

$$\text{f) } \sqrt[n]{\sqrt[n+1]{y^{2n}}} = \sqrt[n^2+1]{y^{2n}}$$

$$\begin{aligned} 162. \text{ j) } & t \cdot \sqrt[n]{t^{1-n}} \cdot \sqrt[n]{t^{1-n}} = \\ & \sqrt[n^2]{t^{n^2}} \cdot \sqrt[n]{\sqrt[n]{t^{(1-n)n}}} \cdot \sqrt[n]{t^{1-n}} = \\ & \sqrt[n^2]{t^{n^2}} \cdot \sqrt[n]{\sqrt[n]{t^{n-n^2}}} \cdot t^{1-n} = \\ & \sqrt[n^2]{t^{n^2}} \cdot t^{n-n^2} \cdot t^{1-n} = \\ & \sqrt[n^2]{t^{n^2+n-n^2+1-n}} = \sqrt[n^2]{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } & \sqrt{m} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt[6]{m} = \\ & \sqrt{\sqrt[3]{m^3}} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m^2}} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt[6]{m} = \\ & \sqrt{\sqrt[3]{m^3} \cdot m} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m^2} \cdot m} \cdot \sqrt[6]{m} = \\ & \sqrt[6]{m^4} \cdot \sqrt[6]{m^3} \cdot \sqrt[6]{m} = \sqrt[6]{m^{4+3+1}} = \sqrt[6]{m^8} = \sqrt[3]{m^4} = \sqrt[3]{m^4} \end{aligned}$$

164. a)  $\sqrt[4]{x} = 3$

$\sqrt[4]{x^4} = 3^4$

$x = 3^4 = \underline{\underline{81}}$

$|(\ )^4$

|Wurzel wegschaffen

b)  $\sqrt[6]{x} = \sqrt{2}$

$\sqrt[6]{x^6} = \sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$

$x = \underline{\underline{8}}$

$|(\ )^6$

|Wurzel wegschaffen

f)  $x^{\frac{3}{4}} = 5$

$\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{4}{3}}$

$x = \underline{\underline{\sqrt[3]{5^4}}}$

$|(\ )^{\frac{4}{3}}$

|Potenz potenzieren

h)  $\sqrt[k]{x^k} = 7$

$x^{\frac{k}{n}} = 7$

$\left(x^{\frac{k}{n}}\right)^{\frac{n}{k}} = 7^{\frac{n}{k}}$

$x = \underline{\underline{\sqrt[k]{7^n}}}$

|Wurzel als Potenz schreiben

|Wurzel wegschaffen

|Potenz potenzieren

165. g)  $(\sqrt{10})^x = \sqrt[8]{10}$

$10^{\frac{x}{2}} = 10^{\frac{1}{8}}$

$\frac{x}{2} = \frac{1}{8}$

$x = \frac{2}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

$$\begin{aligned} \text{h) } \sqrt[x]{5} &= \sqrt[8]{25} \\ 5^{\frac{1}{x}} &= 5^{\frac{2}{8}} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{4} \rightarrow x = \underline{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x+1]{a}} &= \sqrt[20]{a} \\ \frac{a^{\frac{1}{x}}}{a^{\frac{1}{x+1}}} &= a^{\frac{1}{20}} \\ a^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} &= a^{\frac{1}{20}} \\ \frac{x+1-x}{x(x+1)} &= \frac{1}{20} \\ \frac{1}{x(x+1)} &= \frac{1}{20} \\ x^2 + x - 20 &= 0 \\ (x+5)(x-4) &= 0 \\ x_1 = \underline{-5} \quad (\text{Wurzelexponent darf nicht negativ sein}) \quad \vee \quad x_2 = \underline{4} \end{aligned}$$

$$167. \text{ a) } \left( \sqrt[5]{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right)^3 \cdot \sqrt[5]{(ab)^4} : \sqrt{a+b} = ?$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{a+b}{ab}\right)^3} \cdot \sqrt[5]{(ab)^4} : \sqrt[5]{(a+b)^{2.5}} = \sqrt[5]{\frac{(a+b)^3 \cdot (ab)^4}{(ab)^3 \cdot (a+b)^{2.5}}} = \underline{\underline{\sqrt[10]{(a+b) \cdot (ab)^2}}}}$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{\sqrt{\frac{b^3}{a} \left[ (ab^3)^{\frac{1}{2}} - (ab^3)^{-\frac{1}{2}} \right]}} = ?$$

$$\sqrt[4]{\frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[ (ab^3)^{\frac{1}{2}} - (ab^3)^{-\frac{1}{2}} \right]} = \sqrt[4]{\frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \cancel{a^{\frac{1}{2}}} \cdot b^{\frac{3}{2}} - \frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \cancel{a^{\frac{1}{2}}} \cdot b^{-\frac{3}{2}}} = \sqrt[4]{b^3 - a^{-1}} = \underline{\underline{\sqrt[4]{b^3 - \frac{1}{a}}}}}$$

$$c) \frac{x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}}} = ?$$

$$\frac{x \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2}}}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}} = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1}} = x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = x \cdot \sqrt[3]{x^{-1}} = x \cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{x^2}}}$$

oder

$$\frac{x \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2}}}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}} = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1}} = x \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{x^3 \cdot \frac{1}{x}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$168. a) \left(\frac{m}{\sqrt{n}} + \frac{n}{\sqrt{m}}\right) : \left(\sqrt{\frac{1}{m}} + \sqrt{\frac{1}{n}}\right) = ?$$

$$\left(\frac{m}{\sqrt{n}} + \frac{n}{\sqrt{m}}\right) : \left(\sqrt{\frac{1}{m}} + \sqrt{\frac{1}{n}}\right) = ?$$

$$\left(\frac{m\sqrt{m} + n\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{m}}\right) : \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{m}}{\sqrt{n}\sqrt{m}}\right) = \frac{m\sqrt{m} + n\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{m}} \cdot \frac{\sqrt{n}\sqrt{m}}{\sqrt{n} + \sqrt{m}} = \underline{\underline{\frac{m\sqrt{m} + n\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{m}}}}$$

oder weiter vereinfacht:

$$\frac{m\sqrt{m} + n\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m^2}\sqrt{m} + \sqrt{n^2}\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m^3} + \sqrt{n^3}}{\sqrt{n} + \sqrt{m}} = \frac{\overbrace{(\sqrt{m})^3 + (\sqrt{n})^3}^{\text{Typ: } a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}}{\sqrt{n} + \sqrt{m}} =$$

$$\frac{(\sqrt{m} + \sqrt{n})(m - \sqrt{mn} + n)}{\sqrt{n} + \sqrt{m}} = \underline{\underline{m - \sqrt{mn} + n}}$$

$$b) a \cdot \sqrt[4]{a^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}}} - 2 \cdot \sqrt{a^3 \cdot \sqrt[4]{a^3}} = ?$$

$$a \cdot \sqrt[4]{a^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}}} - 2 \cdot \sqrt{a^3 \cdot \sqrt[4]{a^3}} = ?$$

$$a \cdot \sqrt[4]{a^5 \cdot \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}} - 2 \cdot \sqrt{a^3 \cdot a^{\frac{3}{4}}} = a \cdot a^{\frac{5}{4}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} - 2 \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{1+\frac{5}{4}-\frac{3}{4}} - 2 \cdot a^{\frac{3}{2}+\frac{3}{4}} =$$

$$a^{\frac{15}{8}} - 2 \cdot a^{\frac{15}{8}} = -a^{\frac{15}{8}} = \underline{\underline{-\sqrt[8]{a^{15}}}} = -a^{\frac{8}{8}} \cdot a^{\frac{7}{8}} = \underline{\underline{-a \cdot \sqrt[8]{a^7}}}$$

$$c) \frac{\sqrt[3]{\sqrt{X^{-1}} \cdot \sqrt{X}}}{X \cdot \sqrt[3]{X^{-1}} \cdot \sqrt{X^{-1}} \cdot \sqrt{X^{-1}}} = ?$$

$$\frac{\sqrt{X^{-\frac{1}{3}} \cdot X^{\frac{1}{2}}}}{X \cdot \sqrt[3]{X^{-1}} \cdot \sqrt{X^{-1}} \cdot X^{-\frac{1}{2}}} = \frac{X^{-\frac{1}{6}} \cdot X^{\frac{1}{4}}}{X \cdot X^{-\frac{1}{3}} \cdot X^{-\frac{1}{2}} \cdot X^{-\frac{1}{4}}} = \frac{X^{-\frac{1}{6}} \cdot X^{\frac{1}{4}}}{X \cdot X^{-\frac{1}{3}} \cdot X^{-\frac{1}{6}} \cdot X^{-\frac{1}{12}}} =$$

$$X^{\frac{2}{12} + \frac{3}{12} - \frac{12}{12} + \frac{4}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}} = X^{\frac{4}{12}} = X^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{X^{-1}}}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{\frac{1}{X}}}}$$

$$e) \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a^{-8}}}}{\sqrt[3]{a^{-5}}}} : \frac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[3]{a^2}} = ?$$

$$\sqrt{\frac{a^{\frac{1}{12}} \cdot a^{-4}}{a^{-\frac{5}{3}}}} : \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{24}} \cdot a^{-2}}{a^{-\frac{5}{6}}} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{24} - 2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{8}} = a^{-\frac{7}{12}} = \underline{\underline{\sqrt[12]{a^{-7}}}} = \underline{\underline{\sqrt[12]{\frac{1}{a^7}}}}$$