Gleichungen 1. Grades und Wurzelgleichungen 2014, TBM

Prüfungsdauer
- 70 Minuten

Hilfsmittel
- **Nicht programmierbarer** Taschenrechner, **ohne CAS**!

Bedingungen
- Dokumentieren Sie den Lösungsweg sauber.
- Der Lösungsweg muss klar ersichtlich sein.
- Das Resultat ist so weit wie möglich zu vereinfachen.
- **Kontrollieren Sie Ihre Resultate**!
- Falls der freie Platz bei den Aufgaben nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Zusatzblätter am Ende des Dokuments. Versehen Sie die Aufgabenseite mit einem Hinweis wie «Fortsetzung auf Seite 7».

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Name und Vorname ……………………………………………………………………

Bewertungsübersicht

Aufgabe	1	2	3	4	5
Punkte	3	3	2	3	3

Gesamtpunkte
14

Note

Semesternote

Aufgabe 1

3 Punkte

0.75
0.5
0.5
0.5
0.5
0.25
Total 3

Berechnen Sie die Lösungsmenge und den Definitionsbereich. G = **R**

$$\left(\frac{2}{1+x}-\frac{2}{1-x}\right):\left(\frac{1}{3+\frac{3}{x}}+\frac{1}{3-\frac{3}{x}}\right)=3 \qquad x=?$$

Lösung:

$$D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\} \qquad (0.75)$$

$$\left(\frac{2}{1+x}\cdot\frac{1-x}{1-x}-\frac{2}{1-x}\cdot\frac{1+x}{1+x}\right):\left(\frac{1}{3+\frac{3}{x}}\cdot\frac{x}{x}+\frac{1}{3-\frac{3}{x}}\cdot\frac{x}{x}\right)=3$$

$$\frac{\cancel{2}-2x\cancel{-2}-2x}{(1+x)(1-x)}:\left(\frac{x}{3x+3}+\frac{x}{3x-3}\right)=3 \qquad (0.5)$$

$$\frac{-4x}{(1+x)(1-x)}:\left[\frac{x}{3(x+1)}\cdot\frac{x-1}{x-1}+\frac{x}{3(x-1)}\cdot\frac{x+1}{x+1}\right]=3$$

$$\frac{-4x}{(1+x)(1-x)}:\frac{x\left(x\cancel{-1}+x\cancel{+1}\right)}{3(x+1)(x-1)}=3 \qquad (0.5)$$

$$\frac{\overbrace{\cancel{-4x}}^{-2}}{\cancel{(1+x)}(1-x)}\cdot\frac{\overbrace{\cancel{3}}^{1}\,\cancel{(x+1)}\,(x-1)}{x\cdot\cancel{2}x}=\overbrace{\cancel{3}}^{1} \qquad (0.5)$$

$$\frac{2\cdot\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}\cdot x}=1$$

$$x=\underline{2}\in D \qquad (0.5)$$

Kontrolle:
$$\underbrace{\left(\frac{2}{1+2}-\frac{2}{1-2}\right):\left(\frac{1}{3+\frac{3}{2}}+\frac{1}{3-\frac{3}{2}}\right)}_{3}=3$$

somit: $L=\underline{\underline{\{2\}}}$ (0.25)

Aufgabe 2 **3 Punkte**

Berechnen Sie die Lösungsmenge und den Definitionsbereich. Stellen Sie fest, welche Bedingungen gelten müssen, damit bei den Äquivalenzumformungen nicht durch 0 dividiert oder mit 0 multipliziert wird. G = **R**

$$\frac{b}{a}+\frac{ab}{x^2-a^2}=\frac{bx-a^2}{a(x+a)} \qquad x=?$$

Lösung:

HN: $a(x+a)(x-a)$ $\qquad \underbrace{D=\mathbb{R}\setminus\{-a;\,a\}}_{(\text{je } 0.25)} \quad \wedge \quad \underset{(0.25)}{a\neq 0}$

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{\overbrace{(x+a)(x-a)}^{x^2-a^2}}{(x+a)(x-a)}+\frac{ab}{(x+a)(x-a)}\cdot\frac{a}{a}=\frac{bx-a^2}{a(x+a)}\cdot\frac{x-a}{x-a} \qquad |\cdot HN \qquad (0.25)$$

$$\cancel{bx^2}\ \cancel{-a^2b}\ \cancel{+a^2b}=\cancel{bx^2}-abx-a^2x+a^3 \qquad |x \text{ isolieren} \qquad (0.5)$$

$$abx+a^2x=a^3 \qquad |x \text{ ausklammern}$$

$$\underbrace{x\left(ab+a^2\right)=a^3}_{(0.25)} \qquad |:a(b+a)\rightarrow \underline{a\neq 0}\wedge\underbrace{\underline{a\neq -b}}_{(0.5)}$$

$$x=\frac{a^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{a}\,(b+a)}=\underline{\frac{a^2}{a+b}} \qquad (0.5)$$

$$\underline{\underline{L=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{a^2}{a+b}\right\}}} \quad a\neq 0\wedge a\neq -b \qquad (0.25)$$

0.25
0.25
0.25
0.25
0.5
0.25
0.5
0.5
0.25
Total 3

Aufgabe 3 — 2 Punkte

0.25
0.5
0.25
0.25
0.5
0.25
Total 2

Berechnen Sie die Lösungsmenge und den Definitionsbereich. G = **R**

$$3\sqrt{3p-5}-2=\sqrt{12p-20}+2 \qquad p=?$$

Lösung:

$$3\sqrt{3p-5}-2=\sqrt{4\left(3p-5\right)}+2 \qquad |\text{faktorisieren}$$

$$3p-5\geq 0 \quad \rightarrow \quad p\geq\frac{5}{3} \qquad \underbrace{D=\left\{p\in\mathbf{R}\,\middle|\,p\geq\frac{5}{3}\right\}}_{(0.25)}$$

$$3\sqrt{3p-5}-2=\sqrt{4\left(3p-5\right)}+2 \qquad |\text{teilweise radizieren}$$

$$3\sqrt{3p-5}-2=2\sqrt{3p-5}+2 \qquad \left|-2\sqrt{3p-5}+2\right. \qquad (0.5)$$

$$\sqrt{3p-5}=4 \qquad |(\ )^2$$

$$3p-5=16 \qquad |+5 \qquad (0.25)$$

$$3p=21 \qquad |:3$$

$$p=\underline{7}\in D \qquad (0.25)$$

Kontrolle: $\underbrace{3\sqrt{3\cdot 7-5}-2}_{10}=\underbrace{\sqrt{12\cdot 7-20}+2}_{10}$ (w) (0.5)

somit: $L=\underline{\underline{\{7\}}}$ (0.25)

Aufgabe 4 3 Punkte

0.5	
0.5	
0.5	
0.5	
0.5	
0.5	
	Total 3

Berechnen Sie die Lösungsmenge und den Definitionsbereich ohne $\sqrt{2}$ auszurechnen! G = **R**

$$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad x = ?$$

Lösung:

$$x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \qquad \underbrace{D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \right\}}_{(0.5)}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{2-3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{x \cdot \sqrt{2} - x - \sqrt{2}} \qquad |\text{Variable x separieren} \qquad (0.5)$$

$$x \cdot \sqrt{2} - x - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{-1} = 2\left(1 - \sqrt{2}\right)$$

$$x \cdot \sqrt{2} - x = 2\left(1-\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} \qquad (0.5)$$

$$x\left(\sqrt{2}-1\right) = 2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} \qquad (0.5)$$

$$x = \frac{\sqrt{2}\cancel{\left(\sqrt{2}-1\right)}}{\left(\sqrt{2}-1\right)} = \underline{\sqrt{2}} \in \mathbf{R} \qquad (0.5)$$

Kontrolle: $\overbrace{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}}^{2.1213} = \overbrace{\frac{3}{\sqrt{2}}}^{2.1213}$ (w)

somit: $L = \underline{\underline{\left\{\sqrt{2}\right\}}}$ (0.5)

Aufgabe 5 — 3 Punkte

0.5
0.5
0.5
0.5
0.25
0.5
0.25
Total 3

Berechnen Sie die Lösungsmenge und den Definitionsbereich. G = **R**

$$\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2} \qquad x=?$$

Lösung :

$$x \geq -\frac{1}{4} \quad \wedge \quad x \geq -3 \quad \wedge \quad x \geq 2 \qquad \underbrace{D=\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 2\}}_{(0.5)}$$

$$\sqrt{4x+1}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3} \qquad |(\ )^2$$

$$4x+1=x-2+2\sqrt{(x-2)(x+3)}+x+3 \qquad |TU \qquad (0.5)$$

$$4x+1-x+2-x-3=2\sqrt{(x-2)(x+3)} \qquad |TU$$

$$2x=2\sqrt{(x-2)(x+3)} \qquad |:2$$

$$x=\sqrt{(x-2)(x+3)} \qquad |(\ )^2 \qquad (0.5)$$

$$x^2=(x-2)(x+3)=x^2+x-6 \qquad |TU \qquad (0.5)$$

$$x=\underline{6} \in D \qquad (0.25)$$

Kontrolle : $\underbrace{\sqrt{4\cdot 6+1}-\sqrt{6+3}}_{2}=\underbrace{\sqrt{6-2}}_{2} \qquad (w) \qquad (0.5)$

somit : $L=\underline{\underline{\{6\}}}$ $\qquad (0.25)$