Lineare und quadratische Funktionen, GSBM

Prüfungsdauer	■ 70 Minuten
Hilfsmittel	■ Taschenrechner ohne CAS!
Bedingungen	■ Dokumentieren Sie den Lösungsweg sauber. ■ Der Lösungsweg muss klar ersichtlich sein. ■ Das Resultat ist soweit als möglich zu vereinfachen. ■ **Kontrollieren Sie Ihre Resultate!** ■ Falls der freie Platz bei den Aufgaben nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Zusatzblätter am Ende des Dokuments. Versehen Sie die Aufgabenseite mit einem Hinweis wie «Fortsetzung auf Seite 10».

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Name und Vorname ....

Bewertungsübersicht

Aufgabe	1	2	3	4	5	6		Gesamtpunkte
Punkte	4	4	3	4	2	4		21

Note

Aufgabe 1 — 4 Punkte

a.	1
b.	1
	1
	1
Total 4	

Berechnen Sie **möglichst genau** die Funktionsgleichung der Graphen auf Seite 3. Markieren Sie die für die Berechnung verwendeten Punkte auf dem entsprechenden Graphen. Der Lösungsweg muss klar ersichtlich sein! (**ABC-Form** der Parabel angeben!)

Lösung:

$y_1 = m_1 x + b_1$: $\quad m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{-\frac{13}{6}}$ und $b_1 = y_1 - m_1 x$

$P_1(1|7)$ eingesetzt: $\quad b_1 = 7 - \left(-\frac{13}{6}\right)\cdot 1 = \underline{\frac{125}{16}}$ $\quad$ somit: $\underline{\underline{y_1 = -\frac{13}{6}x + \frac{55}{6}}}$

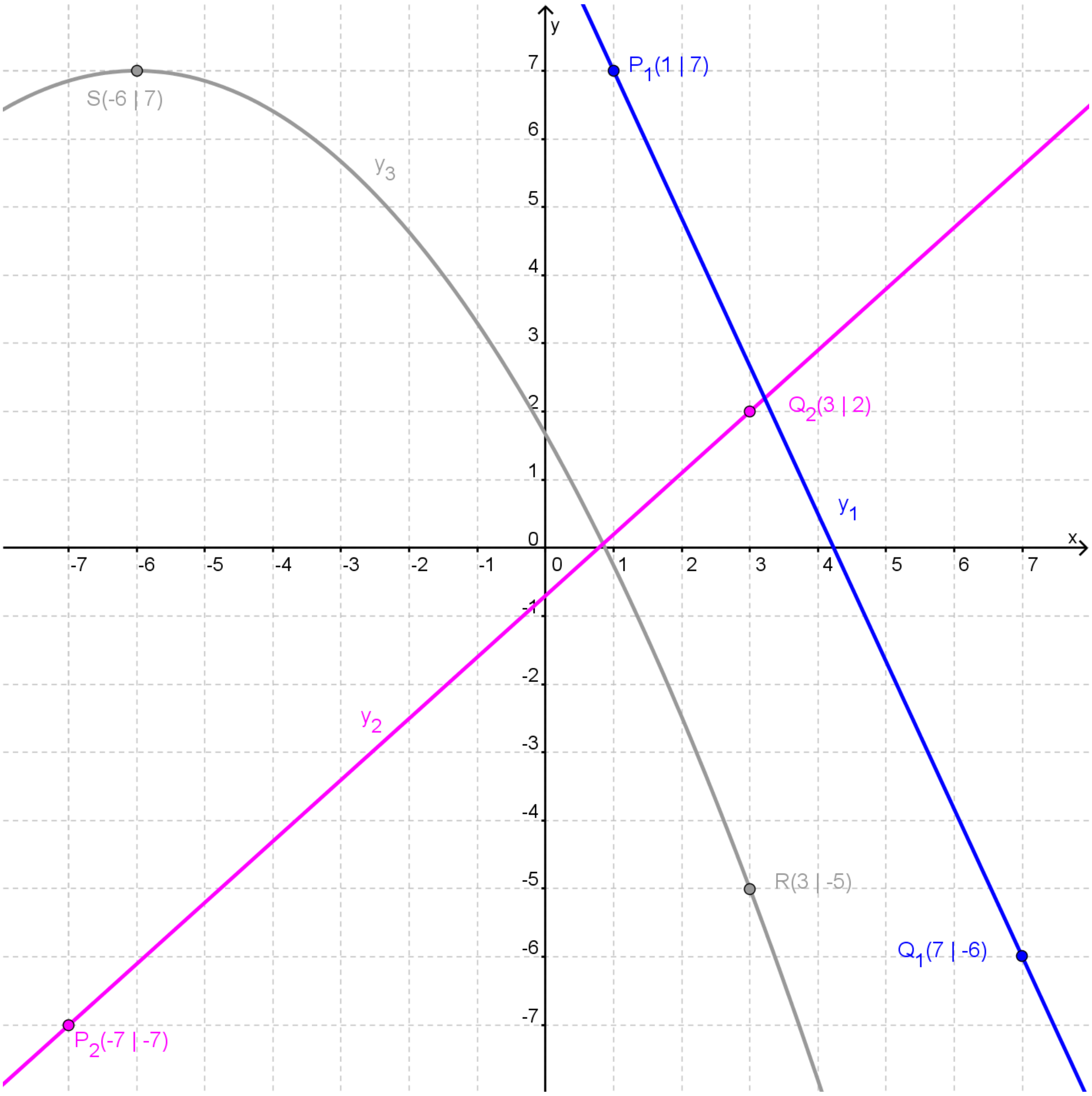
$y_2 = m_2 x + b_2$: $\quad m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\frac{9}{10}}$ und $b_2 = y_2 - m_2 x$

$Q_2(3|2)$ eingesetzt: $\quad b_2 = 2 - \frac{9}{10}\cdot 3 = \underline{-\frac{7}{10}}$ $\quad$ somit: $\underline{\underline{y_2 = \frac{9}{10}x - \frac{7}{10}}}$

$y_3 = A\cdot(x - x_S)^2 + y_S$: $\quad x_S = \underline{-6}$ und $y_S = \underline{7}$ und $\Delta y = A\cdot\Delta x^2 \rightarrow A = \frac{\Delta y}{\Delta x^2} = \frac{-12}{9^2} = \underbrace{\underline{-\frac{4}{27}}}_{(0.25)}$

A, x_S, y_S eingesetzt: $\quad y_3 = \underbrace{-\frac{4}{27}\cdot(x+6)^2 + 7}_{(0.25)} = -\frac{4}{27}\cdot\left(x^2 + 12x + 36\right) + 7 = \underbrace{\underline{\underline{-\frac{4}{27}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{5}{3}}}}_{(0.5)}$

Graphen für die Aufgabe 1:



Bewertung:

a. sinnvolle Punkte für die Berechnung verwendet (1)

b. für jede korrekte Funktionsgleichung (1)

$y_1 = -\frac{13}{6}x + \frac{55}{6}$

$y_2 = \frac{9}{10}x - \frac{7}{10}$

$y_3 = -\frac{4}{27}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{5}{3}$

Grundform (ABC-Form)

Aufgabe 2 4 Punkte

a.	2
b.	2
Total 4	

Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen ins nebenstehende Koordinatensystem ein! Das Vorgehen muss dokumentiert werden und die zum Einzeichnen verwendeten Punkte müssen erkennbar sein!

a. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

b. $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{45}{2}x + \frac{679}{8}$

Lösung:

a. $y = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 4x - 4\right)$

$y = -\frac{1}{2}\left[x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 - 4\right]$

$y = -\frac{1}{2}\left[(x-2)^2 - 8\right]$

$y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4$

$\underline{S_a(2|4)}$ und $\underline{A = -\frac{1}{2}}$

b. $y = \frac{3}{2}\left(x^2 - 15x + \frac{679}{12}\right)$

$y = \frac{3}{2}\left[x^2 - 15x + \left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2 + \frac{679}{12}\right]$

$y = \frac{3}{2}\left[\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\right]$

$y = \frac{3}{2}\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$\underline{S_b\left(\frac{15}{2}\middle|\frac{1}{2}\right)}$ und $\underline{A = \frac{3}{2}}$

Bewertung:

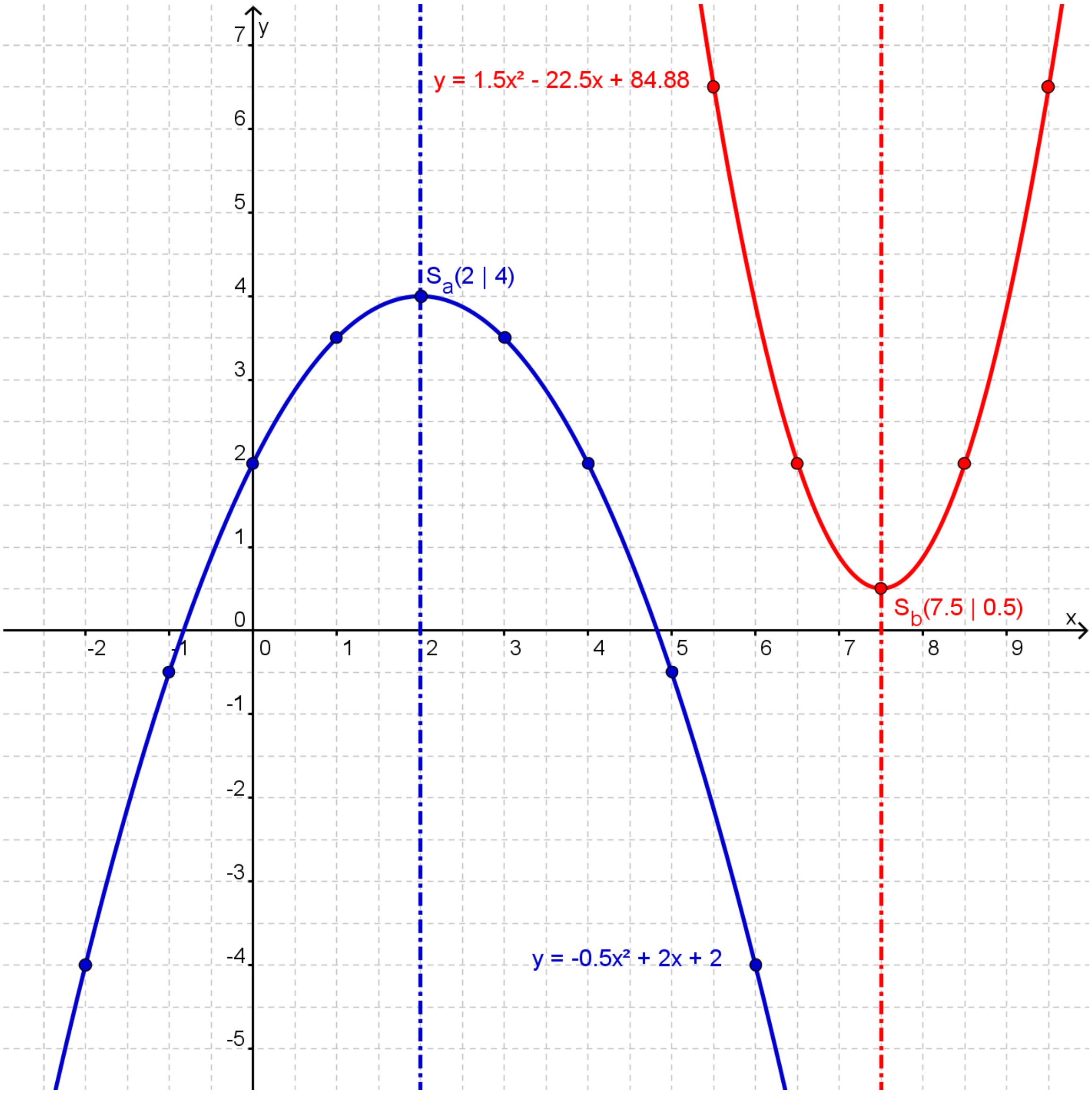
Scheitel und Faktor A berechnet (1)

Scheitel korrekt eingezeichnet (0.5)

Graph korrekt gezeichnet und beschriftet (Faktor A) (0.5)

pro Fehler (−1)

Koordinatensystem für Aufgabe 2:



Bewertung:

a. korrekt eingezeichnet, beschriftet, Konstruktionspunkte erkennbar, genügend Konstruktionspunkte eingezeichnet (2)

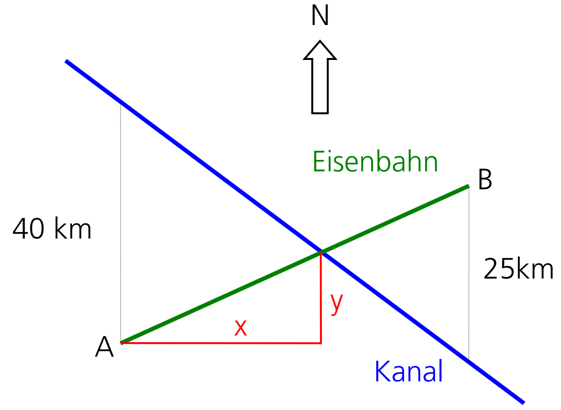
b. korrekt eingezeichnet, beschriftet, Konstruktionspunkte erkennbar, genügend Konstruktionspunkte eingezeichnet (2)

Aufgabe 3 — 3 Punkte

0.5
0.5
1
0.5
0.5
Total 3

Die Stadt B liegt 50 km östlich und 20 km nördlich von A. Zwischen den Städten soll eine Eisenbahnlinie gebaut werden. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Bahnlinie exakt geradlinig verläuft.

Zwischen den Städten verläuft ein Kanal, dessen Lage aus der Zeichnung entnommen werden kann. Auch hier soll angenommen werden, dass er exakt geradlinig verläuft.



Zeichnung ist **nicht** massstäblich!

Zeichnen Sie die beschriebene Situation in ein Koordinatensystem mit Ursprung bei der Stadt A ein. Berechnen Sie die Distanz **x** bzw. Distanz **y**, an welcher Stelle eine Eisenbahnbrücke über den Kanal gebaut werden muss!

Lösung:

Schnittpunkt von zwei Geraden.

$$y_{\text{grün}} = \frac{2}{5}x \qquad (0.5)$$

$$y_{\text{blau}} = -\frac{9}{10}x + 40 \qquad (0.5)$$

$$\frac{2}{5}x = -\frac{9}{10}x + 40 \qquad (1)$$

$$\frac{13}{10}x = 40$$

$$x = \underline{\underline{30.77}} \qquad (0.5)$$

$$y = \frac{2}{5} \cdot \frac{400}{13} = \underline{\underline{12.31}} \qquad (0.5)$$

Der Abstand x beträgt 30.77 km und der Abstand y beträgt 12.31 km.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

a.	0.5
	0.5
	0.5
b.	0.5
	0.5
c.	0.5
	0.5
	0.5
	Total 4

Gegeben sind folgende Funktionen: $y_1 = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$ und $y_2 = \frac{1}{2}x + 1$

a. Berechnen Sie die Nullstellen der beiden Funktionen.

b. Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel.

c. Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen.

Geg: $y_1 = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 3, \quad y_2 = \frac{1}{2}x + 1$

Ges: a. $y_1(x) = 0, \quad y_2(x) = 0$

b. $S = ?$

c. $A = ?, \quad B = ? \quad (\text{wenn } y_1 = y_2)$

Lösung:

a. $y_1 = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad |\cdot 4$

$x^2 + 8x - 12 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{112}}{2}$

$x_1 = \underline{1.2915} \quad \vee \quad x_2 = \underline{-9.2915} \qquad \underbrace{\underline{\underline{N_1(1.2915;0)}}}_{(0.5)}, \quad \underbrace{\underline{\underline{N_2(-9.2915;0)}}}_{(0.5)}$

$y_2 = \frac{1}{2}x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}x = -1$

$x = \underline{-2} \qquad \underbrace{\underline{\underline{N_3(-2;0)}}}_{(0.5)}$

b. $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1.2915 - 9.2915}{2} = \underline{-4}$

$y_s = y_1(x_S) = \frac{1}{4}(-4)^2 + 2(-4) - 3 = \underline{-7} \qquad \underline{\underline{S\left(\underbrace{-4}_{(0.5)};\underbrace{-7}_{(0.5)}\right)}}$

c. $y_1 = y_2 \quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3 = \frac{1}{2}x + 1}_{(0.5)} \qquad |\cdot 4$

$x^2 + 8x - 12 = 2x + 4 \qquad |-2x \quad |-4$

$x^2 + 6x - 16 = 0 = (x+8)\cdot(x-2)$

$x_1 = \underline{-8} \quad \vee \quad x_2 = \underline{2} \qquad \underbrace{\underline{\underline{A(-8;-3)}}}_{(0.5)}, \quad \underbrace{\underline{\underline{B(2;2)}}}_{(0.5)}$

Aufgabe 5 — 2 Punkte

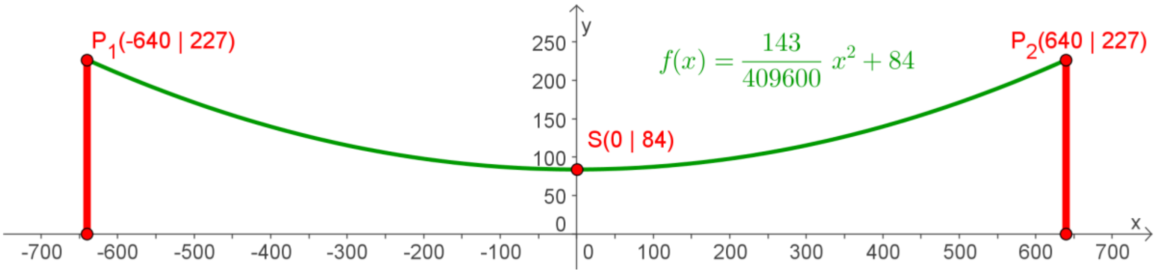
a.	1
b.	1
Total 2	

Das Tragseil der Golden Gate Brücke bei San Francisco (Baujahr 1937) verläuft annähernd parabelförmig. Der waagrechte Abstand zwischen den beiden Pfeilern beträgt 1'280 m.

Die Funktionsgleichung lautet $f(x)=\frac{143}{409'600}x^2+84$.

a. Berechnen Sie die Höhe der Fahrbahn über der Wasseroberfläche.

b. Berechnen Sie die Höhe eines Pfeilers über der Wasseroberfläche.



Geg: $f(x)=\frac{143}{409'600}x^2+84, \quad s=1'280\text{ m}$

Ges: $h_{Fahrbahn}=?, \quad h_{Pfeiler}=?$

Lösung:

a. $h_{Fahrbahn}=f(0)=\frac{143}{409'600}\cdot 0^2+84=\underline{\underline{84}}$ (1)

b. $h_{Pfeiler}=f\left(\frac{s}{2}\right)=\frac{143}{409'600}\cdot 640^2+84=\underline{\underline{227}}$ (1)

Die Fahrbahnhöhe beträgt 84 m und die Pfeilerhöhe beträgt 227 m.

Aufgabe 6 — 4 Punkte

Die Gerade $y_1 = 3x + 10.5$ schneidet die x-Achse im Punkt Q. Die Parabel y_2 verläuft durch die Punkte P(–7.5 | 0) und Q. Der Scheitelpunkt der Parabel y_2 liegt ebenfalls auf der Geraden y_1.

a. Erstellen Sie eine saubere Überlegungsskizze (muss nicht massstäblich sein).
b. Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Parabel y_2 (**ABC-Form** angeben).

a.	1
b.	0.5
	0.5
	0.5
	0.5
	0.5
	0.5
Total 4	

Geg: $y_1 = 3x + 10.5$, $P(-7.5|0)$, $Q \in y_1$, $Q \wedge P \wedge S \in y_2$

Ges: $y_2 = A \cdot (x - x_S)^2 + y_S$

Lösung:

a. $\underbrace{\text{Skizze sauber und korrekt beschriftet.}}_{(1)}$

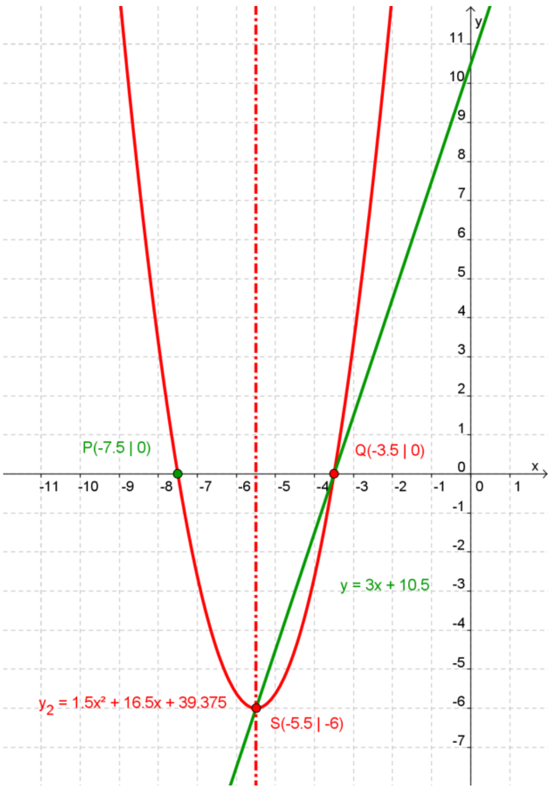
b. $y_1 \cap x - \text{Achse} \quad \rightarrow \quad$ x-Koordinate von Q

$$y_1 = 3x + 10.5 = 0$$
$$3x = -10.5$$
$$\underbrace{x = \underline{-3.5}}_{(0.5)} \quad \rightarrow \quad Q(-3.5|0)$$

x_S und y_S berechnen:

$$x_S = \frac{Q_x + P_x}{2} = \frac{-3.5 + (-7.5)}{2} = \underline{-5.5}$$
$$y_S = y_1(x_S) = 3 \cdot (-5.5) + 10.5 = \underbrace{\underline{-6}}_{(0.5)}$$

somit: $\underline{S(-5.5|-6)}$



Faktor A berechnen:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x^2$$
$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x^2} = \frac{6}{2^2} = \underbrace{\underline{1.5}}_{(0.5)}$$

y_2 berechnen:

$$y_2 = A \cdot (x - x_S)^2 + y_S =$$
$$y_2 = \underbrace{1.5 \cdot (x + 5.5)^2 - 6}_{(0.5)} = \underbrace{1.5 \cdot (x^2 + 11x + 30.25) - 6}_{(0.5)}$$

somit: $\underbrace{\underline{\underline{y_2 = 1.5x^2 + 16.5x + 39.375}}}_{(0.5)}$