Lineare und quadratische Funktionen, TBM

Prüfungsdauer	■ 70 Minuten
Hilfsmittel	■ Taschenrechner ohne CAS!
Bedingungen	■ Dokumentieren Sie den Lösungsweg sauber. ■ Der Lösungsweg muss klar ersichtlich sein. ■ Das Resultat ist soweit als möglich zu vereinfachen. ■ **Kontrollieren Sie Ihre Resultate!** ■ Falls der freie Platz bei den Aufgaben nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die Zusatzblätter am Ende des Dokuments. Versehen Sie die Aufgabenseite mit einem Hinweis wie «Fortsetzung auf Seite 11».

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Name und Vorname ....

Bewertungsübersicht

Aufgabe	1	2	3	4	5	6		Gesamtpunkte
Punkte	4	4	4	3	4	4		23

Note

Aufgabe 1 **4 Punkte**

a.	1
b.	1
	1
	1
Total 4	

Berechnen Sie **möglichst genau** die Funktionsgleichung der Graphen auf Seite 3. Markieren Sie die für die Berechnung verwendeten Punkte auf dem entsprechenden Graphen. Der Lösungsweg muss klar ersichtlich sein! (**ABC-Form** der Parabel angeben!)

Lösung:

$y_1 = m_1 x + b_1$: $\quad m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{13}{6}$ und $b_1 = y_1 - m_1 x$

$P_1(1|7)$ eingesetzt: $\quad b_1 = 7 - \left(-\frac{13}{6}\right)\cdot 1 = \frac{125}{16}$ $\quad$ somit: $\underline{\underline{y_1 = -\frac{13}{6}x + \frac{55}{6}}}$

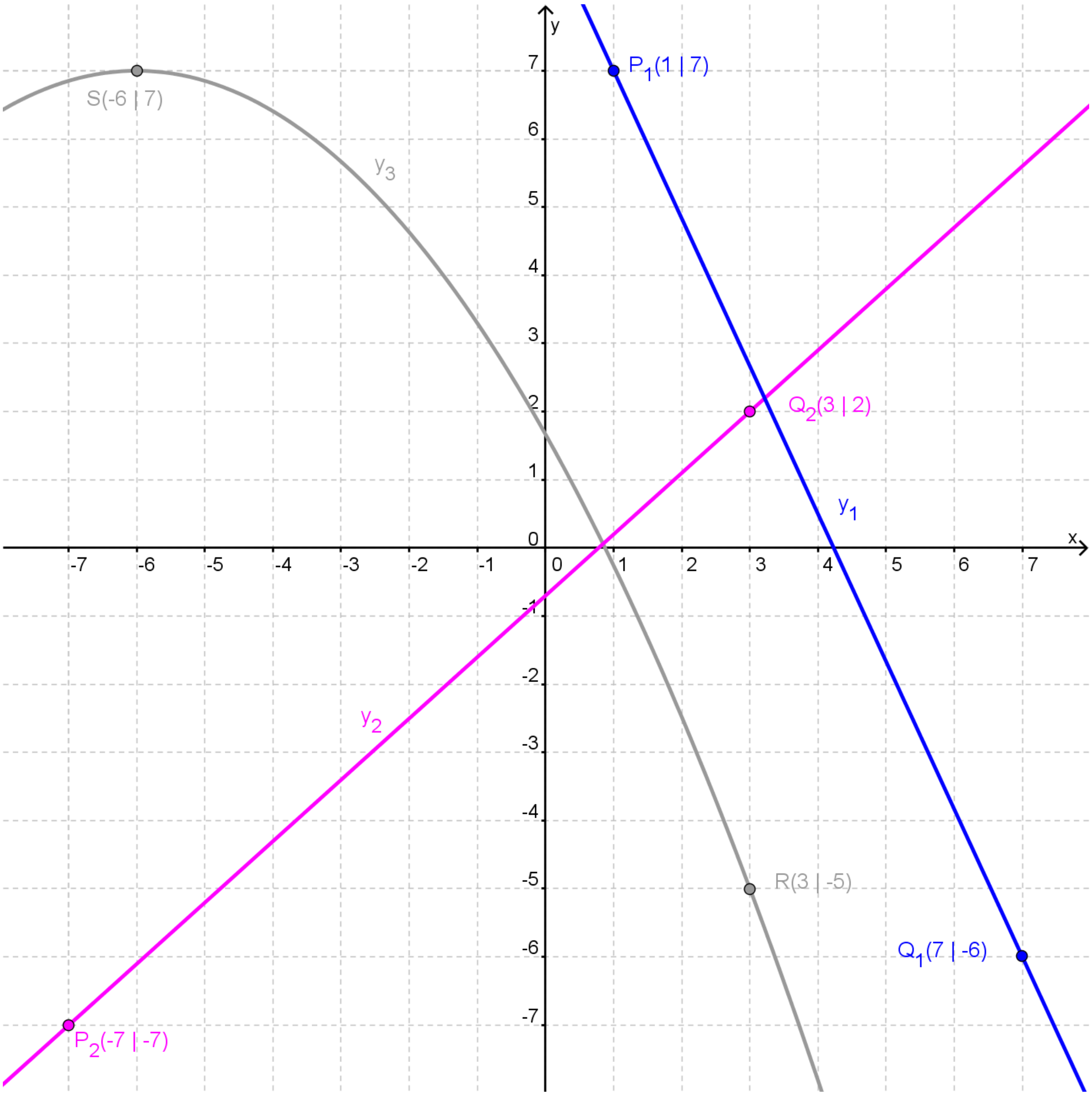
$y_2 = m_2 x + b_2$: $\quad m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9}{10}$ und $b_2 = y_2 - m_2 x$

$Q_2(3|2)$ eingesetzt: $\quad b_2 = 2 - \frac{9}{10}\cdot 3 = -\frac{7}{10}$ $\quad$ somit: $\underline{\underline{y_2 = \frac{9}{10}x - \frac{7}{10}}}$

$y_3 = A\cdot(x - x_S)^2 + y_S$: $x_S = \underline{-6}$ und $y_S = \underline{7}$ und $\Delta y = A\cdot\Delta x^2 \rightarrow A = \frac{\Delta y}{\Delta x^2} = \frac{-12}{9^2} = \underbrace{-\frac{4}{27}}_{(0.25)}$

A, x_S, y_S eingesetzt: $y_3 = \underbrace{-\frac{4}{27}\cdot(x+6)^2 + 7}_{(0.25)} = -\frac{4}{27}\cdot\left(x^2 + 12x + 36\right) + 7 = \underbrace{\underline{\underline{-\frac{4}{27}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{5}{3}}}}_{(0.5)}$

Graphen für die Aufgabe 1:



Bewertung:

a. sinnvolle Punkte für die Berechnung verwendet (1)

b. für jede korrekte Funktionsgleichung (1)

$$y_1 = -\frac{13}{6}x + \frac{55}{6}$$

$$y_2 = \frac{9}{10}x - \frac{7}{10}$$

$$y_3 = -\frac{4}{27}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{5}{3}$$

Grundform (ABC-Form)

Aufgabe 2

4 Punkte

a.	2
b.	2

Total 4

Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen ins nebenstehende Koordinatensystem ein! Das Vorgehen muss dokumentiert werden und die zum Einzeichnen verwendeten Punkte müssen erkennbar sein!

a. $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{19}{8}$

b. $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{45}{2}x+\frac{667}{8}$

Lösung:

a. $y=-\frac{1}{2}\left(x^2-3x-\frac{19}{4}\right)$

$$y=-\frac{1}{2}\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{19}{4}\right]$$

$$y=-\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-7\right]$$

$$y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$$

$\underline{S_a\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{7}{2}\right)}$ und $\underline{A=-\frac{1}{2}}$

b. $y=\frac{3}{2}\left(x^2-15x+\frac{667}{12}\right)$

$$y=\frac{3}{2}\left[x^2-15x+\left(\frac{15}{2}\right)^2-\left(\frac{15}{2}\right)^2+\frac{667}{12}\right]$$

$$y=\frac{3}{2}\left[\left(x-\frac{15}{2}\right)^2-\frac{2}{3}\right]$$

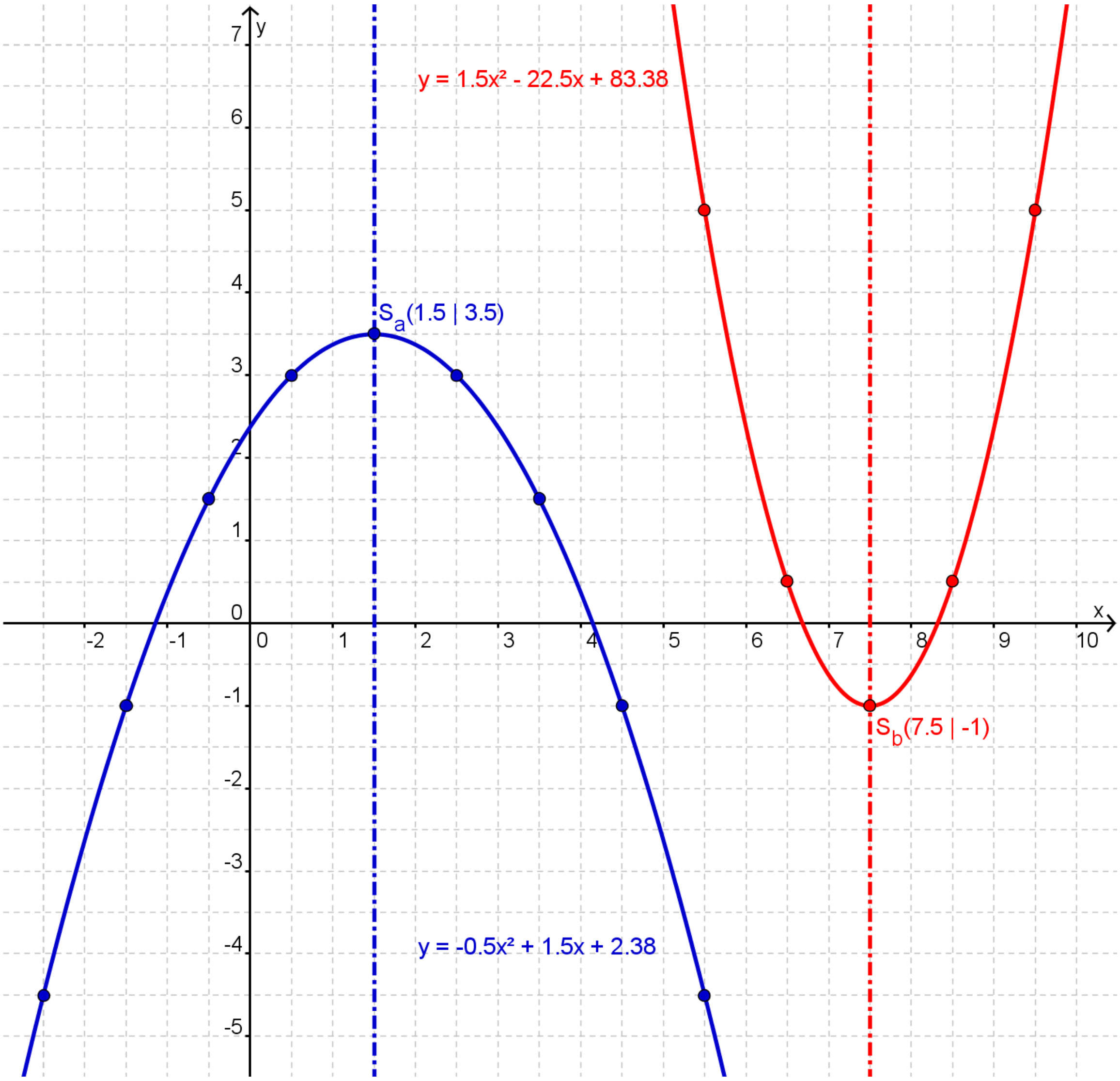
$$y=\frac{3}{2}\left(x-\frac{15}{2}\right)^2-1$$

$\underline{S_b\left(\frac{15}{2}\middle|-1\right)}$ und $\underline{A=\frac{3}{2}}$

Bewertung:

Scheitel und Faktor A berechnet	(1)
Scheitel korrekt eingezeichnet	(0.5)
Graph korrekt gezeichnet und beschriftet (Faktor A)	(0.5)
pro Fehler	(−1)

Koordinatensystem für Aufgabe 2:



Bewertung:

a. korrekt eingezeichnet, beschriftet, Konstruktionspunkte erkennbar, genügend Konstruktionspunkte eingezeichnet (2)

b. korrekt eingezeichnet, beschriftet, Konstruktionspunkte erkennbar, genügend Konstruktionspunkte eingezeichnet (2)

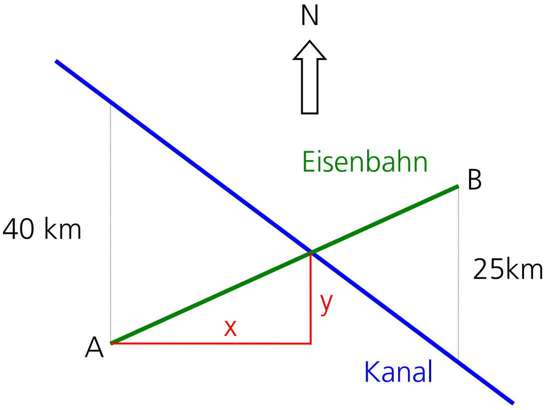
Aufgabe 3 **4 Punkte**

a.	0.5
	0.5
	1
	0.5
	0.5
b.	0.5
	0.5

Total 4

Die Stadt B liegt 50 km östlich und 20 km nördlich von A. Zwischen den Städten soll eine Eisenbahnlinie gebaut werden. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Bahnlinie exakt geradlinig verläuft.

Zwischen den Städten verläuft ein Kanal, dessen Lage aus der Zeichnung entnommen werden kann. Auch hier soll angenommen werden, dass er exakt geradlinig verläuft.



Zeichnung ist **nicht** massstäblich!

a. Berechnen Sie die Distanz **x** bzw. Distanz **y**, an welcher Stelle eine Eisenbahnbrücke über den Kanal gebaut werden muss!

b. Überprüfen Sie Ihre Rechnung mit einer Zeichnung im Maßstab 1 : 400’000.

Lösung:

Koordinatensystem mit Ursprung bei der Stadt A einzeichnen!
Schnittpunkt von zwei Geraden.

$$y_{\text{grün}} = \frac{2}{5}x \qquad (0.5)$$

$$y_{\text{blau}} = -\frac{9}{10}x + 40 \qquad (0.5)$$

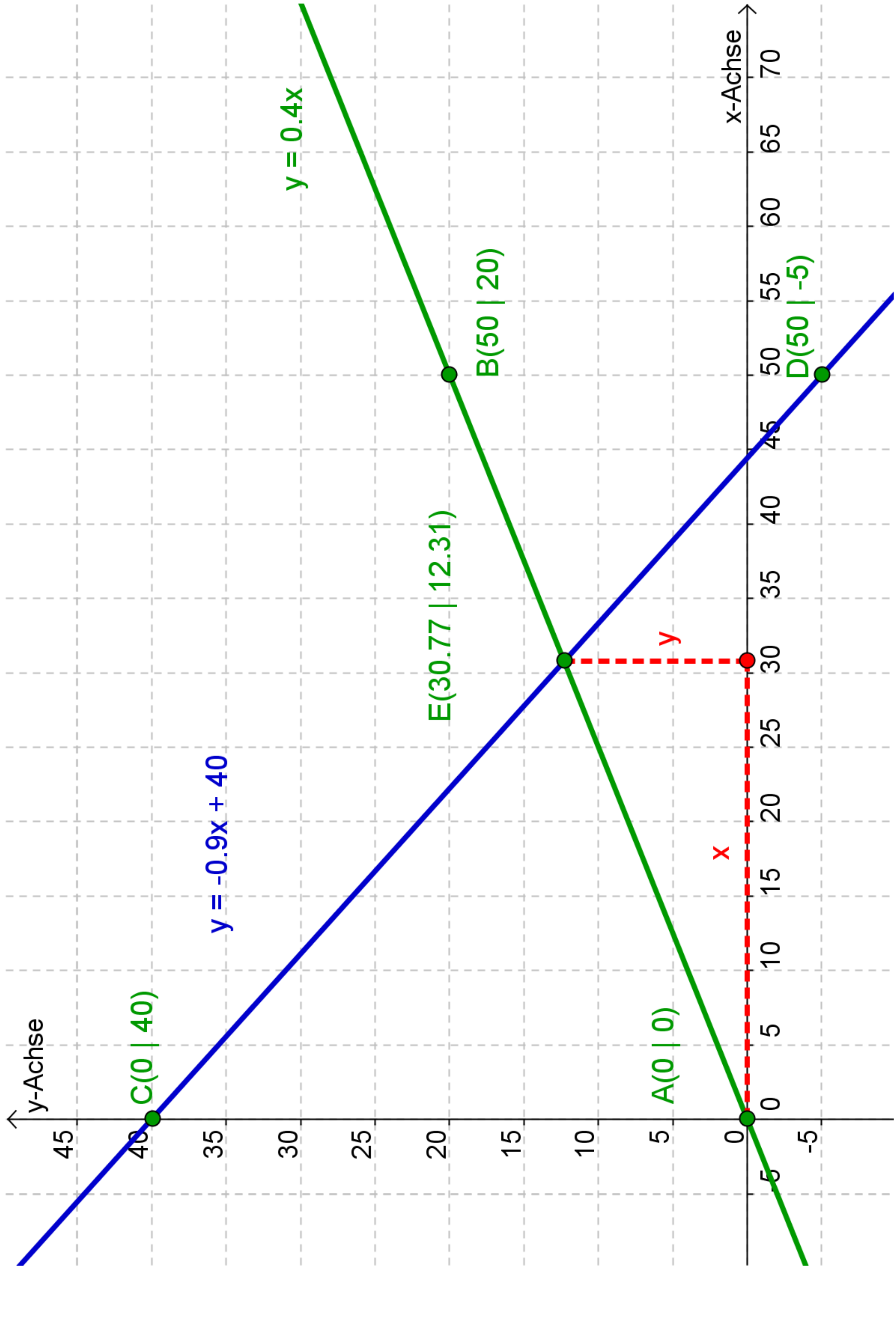
$$\frac{2}{5}x = -\frac{9}{10}x + 40 \qquad (1)$$

$$\frac{13}{10}x = 40$$

$$x = \underline{\underline{30.77}} \qquad (0.5)$$

$$y = \frac{2}{5} \cdot \frac{400}{13} = \underline{\underline{12.31}} \qquad (0.5)$$

Der Abstand x beträgt 30.77 km und der Abstand y beträgt 12.31 km.


y-Achse
x-Achse
y = 0.4x
y = -0.9x + 40
C(0 | 40)
A(0 | 0)
E(30.77 | 12.31)
B(50 | 20)
D(50 | -5)
x
y

Aufgabe 4 3 Punkte

a.	1
	0.5
	1
b.	0.5
Total 3	

Das Tragseil der Golden Gate Brücke bei San Francisco (Baujahr 1937) verläuft annähernd parabelförmig. Der waagrechte Abstand zwischen den beiden Pfeilern beträgt 1'280 m.

Die Fahrbahnhöhe über der Wasseroberfläche beträgt 84 m. Die Pfeilerhöhen über der Wasseroberfläche gemessen betragen je 227 m.

a. Berechnen Sie die Funktionsgleichung des Tragseils y = f(x), wobei y der Höhe des Tragseils in m über der Wasseroberfläche und x dem waagrechten Abstand in m zwischen den beiden Pfeilern entspricht. Den Koordinatenursprung können Sie selber festlegen!

b. Geben Sie die Position des gewählten Koordinatenursprungs an!

Geg: $s = 1'280\text{ m},\quad h_{\text{Fahrbahn}} = 84\text{ m},\quad h_{\text{Pfeiler}} = 227\text{ m}$

Ges: $y = f(x)$

Lösung (Ursprung in der Mitte der beiden Pfeiler auf der Wasseroberfläche):

a. $P_1\left(-\frac{d}{2}\middle|h_{\text{Pfeiler}}\right) \rightarrow P_1(-640|227)$

$P_2\left(\frac{d}{2}\middle|h_{\text{Pfeiler}}\right) \rightarrow P_2(640|227)$

$S(0|h_{\text{Fahrbahn}}) \rightarrow S(0|84)$

$S(0|84)$ und $P_2(640|227)$ in Scheitelform eingesetzt:

$227 = A\cdot(640-0)^2 + 84$ (1)

$A = \frac{227-84}{640^2} = \underline{\frac{143}{409'600}}$ (0.5)

$y = \underline{\underline{\frac{143}{409'600}\cdot x^2 + 84}}$ (1)

b. Der Koordinatenursprung befindet sich in der Mitte der beiden Pfeiler auf der Wasseroberfläche! (0.5)

Lösungsvariante mit Ursprung beim Pfeiler ↑siehe Seite 11!

Aufgabe 5 — 4 Punkte

a.	1
	1
	1
b.	1
Total 4	

Gegeben sind die Parabeln $y_1 = -0.7x^2 - 5.5x + 6.625$ und $y_2 = 0.8x^2 + 5x - 20$.

a. Um wie viel muss eine der beiden Parabeln in y-Richtung verschoben werden, bis sie die andere berührt?

b. Berechnen Sie die x-Koordinate des Berührungspunktes!

Geg: $y_1 = -0.7x^2 - 5.5x + 6.625, \quad y_2 = 0.8x^2 + 5x - 20 + k$

Ges: $k = ?, \quad x = ?, \quad (\text{Diskriminante} = \text{Null})$

Lösung:

a. $y_1 = y_2$

$-0.7x^2 - 5.5x + 6.625 = 0.8x^2 + 5x - 20 + k$ (1)

$0 = 1.5x^2 + 10.5x + k - 26.625$

$A = 1.5, \quad B = 10.5, \quad C = k - 26.625$

$B^2 - 4AC = 0$

$10.5^2 - 4 \cdot 1.5 \cdot (k - 26.625) = 0$ (1)

$110.25 - 6k + 159.75 = 0$

$6k = 270$

$k = \underline{\underline{45}}$ (1)

Die Parabel y_2 muss um 45 Einheiten in y-Richtung verschoben werden.

b. $\underbrace{x_1 = x_2 = x}_{\text{weil Diskriminante Null ist!}} = \frac{-B}{2A} = \frac{-10.5}{2 \cdot 1.5} = \underline{\underline{-3.5}}$ (1)

Die x-Koordinate des Berührungspunktes beträgt -3.5.

Aufgabe 6 — 4 Punkte

a.	1
b.	0.5
	0.5
	0.5
	0.5
	0.5
	0.5
Total 4	

Die Gerade $y_1 = 3x - 22.5$ schneidet die x-Achse im Punkt Q. Die Parabel y_2 verläuft durch die Punkte P(3.5 | 0) und Q. Der Scheitelpunkt der Parabel y_2 liegt ebenfalls auf der Geraden y_1.

a. Erstellen Sie eine saubere Überlegungsskizze (muss nicht massstäblich sein).

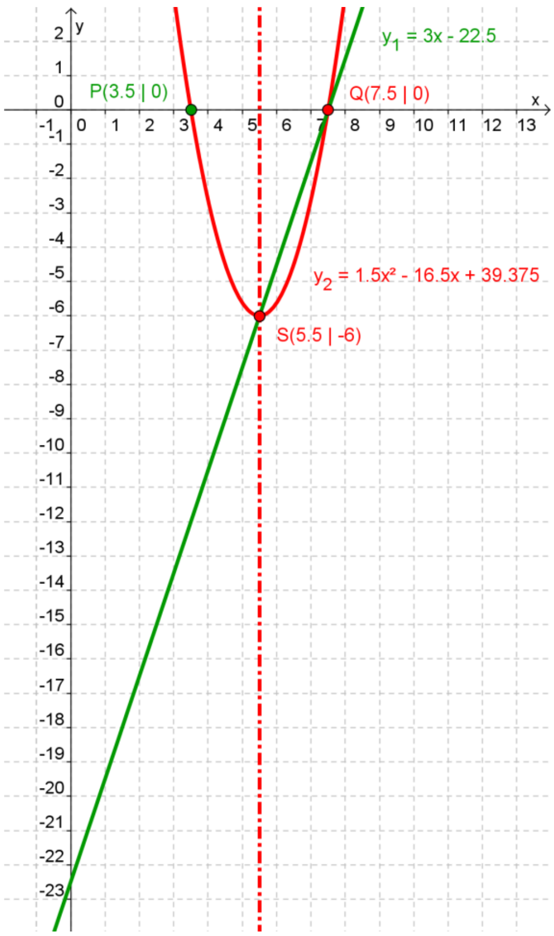
b. Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Parabel y_2 (**ABC-Form** angeben).

Geg: $y_1 = 3x - 22.5,\ P(3.5|0),\ Q \in y_1,\ Q \wedge P \wedge S \in y_2$

Ges: $y_2 = A \cdot (x - x_S)^2 + y_S$

Lösung:

a. $\underbrace{\text{Skizze sauber und korrekt beschriftet.}}_{(1)}$



b. $y_1 \cap x-\text{Achse} \quad \rightarrow \quad$ x-Koordinate von Q

$$y_1 = 3x - 22.5 = 0$$

$$3x = 22.5$$

$$\underbrace{x = 7.5}_{(0.5)} \quad \rightarrow \quad Q(7.5|0)$$

x_S und y_S berechnen:

$$x_S = \frac{Q_x + P_x}{2} = \frac{7.5 + 3.5}{2} = \underline{5.5}$$

$$y_S = y_1(x_S) = 3 \cdot 5.5 - 22.5 = \underbrace{\underline{-6}}_{(0.5)}$$

somit: $\underline{S(5.5|-6)}$

Faktor A berechnen:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x^2$$

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x^2} = \frac{6}{2^2} = \underbrace{\underline{1.5}}_{(0.5)}$$

y_2 berechnen:

$$y_2 = A \cdot (x - x_S)^2 + y_S =$$

$$y_2 = \underbrace{1.5 \cdot (x - 5.5)^2 - 6}_{(0.5)} = \underbrace{1.5 \cdot (x^2 - 11x + 30.25) - 6}_{(0.5)}$$

somit: $\underbrace{\underline{\underline{y_2 = 1.5x^2 - 16.5x + 39.375}}}_{(0.5)}$

Fortsetzung von Aufgabe 4

Geg: $s = 1'280\,\text{m}, \quad h_{\text{Fahrbahn}} = 84\,\text{m}, \quad h_{\text{Pfeiler}} = 227\,\text{m}$

Ges: $y = f(x)$

Lösung (Ursprung beim linken Pfeiler auf der Wasseroberfläche):

a. $P_1\left(0 \mid h_{\text{Pfeiler}}\right) \rightarrow P_1\left(0 \mid 227\right)$

$P_2\left(d \mid h_{\text{Pfeiler}}\right) \rightarrow P_2\left(1'280 \mid 227\right)$

$S\left(640 \mid h_{\text{Fahrbahn}}\right) \rightarrow S\left(640 \mid 84\right)$

$S(640 \mid 84)$ und $P_1(0 \mid 227)$ in Scheitelform eingesetzt:

$227 = A \cdot (0 - 640)^2 + 84$ (1)

$A = \dfrac{227 - 84}{640^2} = \dfrac{143}{\underline{409'600}}$ (0.5)

$y = \underline{\underline{\dfrac{143}{409'600} \cdot (x - 640)^2 + 84}} = \underline{\underline{\dfrac{143}{409'600}x^2 - \dfrac{143}{320}x + 227}}$ (1)

b. Der Koordinatenursprung befindet beim linken Pfeiler auf der Wasseroberfläche! (0.5)

Schaubild der Variante 1:

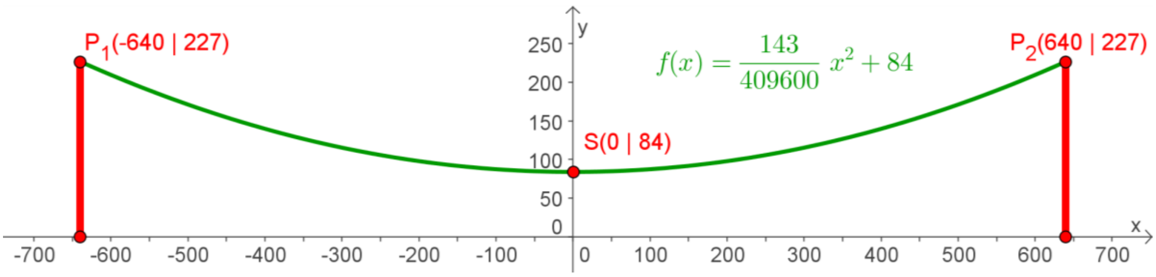


Schaubild der Variante 2: