

Finanzmathematik und Logarithmieren 2015, M2a

- Prüfungsdauer ■ 60 Minuten
- Hilfsmittel ■ Taschenrechner und Formelsammlung
- Bedingungen ■ Dokumentieren Sie den Lösungsweg sauber.
 ■ **Geben Sie bei den Textaufgaben an, was gegeben bzw. was gesucht wird!**
 ■ Der Lösungsweg muss klar ersichtlich sein.
 ■ Das Resultat ist soweit wie möglich zu vereinfachen.
 ■ **Kontrollieren Sie Ihre Resultate!**
 ■ Falls der freie Platz bei den Aufgaben nicht ausreicht, benutzen Sie bitte Zusatzblätter.
 Versehen Sie die Aufgabenseite mit einem Hinweis wie «Fortsetzung auf Zusatzblatt».

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Name und Vorname

Bewertungsübersicht

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Punkte	2	2.5	2	3	2.5	2.5	1.5

Gesamtpunkte
16

Note
PN:
2. SM:
EF:

Aufgabe 1

2 Punkte

Ein Kapital, das zuerst für 3 Jahre zu 5 %, dann für 7 Jahre zu 4 % angelegt wurde, ist auf CHF 6'053.20 angewachsen.

Berechnen Sie das ursprünglich angelegte Kapital! Runden Sie auf einen Franken genau.

Geg: $n_1 = 3$, $q_1 = 1.05$, $n_2 = 7$, $q_2 = 1.04$, $K_n = 6'053.20$

Ges: $K_0 = ?$

0.25
0.25
0.25
0.25
0.5
0.5

Total 2

Lösung:

$$6'053.20 = \overbrace{K_0}^{(0.25)} \cdot \overbrace{1.05^3}^{(0.25)} \cdot \overbrace{1.04^7}^{(0.25)}$$

$$K_0 = \frac{6'053.20}{1.05^3 \cdot 1.04^7} = \underbrace{3'973.60}_{(0.5)}$$

Das ursprünglich angelegte Kapital betrug CHF 3'974.
(0.5)

Aufgabe 2**2.5 Punkte**

Simone hat bei der Bank Gier ein Guthaben von CHF 120'000.–, das zu 2.1 % verzinst wird.
Andrea hat bei der Bank Raff ein Guthaben von CHF 95'000.–, das zu 2.6 % verzinst wird.

Nach wie vielen Jahren werden beide gleichviel auf ihrem Konto haben?
Runden Sie auf ein Jahr genau.

$$\text{Geg: } K_S = 120'000, q_S = 1.021, K_A = 95'000, q_A = 1.026$$

$$\text{Ges: } K_S \cdot q_S^n = K_A \cdot q_A^n \rightarrow n = ?$$

Lösung:

$$\underbrace{120'000 \cdot 1.021^n}_{(0.5)} = \underbrace{95'000 \cdot 1.026^n}_{(0.5)} \quad | : 95'000$$

$$\frac{24}{19} \cdot 1.021^n = 1.026^n \quad | : 1.021^n$$

$$\frac{24}{19} = \left(\frac{1.026}{1.021} \right)^n \quad | \text{logarithmieren}$$

$$\lg \frac{24}{19} = n \cdot \lg \frac{1.026}{1.021} \quad | : \lg \frac{1.026}{1.021}$$

$$n = \frac{\lg \frac{24}{19}}{\underbrace{\lg \frac{1.026}{1.021}}_{(0.5)}} = \underline{\underline{47.82}}_{(0.5)}$$

Nach 48 Jahren werden beide gleichviel auf ihrem Konto haben.
(0.5)

0.5

0.5

0.5

0.5

0.5

Total 2.5

Aufgabe 3**2 Punkte**

Die Druckerei «Flyer» möchte eine neue Druckmaschine vom Typ «Speedmaster» leasen. Der Leasinggeber unterbreitet der Druckerei folgendes Angebot:

- Leasingzins 5 % pro Jahr
- Leasingdauer 4 Jahre
- 5 Leasingraten von CHF 40'000.–, zahlbar im Abstand von je einem Jahr, die erste Rate zahlbar bei Übergabe der Druckmaschine.

Berechnen Sie den Neupreis der Druckmaschine!

0.5
0.5
0.5
0.5
Total 2

Geg: $q = 1.05$, $R = \text{CHF } 40'000$, $n = 4$

Ges: $K_0 = ?$

Lösung:

$$\underbrace{K_0}_{(0.5)} = \underbrace{R}_{(0.5)} + \underbrace{\frac{R}{q} + \frac{R}{q^2} + \frac{R}{q^3} + \frac{R}{q^4}}_{(0.5)} = R \cdot \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} \right)$$

$$K_0 = \text{CHF } 40'000 \cdot \left(1 + \frac{1}{1.05} + \frac{1}{1.05^2} + \frac{1}{1.05^3} + \frac{1}{1.05^4} \right) = \underline{\underline{\text{CHF } 181'838}}_{(0.5)}$$

Der Neupreis der Druckmaschine beträgt CHF 181'838.

Aufgabe 4**3 Punkte**

Zerlegen Sie den Term mit Hilfe der Logarithmengesetze so weit wie möglich.

$$a. \lg \frac{\sqrt{m}}{\sqrt[3]{m}} = ? \quad m > 0$$

$$b. \lg(9x^4 - x^2) = ? \quad x > 1$$

Lösung:

$$a. \lg \frac{\sqrt{m}}{\sqrt[3]{m}} = \lg \frac{m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{3}}} = \lg m^{\frac{3-2}{6}} = \underbrace{\lg m^{\frac{1}{6}}}_{(0.5)} = \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \lg m}_{(0.5)}$$

$$b. \lg(9x^4 - x^2) = \lg \left[\underbrace{x^2}_{(0.5)} \underbrace{(3x+1)(3x-1)}_{(0.5)} \right] = \underbrace{2 \cdot \lg x}_{(0.5)} + \underbrace{\lg(3x+1) + \lg(3x-1)}_{(0.5)}$$

a.	0.5
	0.5
b.	0.5
	0.5
	0.5
	0.5

Total 3

Aufgabe 5

2.5 Punkte

Berechnen Sie die Lösungsmenge L. Die Lösungsvariable ist x. G = R und D = R

a. $7^{2x+1} = \frac{1}{343}$

b. $3^{x-1} \cdot 24 = 2^{x+1} \cdot 13.5$

a.	0.5
	0.5
b.	0.5
	0.5
	0.5
Total 2.5	

Lösung:

a. $7^{2x+1} = \frac{1}{7^3} = 7^{-3}$ (0.5)

$2x + 1 = -3$

$2x = -4$

$x = \underline{-2} \rightarrow L = \{\underline{-2}\}$ (0.5)

b. $3^{x-1} \cdot 24 = 2^{x+1} \cdot 13.5$ (0.5)

$(x - 1) \cdot \lg 3 + \lg 24 = (x + 1) \cdot \lg 2 + \lg 13.5$ |lg

$x \cdot \lg 3 - \lg 3 + \lg 24 = x \cdot \lg 2 + \lg 2 + \lg 13.5$ |ausmultiplizieren

$x \cdot (\lg 3 - \lg 2) = \lg 2 + \lg 13.5 + \lg 3 - \lg 24$ |Terme mit x separieren

$x = \frac{\lg 2 + \lg 13.5 + \lg 3 - \lg 24}{\lg 3 - \lg 2} = \underline{3}$ |:(lg3 - lg2)

$L = \{\underline{3}\}$ (0.5)

Aufgabe 6

2.5 Punkte

Berechnen Sie x in den folgenden Gleichungen. $G = \mathbb{R}$ und $D = \mathbb{R}$

a. $3 \cdot \log_n \left(\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n} \right) = x \quad (n > 0 \wedge n \neq 1)$

b. $\log_2 \sqrt[4]{2} \cdot \log_a \frac{a^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{a^3}} = x \quad (a > 0 \wedge a \neq 1)$

a.	0.5
	0.5
b.	0.5
	0.5
	0.5
Total 2.5	

Lösung:

a. $\log_n \left(\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n} \right) = x \quad (0.5)$

$\log_n \frac{n^2}{n^3} = x$

$\log_n n^{-1} = \underline{\underline{-1}} = x \quad (0.5)$

b. $\log_2 2^{\frac{1}{4}} \cdot \log_a \frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}} = x \quad (0.5)$

$\frac{1}{4} \cdot \log_a a^{-\frac{1}{2}} = x \quad (0.5)$

$\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{8}}} = x \quad (0.5)$

Aufgabe 7

1.5 Punkte

Berechnen Sie den Definitionsbereich D und die Lösungsmenge L der Gleichung. $G = \mathbb{R}$

$$\lg y + \lg(y + 4) = 2 \cdot \lg(y + 1)$$

Lösung:

$$y > 0 \quad \wedge \quad y > -4 \quad \wedge \quad y > -1$$

$$D = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$$

(0.25)

$$\lg y + \lg(y + 4) = 2 \cdot \lg(y + 1)$$

|Produkt- u. Potenzregel

$$\lg(y^2 + 4y) = \lg(y + 1)^2$$

|Numeri gleichsetzen

(0.25)

$$y^2 + 4y = y^2 + 2y + 1$$

| $-y^2 - 2y$

(0.25)

$$2y = 1$$

$$y = \frac{1}{2}$$

(0.25)

Probe: $\underbrace{\lg\left(\frac{1}{2}\right) + \lg\left(\frac{1}{2} + 4\right)}_{0.3522} = 2 \cdot \underbrace{\lg\left(\frac{1}{2} + 1\right)}_{0.3522} \quad (w)$

(0.25)

somit: $L = \underline{\underline{\left\{\frac{1}{2}\right\}}}$

(0.25)

0.25

0.25

0.25

0.25

0.25

0.25

Total 1.5