

Finanzmathematik und Logarithmieren 2016, M2a

- Prüfungsdauer ■ 60 Minuten
- Hilfsmittel ■ Taschenrechner und Formelsammlung
- Bedingungen
- Wahlaufgaben **W** → 2 Aufgaben müssen Sie lösen!
 - Dokumentieren Sie den Lösungsweg sauber.
 - Der Lösungsweg muss klar ersichtlich sein.
 - Das Resultat ist soweit wie möglich zu vereinfachen.
 - **Kontrollieren Sie Ihre Resultate!**
 - Falls der freie Platz bei den Aufgaben nicht ausreicht, benutzen Sie bitte eigene Zusatzblätter. Versehen Sie die Aufgabenseite mit einem Hinweis wie «Fortsetzung auf Zusatzblatt».

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Name und Vorname

Bewertungsübersicht

Aufgabe	1 W	2 W	3 W	4	5	6	7
Punkte	2	2	2	2	2	2	2

Gesamtpunkte
12

Note

Erfahrungsnote

Note 2 Semester

Aufgabe 1, W

2 Punkte

Der ursprüngliche Preis eines Gerätes betrug CHF 5'500. Zunächst sank der Preis um p %. Später wurde der neue Preis um 10 % erhöht. Zuletzt ist dieser neue Preis wieder um 5 % gesenkt worden, so dass das Gerät nun für CHF 5'632.55 verkauft wird. Berechnen Sie p !

Geg: $K_0 = 5'500$, $K_n = 5'632.55$, $q_2 = 1.1$, $q_3 = 0.95$

Ges: $p = ?$ (Prozentsatz bei der ersten Preissenkung)

0.5
0.5
0.5
0.5
Total 2

Lösung:

$$K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = K_n \quad \text{mit} \quad q_1 = 1 - \underbrace{\frac{p}{100}}_{\substack{\text{Minus wegen} \\ \text{Preissenkung}}} \quad (\text{Minuszeichen ist nicht zwingend!})$$

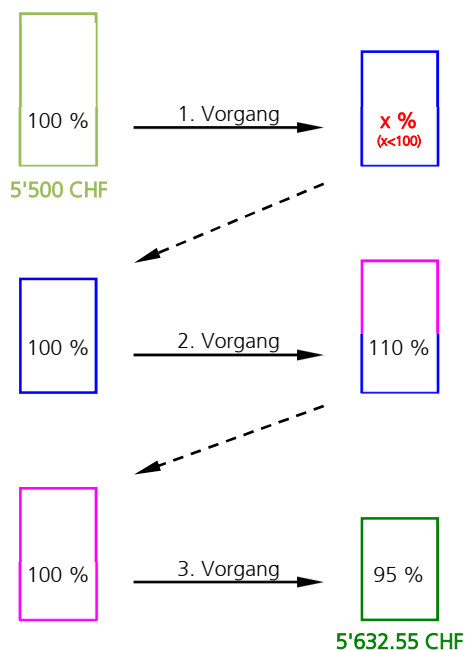
$$\underbrace{5'500 \cdot q_1}_{(0.5)} \cdot 1.1 \cdot 0.95 = \underbrace{5'632.55}_{(0.5)}$$

$$q_1 = \frac{5'632.55}{5'500 \cdot 1.1 \cdot 0.95} = \underline{0.98} \quad (0.5)$$

$$p = (1 - q_1) \cdot 100 = (1 - 0.98) \cdot 100 = \underline{2} \quad (0.5)$$

p (die erste Preissenkung in Prozenten) betrug 2%.

oder «Rückwärtsrechnen» (Aufgabe stammt aus der **BM-Aufnahmeprüfung 1999**):



Mit Farben arbeiten erhöht den Überblick.

Den Grossteil der **Zeit** sollten Sie in die **Analyse** des Problems **investieren**. Die Berechnung ist danach oft sehr einfach!

Aufgabe 2, W

2 Punkte

Die Druckerei «Flyer» möchte eine neue Druckmaschine vom Typ «Speedmaster» leasen. Der Leasinggeber unterbreitet der Druckerei folgendes Angebot:

- Leasingzins 5 % pro Jahr
- Leasingdauer 4 Jahre
- 5 Leasingraten von CHF 40'000.–, zahlbar im Abstand von je einem Jahr, die erste Rate zahlbar bei Übergabe der Druckmaschine.

Berechnen Sie den Neupreis der Druckmaschine!

0.5
0.5
0.5
0.5
Total 2

Geg: $q = 1.05$, $R = \text{CHF } 40'000$, $n = 4$

Ges: $K_0 = ?$

Lösung:

$$\underbrace{K_0}_{(0.5)} = \underbrace{R}_{(0.5)} + \underbrace{\frac{R}{q} + \frac{R}{q^2} + \frac{R}{q^3} + \frac{R}{q^4}}_{(0.5)} = R \cdot \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} \right)$$

$$K_0 = \text{CHF } 40'000 \cdot \left(1 + \frac{1}{1.05} + \frac{1}{1.05^2} + \frac{1}{1.05^3} + \frac{1}{1.05^4} \right) = \underline{\underline{\text{CHF } 181'838}}_{(0.5)}$$

Der Neupreis der Druckmaschine beträgt CHF 181'838.

Aufgabe 3, W

2 Punkte

Ein Lottospieler gewinnt CHF 15'000, die er auf sein Bankkonto einzahlt. Er lässt das Geld 8 Jahre lang liegen und hat nach dieser Zeit CHF 5'000 mehr auf dem Konto als zum Zeitpunkt der Einzahlung. Runden Sie jeweils auf 2 Nachkommastellen!

- a. Berechnen Sie den jährlichen Zinssatz.
- b. Welchen Betrag hätte der Lottospieler 3 Jahre nach seinem Gewinn zusätzlich einzahlen müssen, damit er 8 Jahre nach dem Gewinn CHF 30'000 auf seinem Konto hätte? (um Folgefehler zu vermeiden, rechnen Sie mit einem Zinssatz von 3 %)

Geg: a. $K_0 = 15'000$, $n = 8$, $K_8 = 20'000$, $n = 4$
 b. $K_0 = 15'000$, $n_1 = 3$, $n_2 = 5$, $K_8 = 30'000$, $p = 3\%$

Ges: a. $p = ?$
 b. $x = ?$

a.	0.25
	0.25
	0.5
b.	0.25
	0.25
	0.25
	0.25
Total 2	

Lösung:

a. $K_8 = K_0 \cdot q^n$
 $20'000 = 15'000 \cdot q^8$ (0.25)
 $q = \sqrt[8]{\frac{20'000}{15'000}} = 1.0366 = 1 + \frac{p}{100}$ (0.25)
 $p = \underline{\underline{3.66\%}}$ (0.5)

Der jährliche Zinssatz beträgt 3.66 %.

b. $K_3 = K_0 \cdot q^{n_1}$
 $K_3 = 15'000 \cdot 1.03^3 = 16'390.91$ (0.25)
 $(K_3 + x) \cdot q^{n_2} = K_8$
 $(16'390.91 + x) \cdot 1.03^5 = 30'000$ (0.25)
 $16'390.91 + x = \frac{30'000}{1.03^5}$ (0.25)
 $x = \frac{30'000}{1.03^5} - 16'390.91 = \underline{\underline{CHF 9'487.36}}$ (0.25)

Der Lottospieler hätte 3 Jahre nach seinem Gewinn CHF 9'487.36 einzahlen müssen.

Aufgabe 4

2 Punkte

Zerlegen Sie den Term mit Hilfe der Logarithmengesetze so weit wie möglich.

a. $\lg(x^5 y^6)^3 = ?$ $x, y > 0$

$$\lg(x^{15} y^{18}) = \underbrace{\lg x^{15} + \lg y^{18}}_{(0.5)} = \underbrace{15 \cdot \lg x + 18 \cdot \lg y}_{(0.5)}$$

b. $\lg \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = ?$ $x \neq 0$

$$\lg \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \underbrace{\lg x^{-\frac{2}{3}}}_{(0.5)} = \underbrace{-\frac{2}{3} \cdot \lg x}_{(0.5)}$$

oder

$$\lg \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \underbrace{\lg 1 - \frac{2}{3} \cdot \lg x}_{(0.5)} = \underbrace{-\frac{2}{3} \cdot \lg x}_{(0.5)}$$

a.	0.5
	0.5
b.	0.5
	0.5
Total 2	

Aufgabe 5

2 Punkte

Fassen Sie mit Hilfe der Logarithmengesetze zu einem einzigen Logarithmsterm zusammen und vereinfachen Sie so weit wie möglich. **Alle Numeri > 0.**

a. $\frac{1}{2} \cdot [\lg m + \lg(mn)] - \lg n = ?$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \lg(m^2 n)}_{(0.25)} - \lg n = \underbrace{\lg \sqrt{m^2 n}}_{(0.25)} - \lg n = \underbrace{\lg \frac{m \sqrt{n}}{n}}_{(0.25)} = \underbrace{\lg \frac{m}{\sqrt{n}}}_{(0.25)}$$

a.	0.25
	0.25
	0.25
	0.25
b.	0.25
	0.25
	0.25
	0.25
Total 2	

b. $\lg(ab) + \lg \frac{a}{b} - 3 \cdot \lg a = ?$

$$\underbrace{\lg a + \lg b}_{(0.25)} + \underbrace{\lg a - \lg b}_{(0.25)} - 3 \cdot \lg a = \underbrace{2 \cdot \lg a - 3 \cdot \lg a}_{(0.25)} = -\lg a = \underbrace{\lg a^{-1}}_{(0.25)}$$

oder

$$\lg(ab) + \lg \frac{a}{b} - \underbrace{\lg a^3}_{(0.25)} = \lg \frac{ab \cdot a}{b \cdot a^3} = \lg \frac{a^2 b}{a^3 b} = \lg \frac{1}{a} = \lg a^{-1} \rightarrow -\lg a \text{ ist falsch} \rightarrow \text{Potenzregel!}$$

Aufgabe 6

2 Punkte

Berechnen Sie x in den folgenden Gleichungen. $G = \mathbf{R}$ und $D = \mathbf{R}$

a. $4 \cdot \log_n(n) = x \quad (n > 0 \wedge n \neq 1)$

b. $3 \cdot \log_n\left(\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}\right) = x \quad (n > 0 \wedge n \neq 1)$

a. $4 \cdot \overbrace{\log_n(n)}^1 = x$
(0.25)

oder

$\log_n(n^4) = x \rightarrow x = \underline{\underline{4}}$

$4 \cdot 1 = x \rightarrow x = \underline{\underline{4}}$
(0.25)

oder

$\log_n(n^4) = \frac{\lg n^4}{\lg n} = \frac{4 \cdot \lg n}{\lg n} = \underline{\underline{4}}$
Basiswechsel

b. $3 \cdot \log_n\left(\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}\right) = x$

$\log_n\left(\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n}\right) = x$
(0.5)

$\log_n\left(n^{-\frac{1}{3}}\right) = x$
(0.5)

$\log_n(n^{-1}) = x \rightarrow x = \underline{\underline{-1}}$
(0.25)

a.	0.25
	0.25
b.	0.5
	0.5
	0.25
	0.25

Total 2

Aufgabe 7

2 Punkte

Vereinfachen Sie die folgenden Terme und kreuzen Sie (☒) anschliessend alle richtigen Lösungsvorschläge an (Es können mehrere, nur einer oder kein Lösungsvorschlag richtig sein).

Pro Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, wenn Ihr **vollständig ersichtlicher** Lösungsweg zu den angekreuzten Lösungsvorschlägen führt.

Richtig angekreuzte Lösungsvorschläge ohne Lösungsweg geben keine Punkte, falsch angekreuzte Lösungsvorschläge führen zu Punkteabzügen. (Das Minimum beträgt bei jeder Teilaufgabe 0 Punkte.)

a.	0.25
	0.25
	0.5
b.	0.25
	0.5
	0.25
Total 2	

- a. $\log(x^2 - y^2) - \log(x - y)$
- $= \frac{\log(x^2 - y^2)}{\log(x - y)}$
 - $= \frac{\log(x + y)}{\log 1}$
 - $= \log(x - y)$
 - $= \log(x + y)$
 - $= 2\log x - 2\log y - \log x + \log y$
 - kein Lösungsvorschlag ist richtig

- b. $\frac{\log_5 \sqrt[7]{5^3}}{\log_a \sqrt[m]{a^n}} \cdot \lg(10^{7n})$
- $= \frac{9n^2}{3m}$
 - $= \frac{m}{3n^2}$
 - $= \frac{3n^2}{m}$
 - $= 3m$
 - $= \frac{3m}{9n^2}$
 - kein Lösungsvorschlag ist richtig

Lösungswege für Aufgabe 7:

$$\text{a. } \underbrace{\log \frac{x^2 - y^2}{x - y}}_{(0.25)} = \log \frac{\underbrace{(x+y) \cancel{(x-y)}}_{(0.25)}}{\cancel{x-y}} = \underbrace{\log(x+y)}_{(0.5)}$$

$$\text{b. } \underbrace{\frac{\log_5 5^{\frac{3}{7}}}{\log_a a^{\frac{n}{m}}}}_{(0.25)} \cdot \lg(10^{7n}) = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{n}{m}} \cdot 7n = \frac{3 \cdot m}{7 \cdot n} \cdot 7n = \underline{\underline{3m}}_{(0.25)}$$