Quadratische Funktionen 2017, M2a

Prüfungsdauer	▪ 60 Minuten
Hilfsmittel	▪ Formelsammlung, Taschenrechner **ohne CAS**!
Bedingungen	▪ Dokumentieren Sie den Lösungsweg sauber. ▪ Der Lösungsweg muss klar ersichtlich sein. ▪ Das Resultat ist so weit wie möglich zu vereinfachen. ▪ Erstellen Sie Skizzen und **kontrollieren Sie Ihre Resultate**! ▪ Falls der freie Platz bei den Aufgaben nicht ausreicht, benutzen Sie bitte eigene Zusatzblätter. Versehen Sie die Aufgabenseite mit einem Hinweis wie «Fortsetzung auf Zusatzblatt».

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Name und Vorname ....

Bewertungsübersicht

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamtpunkte
Punkte	2	2	2	2	3	3	14

Note

Aufgabe 1, Achtung: Nur eine Funktionsgleichung verlangt! 2 Punkte

Berechnen Sie **eine** der beiden Funktionsgleichungen der Parabeln auf der gegenüberliegenden Seite. Das Vorgehen muss dokumentiert werden und die für die Berechnung verwendeten Punkte **müssen erkennbar** sein! (ABC-Form der Parabel angeben!)
Bewertungskriterien auf nächster Seite (ganz unten) beachten!

a.	0.5
b.	0.5
	0.5
	0.5
Total 2	

Lösung:

y_1 berechnen $\rightarrow$ $N_1\left(\overbrace{-5}^{x_1}\middle|0\right)$, $N_2\left(\overbrace{3}^{x_2}\middle|0\right)$ und $P\left(\overbrace{2}^{x}\middle|\overbrace{-5}^{y}\right)$ in $\underbrace{\text{Nullstellenform}}_{y=A(x-x_1)(x-x_2)}$ einsetzen:

$$-5 = A(2+5)(2-3)$$
$$-5 = -7A$$
$$\underline{A = \frac{5}{7}} \qquad (0.5)$$

A und Nullstellen in Nullstellenform einsetzen:

$$y_1 = \underbrace{\frac{5}{7}(x+5)(x-3)}_{(0.5)} = \frac{5}{7}\left(x^2+2x-15\right) = \underbrace{\underline{\underline{\frac{5}{7}x^2 + \frac{10}{7}x - \frac{75}{7}}}}_{(0.5)}$$

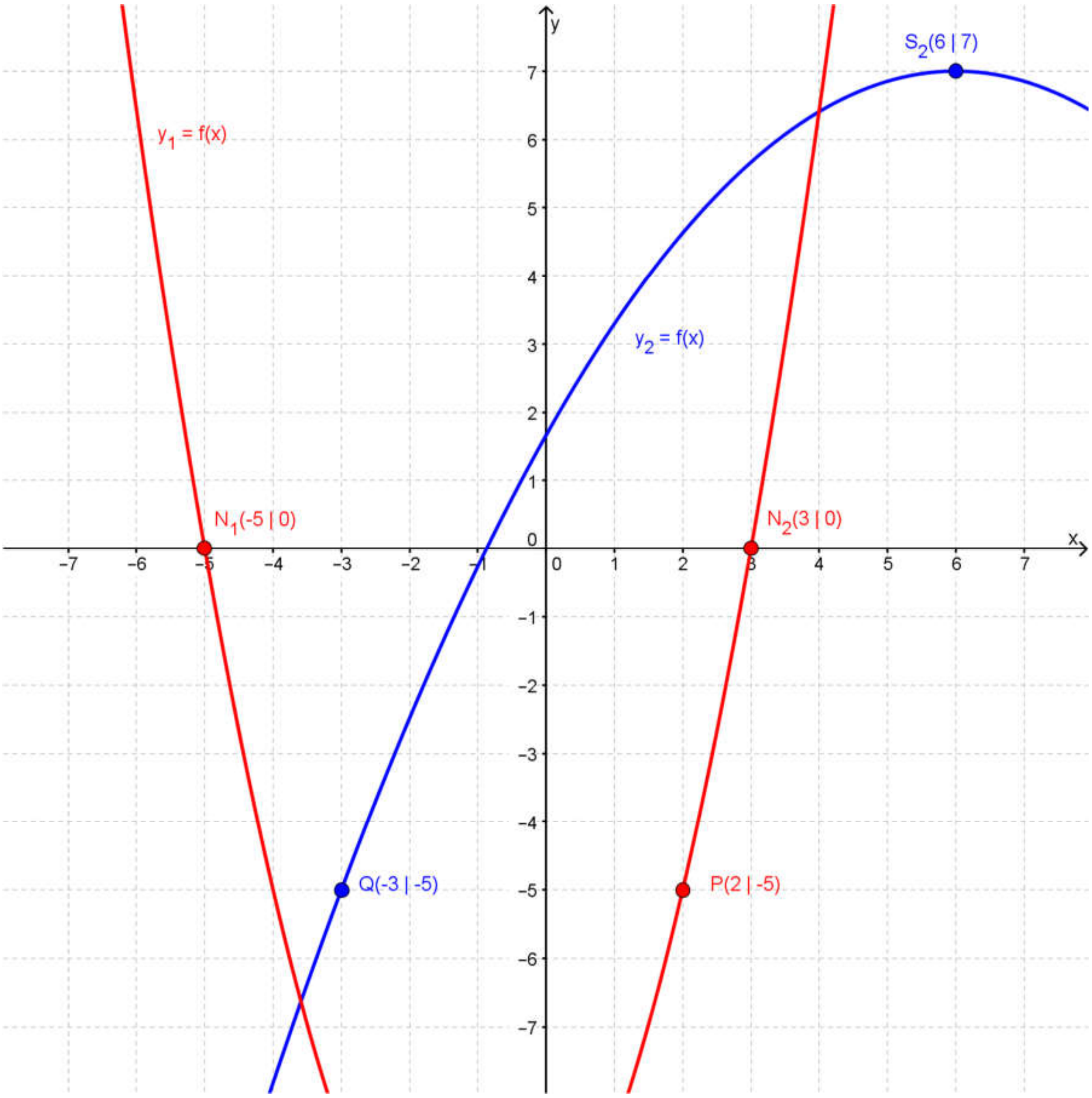
y_2 berechnen $\rightarrow$ $S_2\left(\overbrace{6}^{x_S}\middle|\overbrace{7}^{y_S}\right)$ und $Q\left(\overbrace{-3}^{x}\middle|\overbrace{-5}^{y}\right)$ in Scheitelform einsetzen:

$$-5 = A\cdot(-3-6)^2+7$$
$$-5 = 81\cdot A+7$$
$$A = \frac{-12}{81} = \underline{-\frac{4}{27}} \qquad (0.5)$$

A und $S_2\left(\overbrace{6}^{x_S}\middle|\overbrace{7}^{y_S}\right)$ in Scheitelform einsetzen:

$$y_2 = \underbrace{-\frac{4}{27}(x-6)^2+7}_{(0.5)} = -\frac{4}{27}\left(x^2-12x+36\right)+7 = \underbrace{\underline{\underline{-\frac{4}{27}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{5}{3}}}}_{(0.5)}$$

Graphen für die Aufgabe 1:



Bewertung:

a. sinnvolle Punkte für die Berechnung verwendet (0.5)

b. für die korrekte Funktionsgleichung y_1 **oder** für die Funktionsgleichung y_2 (1.5)

$$y_1 = \frac{5}{7}x^2 + \frac{10}{7}x - \frac{75}{7}$$

(**ABC-Form** der Parabel angeben!)

$$y_2 = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{5}{3}$$

(**ABC-Form** der Parabel angeben!)

a.	0.5
	0.5
	0.5
b.	0.5
Total 2	

Aufgabe 2, Achtung: Nur ein Graph verlangt! 2 Punkte

Zeichnen Sie den Graph einer der beiden Funktionen ins nebenstehende Koordinatensystem ein! Das Vorgehen muss dokumentiert werden und die zum Einzeichnen verwendeten Punkte müssen erkennbar sein! Bewertungskriterien auf nächster Seite (ganz unten) beachten!

1. $y_1 = -(x+9)(x+1)$
2. $y_2 = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 20$

Lösung:

y_1: zuerst Scheitelpunkt berechnen:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-9-1}{2} = \underline{-5}$$

$$y_S = y(x_S) = -(-5+9)(-5+1) = -(4)(-4) = \underline{16}$$

$\underline{S_a(-5|16)}$ und $\underline{A = -1}$

y_2: zuerst in Scheitelform umformen:

$$y_2 = \frac{3}{2}\left(x^2 - 8x + 4^2 - 4^2 + \frac{40}{3}\right) = \frac{3}{2}\left[(x-4)^2 - \frac{8}{3}\right] = \frac{3}{2}(x-4)^2 - 4$$

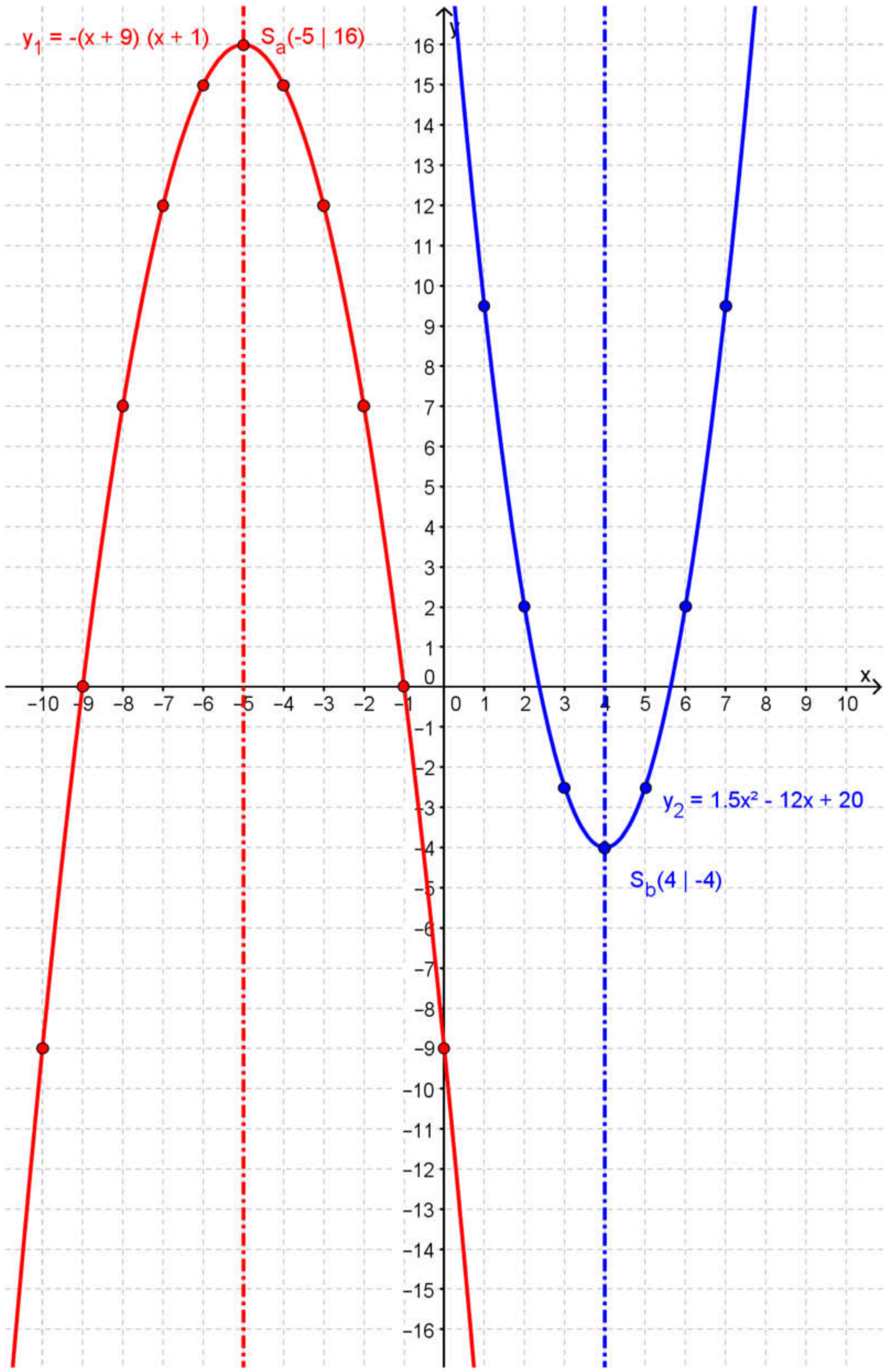
$\underline{S_b(4|-4)}$ und $\underline{A = \frac{3}{2}}$

Bewertung:

a.	Scheitel und Faktor A berechnet	(0.5)
	Scheitel korrekt eingezeichnet	(0.5)
	Graph korrekt gezeichnet (Faktor A) und beschriftet	(0.5)
b.	Koordinatensystem ausgenutzt (genügend Punkte eingezeichnet)	(0.5)

pro Fehler (−1)

Koordinatensystem für Aufgabe 2:



Bewertung:

a. für den korrekt gezeichneten und beschrifteten Graphen (1.5)

b. Koordinatensystem ausgenutzt (genügend Punkte eingezeichnet) (0.5)

Aufgabe 3

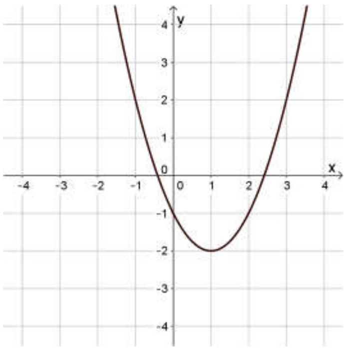
2 Punkte

0.5
0.5
0.5
0.5
Total 2

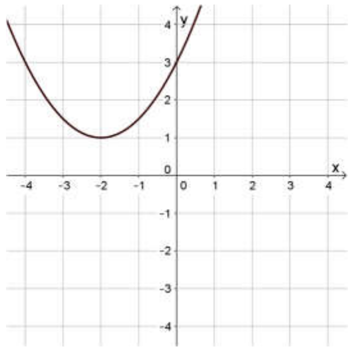
Ordnen Sie den Graphen die richtige Funktionsgleichung zu:

$y_A = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$	$y_B = -(x+3)(x-1)$	$y_C = (x-1)^2 - 2$	$y_D = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$
$y_E = (x+1)^2 - 2$	$y_F = (x-1)^2$	$y_G = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$	$y_H = -(x-3)(x+1)$

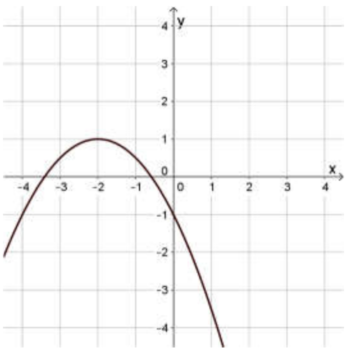
$\boxed{y_C}$



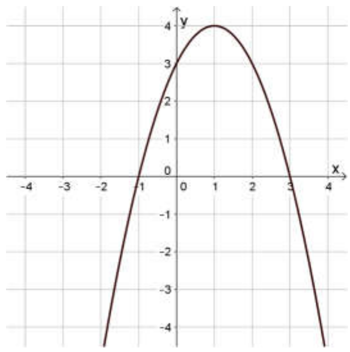
$\boxed{y_A}$



$\boxed{y_D}$



$\boxed{y_H}$



Notizen:

Aufgabe 4 2 Punkte

a.	0.5
b.	0.5
c.	0.5
	0.5
Total 2	

Die Normalparabel $y = x^2$ wird um 7 Einheiten nach rechts und um 8 Einheiten nach oben verschoben und anschliessend um den Faktor –2 gestreckt.

a. Geben Sie den Scheitelpunkt der verschobenen Parabel an.
b. Geben Sie die Funktionsgleichung der verschobenen Parabel in der ABC-Form an.
c. Berechnen Sie die Nullstellen N_1 bzw. N_2.

Lösung:

a. $y_S = -2(x-7)^2 + 8 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{S(7|8)}}$ (0.5)

b. $y = -2\left(x^2 - 14x + 49\right) + 8 = \underline{\underline{-2x^2 + 28x - 90}}$ (0.5)

c. $y = f(x) = 0$

$-2x^2 + 28x - 90 = 0 \qquad |:(-2)$ (0.5)

$x^2 - 14x + 45 = 0$

$(x-5)(x-9) = 0$

$x_1 = 5 \quad \vee \quad x_2 = 9$

$\underline{\underline{N_1(5|0)}} \quad \vee \quad \underline{\underline{N_2(9|0)}}$ (0.5)

Aufgabe 5 3 Punkte

a.	0.5
b.	0.5
	0.5
	0.5
	0.5
	0.5
Total 3	

Die Gerade $y_1 = -2.5x + 30$ schneidet die x-Achse im Punkt Q. Die Parabel y_2 verläuft durch die Punkte P(2 | 0) und Q. Der Scheitelpunkt der Parabel y_2 liegt ebenfalls auf der Geraden y_1.

a. Erstellen Sie eine saubere Überlegungsskizze (muss nicht massstäblich sein).

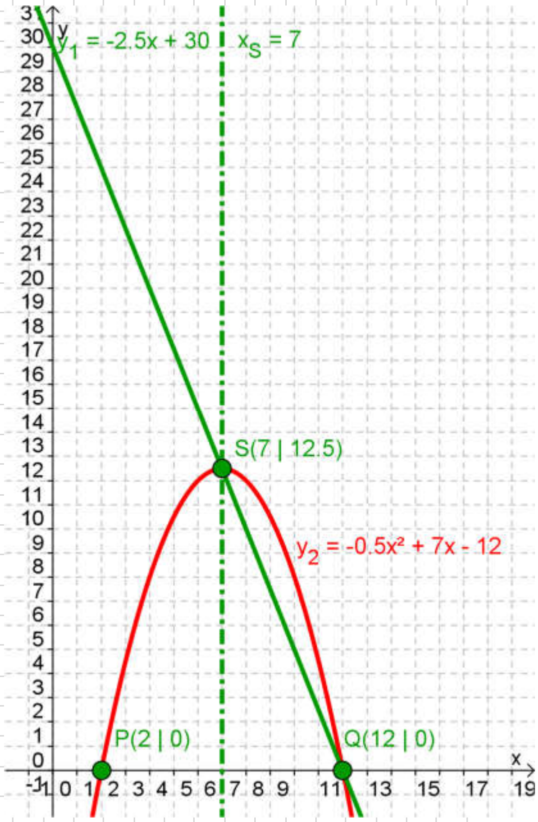
b. Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Parabel y_2 (Grundform angeben).

Geg: $y_1 = -2.5x + 30$, $P(2|0)$, $Q \in y_1$, $Q \wedge P \wedge S \in y_2$

Ges: $y_2 = A \cdot (x - x_S)^2 + y_S$

Lösung:

a. $\underbrace{\text{Skizze sauber und korrekt beschriftet.}}_{(0.5)}$



b. $y_1 \cap x-\text{Achse} \rightarrow$ x-Koordinate von Q

$y_1 = -2.5x + 30 = 0$

$2.5x = 30$

$\underbrace{x = 12}_{(0.5)} \rightarrow Q(12|0)$

x_S und y_S berechnen:

$x_S = \dfrac{Q_x + P_x}{2} = \dfrac{12+2}{2} = \underline{7}$

$y_S = y_1(x_S) = -2.5 \cdot 7 + 30 = \underbrace{\underline{12.5}}_{(0.5)}$

somit: $\underline{S(7|12.5)}$

Faktor A berechnen:

$\Delta y = A \cdot \Delta x^2$

$A = \dfrac{\Delta y}{\Delta x^2} = \dfrac{-12.5}{5^2} = \underbrace{\underline{-0.5}}_{(0.5)}$

y_2 berechnen:

$y_2 = A \cdot (x - x_S)^2 + y_S =$

$y_2 = \underbrace{-0.5 \cdot (x-7)^2 + 12.5}_{(0.5)} = -0.5\left(x^2 - 14x + 49\right) + 12.5$

somit: $\underbrace{\underline{\underline{y_2 = -0.5x^2 + 7x - 12}}}_{(0.5)}$

Aufgabe 6 3 Punkte

Bob Beamon (USA) stellte bei den Olympischen Spielen 1968 in Mexiko-City einen neuen Fabelweltrekord im Weitsprung der Männer auf. Er übertraf dabei die bis dahin bestehende Bestmarke um sagenhafte 55 cm. Die Flugbahn seines Körperschwerpunktes (KSP) wird annähernd durch die folgende Funktion beschrieben: $f(x) = -0.0571x^2 + 0.3838x + 1.14$

a. Bei welcher Weite trifft sein KSP auf?

b. Wie hoch war sein KSP an der höchsten Stelle des Sprungs?

c. Bei welcher Sprungweite ist sein KSP 1.50 m hoch in der Luft?

Beantworten Sie die Fragen a. bis c. rechnerisch.

a.	0.25
	0.25
	0.25
	0.25
b.	0.25
	0.25
c.	0.25
	0.25
	0.25
	0.25
	0.5
Total 3	

Geg: $f(x) = -0.0571x^2 + 0.3838x + 1.14$

Ges: a. $f(x) = 0$

b. $S(x_S | y_S)$

c. $f(x) = 1.5$

Lösung:

a. Ansatz: $f(x) = 0$

$-0.0571x^2 + 0.3838x + 1.14 = 0$ (0.25)

$A = -0.0571, \quad B = 0.3838, \quad C = 1.14$

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \underbrace{\frac{-0.3838 \pm \sqrt{0.3838^2 - 4 \cdot (-0.0571) \cdot 1.14}}{2 \cdot (-0.0571)}}_{(0.25)} =$$

$x_1 = \underbrace{-2.23\,\text{m}}_{(0.25)} \rightarrow$ unmöglich **oder** $x_2 = \underbrace{8.95\,\text{m}}_{(0.25)}$

Der KSP trifft bei 8.95 m auf!

b.

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2.23\,\text{m} + 8.95\,\text{m}}{2} = \underbrace{3.36\,\text{m}}_{(0.25)}$$

$$y_S = f(x_S) = -0.0571 \cdot 3.36^2 + 0.3838 \cdot 3.36 + 1.14 = \underbrace{1.78\,\text{m}}_{(0.25)}$$

$S(3.36 | 1.78)$

Bei 3.36 m erreicht der KSP die maximale Höhe von 1.78 m.

c. Ansatz: $f(x) = 1.5$

$-0.0571x^2 + 0.3838x + 1.14 = 1.5$ (0.25)

$-0.0571x^2 + 0.3838x - 0.36 = 0$

$A = -0.0571,\quad B = 0.3838,\quad C = -0.36$

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \underbrace{\frac{-0.3838 \pm \sqrt{0.3838^2 - 4\cdot(-0.0571)\cdot(-0.36)}}{2\cdot(-0.0571)}}_{(0.25)} =$$

$x_1 = \underbrace{1.13\,\text{m}}_{(0.25)}$ **oder** $x_2 = \underbrace{5.59\,\text{m}}_{(0.25)}$

$\underbrace{\text{Der KSP war bei 1.13 m und bei 5.59 m in 1.5 m Höhe!}}_{\text{Lernende merken, dass es zwei Lösungen gibt} \rightarrow (0.5)}$