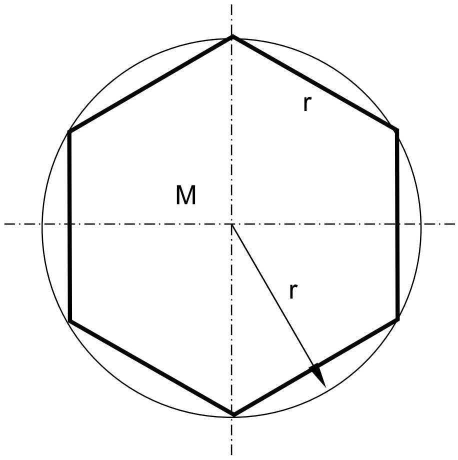
11 Kreisberechnungen

11.1 Kreisumfang

Ein Kreis kann als ein regelmässiges Vieleck mit unendlich grosser Anzahl Ecken angesehen werden.

n	U
6	$6 \cdot r = 3 \cdot d$
12	$3{,}1058 \cdot d$
24	$3{,}1326 \cdot d$
...	...
1536	$3{,}1416 \cdot d$
n	$\left[\left(\sin\frac{180°}{n}\right)\cdot n\right]\cdot d$



$$\boxed{U = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi}$$

π ist eine ***irrationale*** Zahl und kann somit nicht als Bruch geschrieben werden!

11.2 Kreisfläche

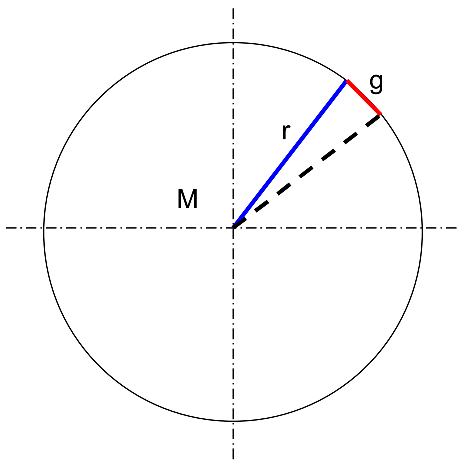
Ein Kreis kann in unendlich viele kleine (rechtwinklige) Dreiecke zerlegt werden.

Herleitung:

$$A_{Dreieck} = \frac{g \cdot r}{2} \qquad g \cdot n = U$$

$$A_{Kreis} = A_{Dreieck} \cdot n = \frac{g \cdot r \cdot n}{2} \quad (n = \text{Anzahl Dreiecke})$$

$$A_{Kreis} = \frac{U \cdot r}{2} = \frac{d \cdot \pi \cdot d}{2 \cdot 2} = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{(2r)^2 \cdot \pi}{4} = r^2 \cdot \pi$$



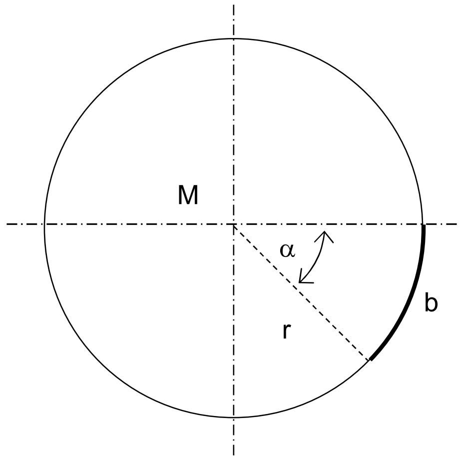
$$\boxed{A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = r^2 \cdot \pi}$$

11.3 Kreisteile

<u>Herleitung Kreisbogen</u>

$U \cong 360°$

$b = \frac{U \cdot \alpha}{360°}$



$$\boxed{b = \frac{d \cdot \pi \cdot \alpha}{360°} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360°} = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180°}}$$

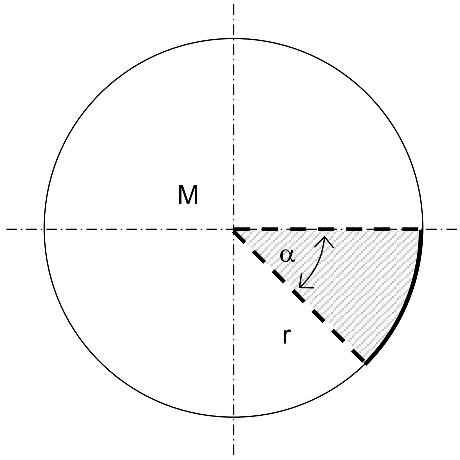
Zur Erinnerung: $\underbrace{\frac{b}{r}} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°}$

Bogenmass

<u>Herleitung Kreissektor (diagonal gestrichelt)</u>

$A_{Kreis} \cong 360°$

$A_{Sektor} = \frac{A_{Kreis} \cdot \alpha}{360°}$



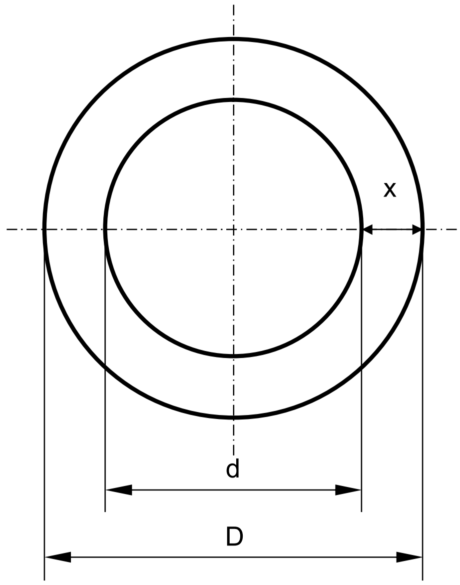
$$\boxed{A_{Sektor} = \frac{d^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{4 \cdot 360°} = \frac{(2 \cdot r)^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{4 \cdot 360°} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°}}$$

Beispiel 1

Der Erddurchmesser beträgt am Äquator 12'756,776 [km]. Man lege eine Schnur um den Äquator. Wenn man die Schnur nun um einen Meter verlängern würde, wie gross würde der radiale Abstand?

Geg: d = 12'756,776 [km], $U_{Verlängert} = U_{Äquator} + \Delta l$, Δl = 1 [m]

Ges: x = ?



Lösung:

$$U_{Verlängert} = U_{Äquator} + \Delta l$$

$$D \cdot \pi = d \cdot \pi + \Delta l \qquad (1)$$

$$D = d + 2x \qquad (2)$$

(2) in (1):

$$(d + 2x) \cdot \pi = d \cdot \pi + \Delta l$$

$$d + 2x = \frac{d \cdot \pi + \Delta l}{\pi} = d + \frac{\Delta l}{\pi}$$

$$2x = d + \frac{\Delta l}{\pi} - d = \frac{\Delta l}{\pi}$$

$$x = \underline{\frac{\Delta l}{2 \cdot \pi}}$$

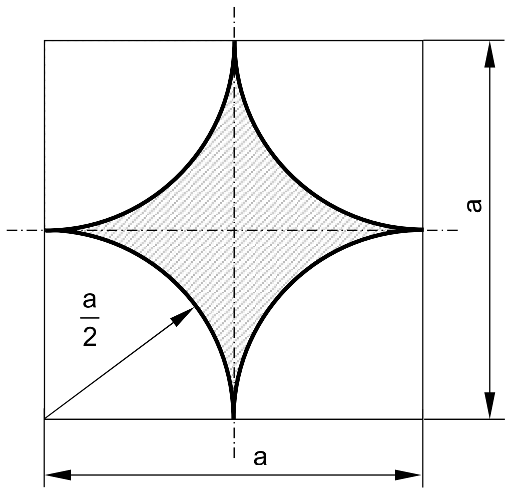
eingesetzt:

$$x = \frac{1}{2 \cdot \pi} = \underline{\underline{0{,}1592\ [m]}}$$

Beispiel 2

Berechnen Sie von der gegebenen Skizze: a) allgemeine Lösung für die schraffierte Fläche
b) schraffierte Fläche für a = 6 [cm]

Lösung:



a)

$$A = A_{Quadrat} - 4 \cdot A_{Viertelkreis} = A_{Quadrat} - A_{Kreis}$$

$$A_{Quadrat} = a^2$$

$$A_{Kreis} = \frac{a^2 \cdot \pi}{4}$$

Somit:

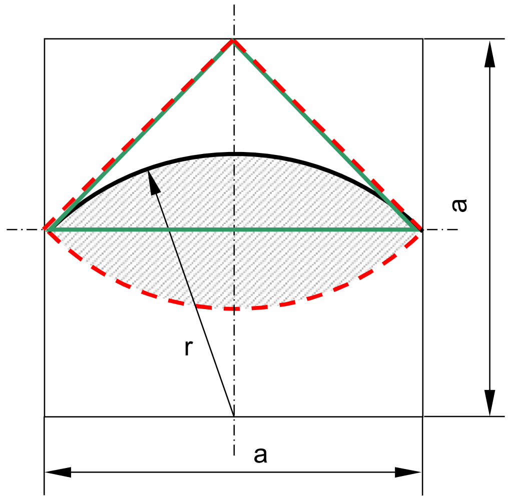
$$A = a^2 - \frac{a^2 \cdot \pi}{4} = \underline{\underline{a^2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}} = a^2 \cdot 0{,}2146$$

b)

$$A = 6^2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{7{,}73 \quad [cm^2]}}$$

Beispiel 3

Berechnen Sie von der gegebenen Skizze: a) allgemeine Lösung für die schraffierte Fläche
b) schraffierte Fläche für a = 6 [cm]



Lösung:

a)

$$A = \left(A_{\text{Viertelskreis}} - A_{\text{Dreieck}}\right) \cdot 2 \qquad (1)$$

$$A_{\text{Viertelskreis}} = \frac{r^2 \cdot \pi}{4} \qquad (2)$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{r^2}{2} \qquad (3)$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \underline{\frac{a}{\sqrt{2}}} \qquad (4)$$

(2) und (3) in (1):

$$A = \left(\frac{r^2 \cdot \pi}{4} - \frac{r^2}{2}\right) \cdot 2 = 2 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{4}\right) = \underline{r^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{2}\right)} \qquad (5)$$

(4) in (5):

$$A = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{2}\right) = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi - 2}{2}\right) = \underline{\underline{a^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)}} = a^2 \cdot 0{,}2854$$

oder

$$A = \left(A_{\text{Viertelskreis}} - A_{\text{Dreieck}}\right) \cdot 2 = A_{\text{Halbkreis}} - \underbrace{A_{\text{Quadrat}}}_{2 \cdot \text{rechtwinkliges Dreieck}}$$

$$A_{\text{Halbkreis}} = \underbrace{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}_{r^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\frac{a^2 \cdot \pi}{4}}$$

$$A_{\text{Quadrat}} = \underbrace{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}_{r^2} = \underline{\frac{a^2}{2}}$$ anschaulich klar: die Hälfte von gesamten Quadrat!

$$A = \frac{a^2 \cdot \pi}{4} - \frac{a^2}{2} = a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{a^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)}}$$

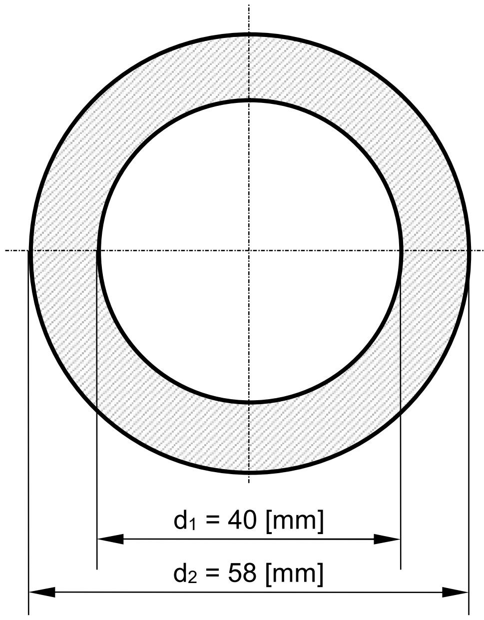
b)

$$A = 6^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{4}\right) = \underline{\underline{10{,}27 \quad [cm^2]}}$$

11.4 Übungen

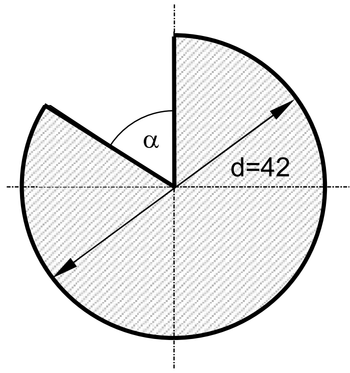
1. Berechnen Sie die Kreisringfläche!

   a) allgemeine Lösung
   b) für d_1 = 40 mm, d_2 = 58 mm



2. Berechnen Sie die Fläche und den Umfang nebenstehender Figur!

   a) allgemeine Lösung
   b) für α = 40° und d = 42 mm

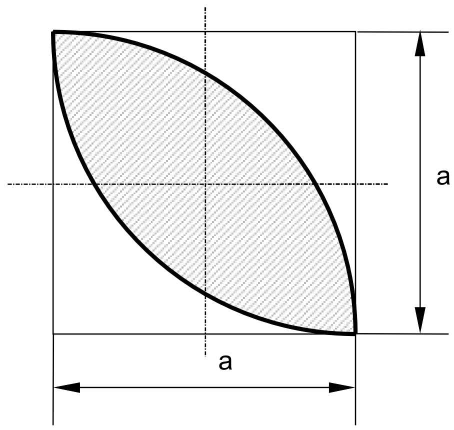


3. Berechnen Sie den Umfang eines Kreises aus dem Flächeninhalt!

   a) allgemeine Lösung
   b) für A = 46,8 cm^2

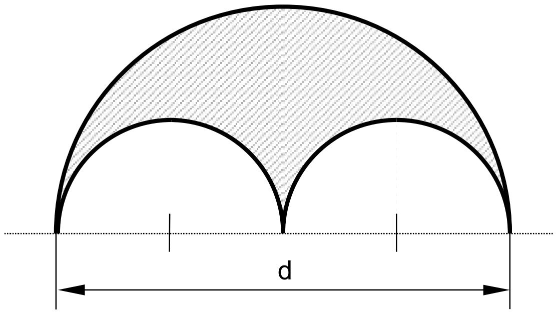
4. Berechnen Sie die Fläche und den Umfang nebenstehender schraffierter Figur!

   a) allgemeine Lösung
   b) für a = 5 cm



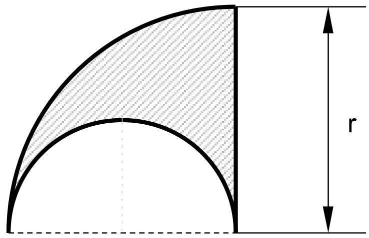
5. Berechnen Sie die schraffierte Fläche!

a) allgemeine Lösung
b) für d = 50 mm



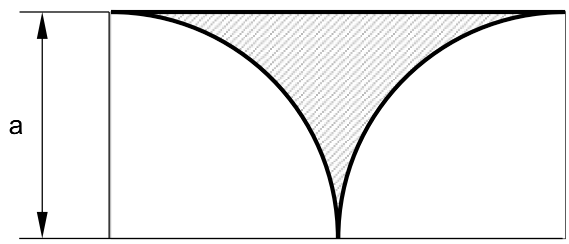
6. Berechnen Sie die schraffierte Fläche!

a) allgemeine Lösung
b) für r = 32 cm



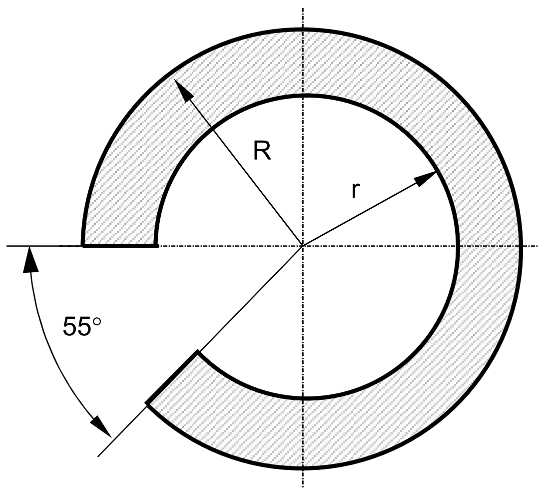
7. Berechnen Sie die schraffierte Fläche!

a) allgemeine Lösung
b) für a = 8,5 cm



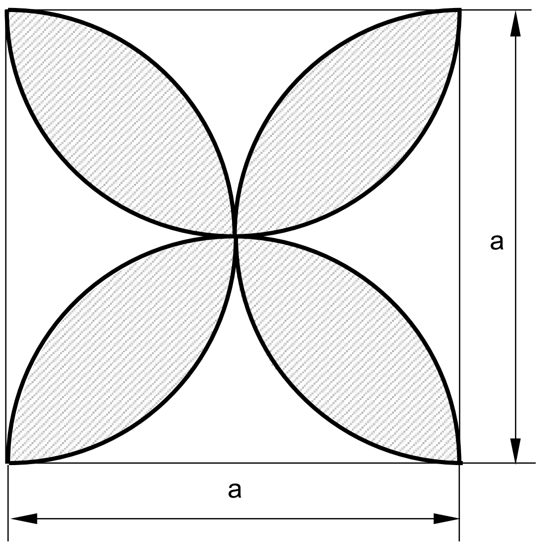
8. Berechnen Sie die Kreisringfläche!

a) allgemeine Lösung
b) mit R=62 mm und r=42 mm



9. Berechnen Sie die Fläche und den Umfang nebenstehender schraffierter Figur!

a) allgemeine Lösung
b) für a = 45 mm



10. Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche aus r.