

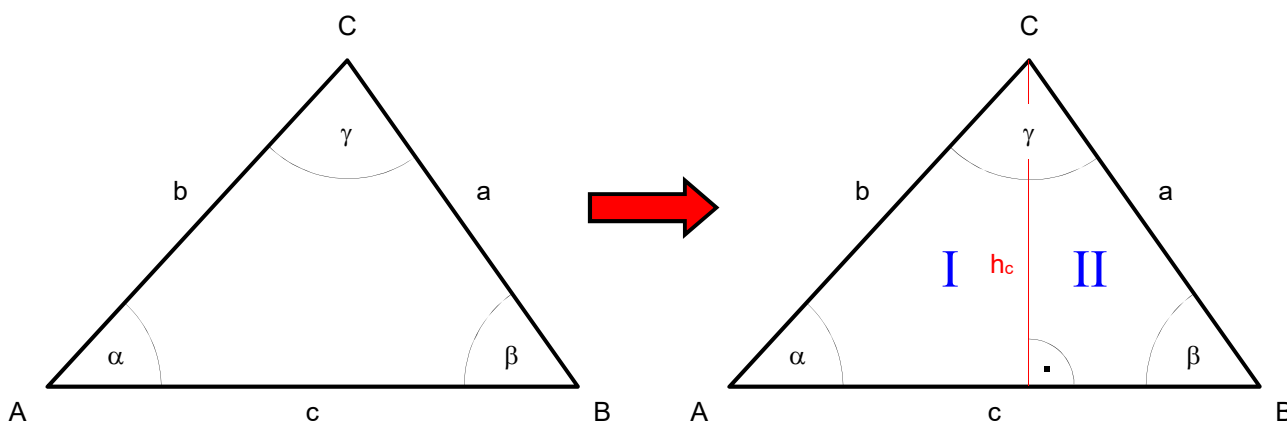
17 Schiefwinklige Dreiecke

17.1 Einleitung

Die Winkelfunktionen gelten nur für die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke. Schiefwinklige Dreiecke kann man mit diesen Funktionen nur berechnen, wenn das schiefwinklige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird.

17.2 Sinussatz

Sind **eine Seite und zwei Winkel** oder **zwei Seiten und ein Gegenwinkel** bekannt, so muss der Sinussatz angewendet werden!



$$\begin{aligned} \Delta I: \quad \sin \alpha &= \frac{h_c}{b} \rightarrow h_c = b \cdot \sin \alpha \\ \Delta II: \quad \sin \beta &= \frac{h_c}{a} \rightarrow h_c = a \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

somit:

$$\overset{\text{aus}}{\underbrace{h_c}} = \overset{\text{aus}}{\underbrace{h_c}}$$

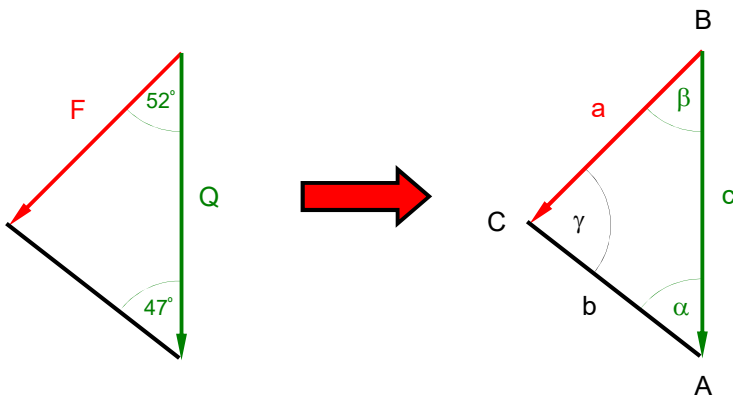
$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Daraus folgt der Sinussatz

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Beispiel

In einem Kräftdreieck gemäss nachfolgender Skizze soll die Kraft F berechnet werden, wenn die Kraft $Q = 800 \text{ N}$ ist.



Geg: $Q = 800 \text{ N}$, $\angle\alpha = 47^\circ$, $\angle\beta = 52^\circ$

Ges: $F = ?$

Lösung :

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad (1)$$

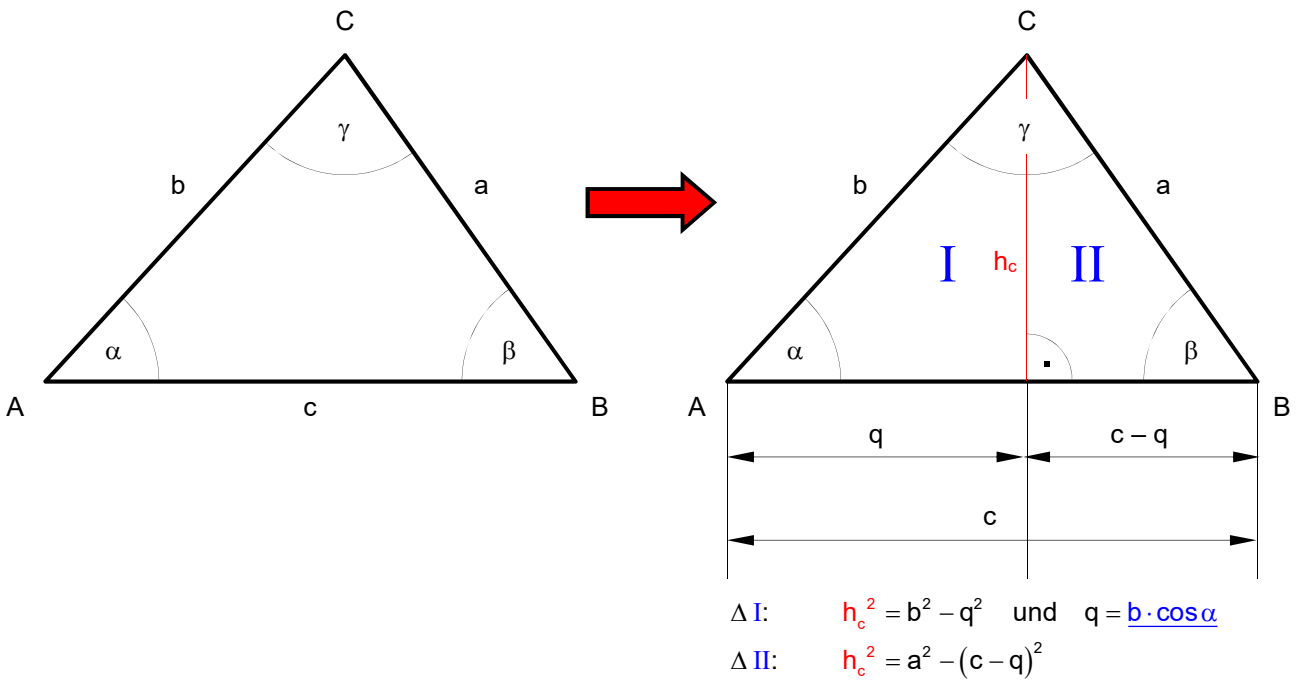
$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \quad (2)$$

somit:

$$F \cong a = c \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = 800 \text{ N} \cdot \frac{\sin 47^\circ}{\sin(180^\circ - 47^\circ - 52^\circ)} = \underline{\underline{592.38 \text{ N}}}$$

17.3 Kosinussatz

Sind **drei Seiten** oder **zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel** bekannt, so muss der Kosinussatz angewendet werden!



somit:

$$\overbrace{h_c^2}^{\text{aus } \Delta I} = \overbrace{h_c^2}^{\text{aus } \Delta II}$$

$$b^2 - q^2 = a^2 - (c - q)^2$$

$$b^2 - q^2 = a^2 - (c^2 - 2cq + q^2)$$

$$b^2 - q^2 = a^2 - c^2 + 2cq - q^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$$

$$q = b \cdot \cos \alpha$$

Daraus folgt der Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

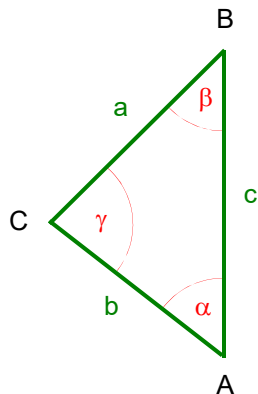
analog gilt:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Beispiel

In einem Dreieck sind: $a = 16.4 \text{ cm}$, $b = 6.5 \text{ cm}$, $c = 18 \text{ cm}$. Berechnen Sie die Winkel des Dreiecks!



Geg: $a = 16.4 \text{ cm}$, $b = 6.5 \text{ cm}$, $c = 18 \text{ cm}$

Ges: $\angle\alpha = ?$, $\angle\beta = ?$, $\angle\gamma = ?$

Lösung :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \rightarrow$$

$$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{6.5^2 \text{ cm}^2 + 18^2 \text{ cm}^2 - 16.4^2 \text{ cm}^2}{2 \cdot 6.5 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm}} = 0.42 \rightarrow \angle\alpha = \arccos 0.42 = \underline{\underline{65.43^\circ}}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \rightarrow$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2 \rightarrow$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{16.4^2 \text{ cm}^2 + 18^2 \text{ cm}^2 - 6.5^2 \text{ cm}^2}{2 \cdot 16.4 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm}} = 0.93 \rightarrow \angle\beta = \arccos 0.93 = \underline{\underline{21.13^\circ}}$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 65.43^\circ - 21.13^\circ = \underline{\underline{93.44^\circ}}$$

17.4 Übungen

1. Eine Kraft $F = 480 \text{ N}$ ist in zwei Komponenten zu zerlegen, deren Richtung mit der Richtung der gegebenen Kraft die Winkel $\alpha = 10^\circ 20'$ und $\beta = 36^\circ 50'$ bildet.
Wie gross sind die Beträge der Komponenten?
2. Zwei Punkte A und B am Ufer eines Flusses sind 45 m voneinander entfernt. Am anderen Ufer steht ein Baum C. Es werden folgende Winkel gemessen: $\angle \overline{CAB} = 72^\circ 20'$ und $\angle \overline{CBA} = 83^\circ 50'$.
Wie breit ist der Fluss?
3. Zwei Kräfte $F_1 = 390 \text{ N}$ und $F_2 = 140 \text{ N}$ wirken an einem Punkt unter dem Winkel $\alpha = 54^\circ 10'$.
Wie gross ist der Betrag der Resultierenden R, und welche Winkel bildet ihre Richtung mit der Richtung beider Kräfte?
4. Zwei Orte A und B liegen auf verschiedenen Seiten eines Sees. Zwei Strassen, die von den Orten A und B geradlinig ausgehen, treffen sich in C unter einem Winkel von $57^\circ 40'$.
Wie weit ist der Ort A von dem Ort B entfernt (Luftlinie), wenn die Entfernung von B bis C 5.4 km und die Entfernung von A bis C 8.4 km beträgt?
5. Zwei Personenkraftwagen A und B (A: 55 km/h ; B: 68 km/h) fahren gleichzeitig von einer Strassenkreuzung in verschiedene Richtungen geradlinig ab. Die Strassen bilden einen Winkel von $106^\circ 40'$.
Wie weit sind die beiden Personenkraftwagen nach 25 Minuten voneinander entfernt?