

23 Quadratische Gleichungen

23.1 Die rein quadratische Gleichung

Definition: Gleichungen von der Form:
 $ax^2 + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$)
 heissen *rein quadratische* Gleichungen. ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

Lösung: $ax^2 + b = 0$ | :a
 $x^2 + \frac{b}{a} = 0$
 $x^2 = -\frac{b}{a}$ | Sei $-\frac{b}{a} = c$
 $x^2 = c$
 $x_1 = \sqrt{c}$
 $x_2 = -\sqrt{c}$

Beispiel: $4x^2 - 25 = 0$
 $x^2 = \frac{25}{4}$
 $x_1 = \frac{5}{2}$; $x_2 = -\frac{5}{2}$

23.2 Die allgemeine quadratische Gleichung

Beispiel: $x^2 - 10x - 11 = 0$
 $x^2 - 10x = 11$
 $x^2 - 10x + 25 = 11 + 25$

$$(x - 5)^2 = 36$$

$$\sqrt{(x - 5)^2} = \pm\sqrt{36}$$

$$x - 5 = \pm 6$$

$$L = \{-1, 11\}$$

Das Glied ohne x kommt auf die rechte Seite.

Man will ein vollständiges Quadrat erhalten und bildet die quadratische Ergänzung.

Die quadratische Ergänzung wird auf beiden Seiten addiert.
 Sie ist positiv und gleich dem halben Faktor von x im Quadrat
 $(-10/2)^2 = 25$.

Umformung

Radizieren

Auflösen nach x; 2 Lösungen

Definition: Gleichungen von der Form: $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$
 $ax^2 + bx + c = 0$ heissen *quadratische* Gleichungen.

Allgemein: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Zuerst wird der Koeffizient von x^2 weggeschafft.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Das Glied ohne x kommt auf die rechte Seite.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Es folgt die Bildung der quadratischen Ergänzung.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Umformung

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Radizieren

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

Auflösen nach x

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Im Resultat kommt der Term $T = \sqrt{b^2 - 4ac}$ vor. Der Term $b^2 - 4ac$ kann positiv, gleich 0 oder negativ sein. Dieser Term wird *Diskriminante* genannt.

Ist die Diskriminante $D > 0$, dann hat die Wurzel zwei verschiedene Lösungen. Ist $D = 0$, so erhalten wir $x_1 = x_2 = -(b/2a)$. Ist $D < 0$, so muss aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel gezogen werden.

23.3 Übungen

1. $3x^2 = 48$

2. $\frac{2x^2}{18} = 576$

3. $\frac{45}{x} = \frac{x}{5}$

4. $\frac{9}{16} + 2x^2 = 3x^2 + \frac{1}{2}$

5. $x^2 + 14 - 9x = 0$

6. $x^2 - 6x - 7 = 0$

7. $3x^2 - 25x + 8 = 0$

8. $-3x^2 + 33x = 90$

9. $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} - 11 = 0$

10. $3 \cdot (10 - x) \cdot (2x - 15) = x$

11. $-7x^2 - 81x = 44$

12. $\frac{2}{x} - 2x = 3$