5 Gleichungen (1. Grades)

5.1 Einführung

Betrachtet man a und b (a, b $\in$ **Q**) und vergleicht sie miteinander, so gibt es 3 Möglichkeiten:

1. a > b — a ist grösser als b
2. a = b — a ist gleich gross wie b
3. a < b — a ist kleiner als b

Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so erhält man eine *Gleichung.*
Ist eine Variable in der Gleichung vorhanden, so spricht man von einer *Bestimmungsgleichung*. Soll die Bestimmungsgleichung nach der Variablen (z.B. x) aufgelöst werden, so müssen oft *Äquivalenzumformungen* vorgenommen werden.

Äquivalenzumformungen

Man spricht von einer *Äquivalenzumformung,* wenn eine Aussageform A in eine Aussageform B übergeht, ohne dass an den Lösungen (Erfüllungsmenge) etwas geändert wird (Anzahl, Wert).
Beispiele für äquivalente Umformungen:

- Addition von Termen auf beiden Seiten einer Gleichung
- Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit der gleichen Zahl verschieden von 0.
- Division durch einen Term verschieden von 0.

Achtung

Bei folgenden Umformungen einer Gleichung können Lösungen verlorengehen oder scheinbar Lösungen hinzukommen:

1. Wenn beide Seiten der Gleichung mit einem Term multipliziert oder dividiert werden, der die Variable enthält.
2. Wenn man auf beiden Seiten einen Term addiert oder subtrahiert, der die Variable im Nenner enthält.

Bei den obgenannten Umformungen ist ***deshalb stets die Probe zu machen*** *(durch Einsetzen aller erhaltenen Lösungen in die ursprüngliche Gleichung).*

Beispiel zu Nr. 1

$$\frac{2x+1}{x+5}-\frac{2x-3}{x-5}=\frac{5\cdot(1-3x)}{x^2-25} \quad (\text{urspr. Gleichung})$$

$$(2x+1)\cdot(x-5)-(2x-3)\cdot(x+5)=5\cdot(1-3x)$$

$$2x^2-10x+x-5-(2x^2+10x-3x-15)=5-15x$$

$$2x^2-10x+x-5-2x^2-10x+3x+15=5-15x$$

$$-16x+10=5-15x \quad \rightarrow \quad x=\underline{5}$$

Probe:

x = 5 ist eine gültige Lösung der umgeformten Gleichung. Beim Einsetzen der Lösungsmenge in die ursprüngliche Gleichung, kommt es zur Division mit Null. Somit ist x = 5 eine scheinbare Lösung. Die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung ist leer!

$L = \underline{\underline{\{\ \}}}$

Beispiel zu Nr. 2

$$3x=15 \quad (\text{urspr. Gleichung})$$

$$3x+\frac{1}{x-5}=15+\frac{1}{x-5}$$

Probe:

x = 5 ist eine gültige Lösung der ursprünglichen Gleichung. Nach der Erweiterung ist x = 5 keine gültige Lösung mehr! Somit ist eine Lösung verlorengegangen!

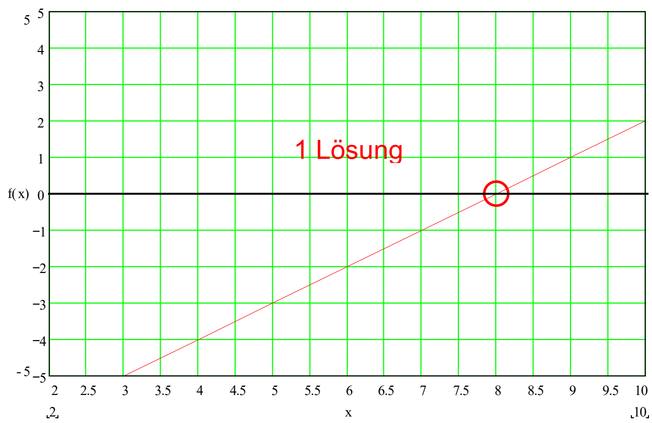
Grad der Gleichung (grafisch dargestellt)

Gleichungen werden unterschieden nach dem Grad der Unbekannten. Will man eine Bestimmungsgleichung grafisch lösen, so muss man sie zunächst in eine Funktionsgleichung umwandeln, die man grafisch darstellen kann. Das Umwandeln der Bestimmungsgleichung in eine Funktionsgleichung geschieht in zwei Stufen:

Beispiel:	4x – 12 = x – 10	Bestimmungsgleichung
1. alle Glieder der Gleichung auf eine Seite bringen;	4x – x – 12 + 10 = 0	
2. an Stelle der Null die Variable y setzen	3x – 2 = 0	
Die erhaltene Funktionsgleichung lässt sich zeichnen.	3x – 2 = y	Funktionsgleichung

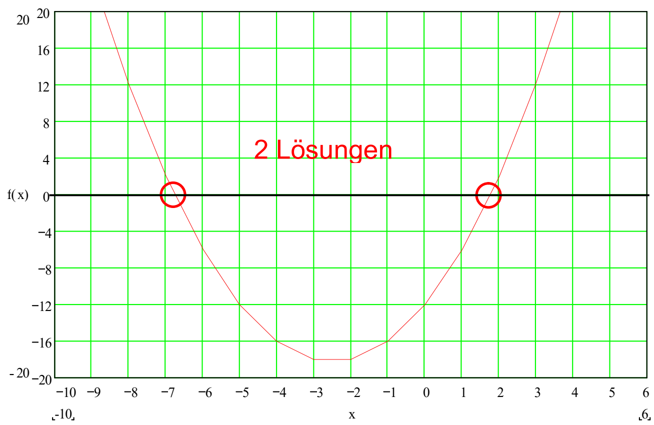
Gleichungen 1. Grades mit 1 Unbekannten
(Lineare Gleichungen)

z.B. $x + 7 = 15$



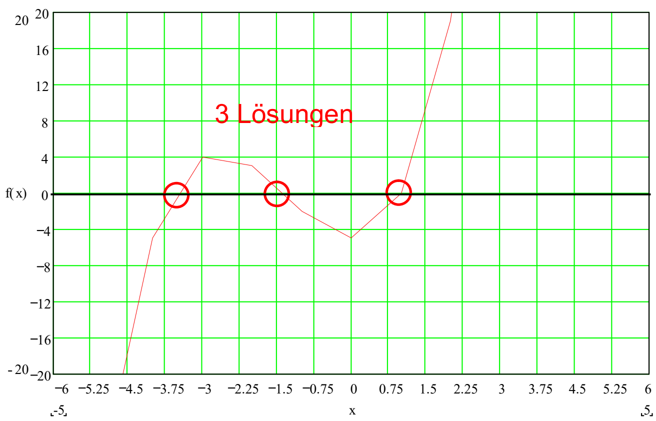
Gleichungen 2. Grades mit 1 Unbekannten
(Quadratische Gleichungen)

z.B. $x^2 + 5x - 12 = 0$



Gleichungen 3. Grades mit 1 Unbekannten
(Kubische Gleichungen)

z.B. $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$



5.2 Zahlengleichungen

Um Zahlengleichungen zu lösen, muss man sie durch *äquivalentes* Umformen auf die einfachste Form (x = ...) bringen. Zu diesem Zweck werden die Terme auf beiden Seiten der Gleichung so lange verändert, bis die einfachste Form erreicht ist. Auf welche Weise das geschieht, sollen die nun folgenden Beispiele zeigen.

Einfache Gleichung:	$\mathbf{5x + 3 = 18 + 2x}$

Lösung:

1. Glieder ordnen:
   d.h. x-Glieder auf die linke Seite, alle anderen Glieder auf die rechte Seite bringen.
   $5x - 2x + 3 = 18$
   $5x - 2x = 18 - 3$
2. zusammenfassen $3x = 15$
3. Unbekannte isolieren $\underline{\underline{x = 5}}$
4. Probe:
   Der Wert der Unbekannten wird in der ursprünglichen Gleichung eingesetzt. Ist die Aussage wahr, so ist der Wert der Unbekannten die Lösung der Gleichung.
   $5 \cdot 5 + 3 = 18 + 2 \cdot 5$
   $25 + 3 = 18 + 10$
   $28 = 28$

Gleichungen mit Klammern:	$\mathbf{15(x - 3) + 12(x + 1) = 21}$

Lösung:

1. Klammer auflösen $15x - 45 + 12x + 12 = 21$
2. Glieder ordnen $15x + 12x = 21 + 45 - 12$
3. zusammenfassen $27x = 54$
4. Unbekannte isolieren $\underline{\underline{x = 2}}$
5. Probe:
   Der Wert der Unbekannten wird in der ursprünglichen Gleichung eingesetzt. Ist die Aussage wahr, so ist der Wert der Unbekannten die Lösung der Gleichung.
   $15(2 - 3) + 12(2 + 1) = 21$
   $-15 + 36 = 21$
   $21 = 21$

Gleichungen mit Brüchen:	$\mathbf{\frac{2x-6}{3}-\frac{2x-4}{5}=\frac{1}{15}}$

Lösung:

1. Brüche wegschaffen
   $$\frac{5(2x-6)}{15}-\frac{3(2x-4)}{15}=\frac{1}{15}$$
   $$5(2x-6)-3(2x-4)=1$$
2. Klammer auflösen
   $$10x-30-6x+12=1$$
3. Glieder ordnen
   $$10x-6x=1+30-12$$
4. zusammenfassen
   $$4x=19$$
5. Unbekannte isolieren
   $$x=\frac{19}{4}$$
6. Probe:
   Der Wert der Unbekannten wird in der ursprünglichen Gleichung eingesetzt. Ist die Aussage wahr, so ist der Wert der Unbekannten die Lösung der Gleichung.
   $$\frac{2\frac{19}{4}-6}{3}-\frac{2\frac{19}{4}-4}{5}=\frac{1}{15}$$
   $$\frac{9.5-6}{3}-\frac{9.5-4}{5}=\frac{1}{15}$$
   $$5\cdot 3.5-3\cdot 5.5=1$$
   $$17.5-16.5=1$$
   $$1=1$$

Gleichungen mit Wurzeln:	$\sqrt[3]{\mathbf{\frac{x-2}{4}}}=\mathbf{2}$

Lösung:

1. Wurzel wegschaffen
   $$\frac{x-2}{4}=2^3=8$$
2. Bruch wegschaffen
   $$x-2=32$$
3. Unbekannte isolieren
   $$\underline{\underline{x=34}}$$
4. Probe:
   Der Wert der Unbekannten wird in der ursprünglichen Gleichung eingesetzt. Ist die Aussage wahr, so ist der Wert der Unbekannten die Lösung der Gleichung.
   $$\sqrt[3]{\frac{34-2}{4}}=\sqrt[3]{\frac{32}{4}}=\sqrt[3]{8}=2$$

5.3 Übungen zu Zahlengleichungen

Alle Gleichungen sind nach der Variablen x aufzulösen.

1. $\frac{x-2}{x-1}=\frac{x+1}{x+3}$

2. $4x-[3x-(2x+1)-9]=1$

3. $\frac{x+a}{a}-b=\frac{a+b}{a}-x$

4. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x-3}$

5. $(11x-5a)-(5b+3x)=3x+5c$

6. $\frac{x+1}{3}-\frac{3x-1}{5}=x-2$

7. $\frac{p-rx}{px-p}=\frac{2x}{x-1}$

8. $\frac{8x-3}{2x-1}-\frac{3x+4}{x+1}=1$

9. $\frac{b-x}{a+x}+\frac{c-x}{a-x}=\frac{a\cdot(c-2x)}{a^2-x^2}$

10. $(a-x)^2-(b-x)^2=b^2-a^2$

11. $x+bx-a+1=b(a-1)$

12. $1+\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{a}{x}$

13. $\frac{a+x}{a+b}+\frac{a-x}{a-b}=2$

14. $\frac{a[b-c(1+x)]}{c(2+x)}=0$

15. $\frac{4}{x-3}-\frac{3}{x-5}=\frac{1}{x}$

16. $\frac{x+a}{a}-b=\frac{a+b}{a}-x$

17. $\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}=\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}$

18. $\frac{x}{2}-\frac{x-2}{3}=1$

19. $\frac{x+b}{x-b}=\frac{a-b}{a+b}$

20. $\frac{a(x-b)}{b}+b=\frac{b(x-a)}{a}+a$

21. $40-(x+1)(2+x)=4x-(2+x)(x-1)$

22. $\frac{4}{x+1}=\frac{7}{4x+4}+\frac{3}{2x-2}$

5.4 Formeln umwandeln

Berechnen Sie die Lösungsmenge für die jeweilige Lösungsvariable:

1. $P = \frac{F \cdot \tau \cdot r \cdot n}{75 \cdot 30}$ r = ?

2. $v = \frac{s}{t}$ t = ?

3. $\rho = \frac{m}{V}$ m = ?

4. $\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$ z_1 = ?

5. $A = \left(R^2 - r^2\right)\pi$ r = ?

6. $W = \frac{1}{2}mv^2$ v = ?

7. $V = \left(D^2 - d^2\right)\frac{\pi}{4} \cdot h$ D = ?

8. $F = f\frac{m_1 m_2}{r^2}$ m_2 = ?

9. $V = \frac{4r^3\pi}{3}$ r = ?

10. $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ R_4 = ?

11. $s = \frac{a + b + c}{2}$ c = ?

12. $A = \frac{c \cdot h}{2}$ h = ?

13. $V = 1 + \frac{R_1}{R_2}$ R_2 = ?

14. $k = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$ a = ?

15. $\rho = \rho_w \cdot \frac{F_L}{F_L - F_W}$ $F_W = ?$

16. $v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$ $\rho = ?$

17. $R_W = R_K(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$ $\Delta\vartheta = ?$

18. $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$ $h = ?$

19. $R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ $R_2 = ?$

20. $\frac{u-1}{u+r-s} = \frac{1-u}{u-r+s} + 2$ $u = ?$

21. $\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R}}$ $R = ?$

22. $C = \frac{4\pi k r_1 r_2}{r_2 - r_1}$ $r_1 = ?$

23. $U = r\left(2 + \frac{\pi}{180} \cdot \alpha\right)$ $\alpha = ?$

24. $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ $C = ?$

25. $s = s_0 + \frac{v + v_0}{2} \cdot t$ $v_0 = ?$

26. $C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ $C_2 = ?$

27. $V = \frac{g \cdot R}{1 + g \cdot R}$ $g = ?$

28. $A = \frac{D-d}{2} \cdot l$ $d = ?$