7 Radizieren

7.1 Einführung

Unter der n–ten Wurzel aus a versteht man eine Zahl b, die mit n potenziert a ergibt.

$\sqrt[n]{a} = b \;\rightarrow\; b^n = a$ a: Radikant ($a \geq 0$), n: Wurzelexponent

Mehrdeutigkeit von Wurzeln

Ist $a^2 = b$, so ist auch $(-a)^2 = b$. Es gibt also zwei Zahlen, die ins Quadrat erhoben, b ergeben. Man merke sich aber, bei der Quadratwurzel aus einer positiven Zahl ist das Ergebnis als positive Zahl definiert.

$\sqrt{9} = +3$

Sollen die positive und die negative Lösung gelten, so muss dies folgendermassen dargestellt werden:

$a = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\sqrt{9}\right)^2 = 3^2 = 9 \\ \left(\sqrt{25}\right)^2 = 5^2 = 25 \end{array}\right\}$$

Wurzelziehen und Quadrieren heben sich auf.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 \\ \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3 \end{array}\right\}$$

Die Umkehrung gilt jedoch nicht immer!

Das Ergebnis der Quadratwurzel ist als positive Zahl definiert!

Radizieren mit dem Taschenrechner

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Beweis:

Annahme: $\underline{x = a^{\frac{1}{2}}}$

quadrieren: $x^2 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{2}{2}} = a$

radizieren: $\underline{x = \sqrt{a}}$

Somit: $\underline{\underline{x = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}}}$

Beispiele

$\sqrt[5]{80} = 80^{\frac{1}{5}} = 80^{0,2} = \underline{\underline{2,40}}$

$\sqrt[3]{182} = 182^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{5,67}}$

$\sqrt[3]{24} = 24^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{2,88}}$

$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{1,26}}$

7.2 Addition und Subtraktion von Wurzeln

Bei der Addition und der Subtraktion von Wurzeln ist zu berücksichtigen, dass nur Wurzeln mit gleichen Exponenten und Radikanten zu einem Glied zusammengefasst werden können.

$$\boxed{5\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{b} + 7\sqrt[3]{a} = 12\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{b}}$$

7.3 Multiplikation und Division von Wurzeln

1. $\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}}$ z.B. $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{8} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(8^{\frac{1}{3}}\right) = (27 \cdot 8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27 \cdot 8} = \underline{\underline{6}}$

2. $\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (b > 0)}$ z.B. $\frac{\sqrt[2]{16}}{\sqrt[2]{4}} = \sqrt[2]{\frac{16}{4}} = \underline{\underline{2}}$

7.4 Potenzen einer Wurzel und Radizieren von Potenzen

3. $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^x = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^x = \left(a^x\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}}$ z.B. $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2 = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(16^2\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16^2} = 16^{\frac{2}{4}} = 16^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{4}}$

4. $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}}$ z.B. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3]{64^{\frac{1}{2}}} = \left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3\cdot 2}} = \sqrt[3\cdot 2]{64} = \underline{\underline{2}}$

Achtung

Im Gegensatz zu $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ist $\underline{\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$!!!

Zahlenbeispiel: $\sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} = 6 \cdot 8 = \underline{\underline{48}}$

$\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = \underline{\underline{10}}$

$\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = \underline{\underline{14}}$

Somit: $\sqrt{36 + 64} \neq \sqrt{36} + \sqrt{64}$

Merke: **Wurzeln aus Summen ziehen nur die ....!!!**

Beispiele:

1. $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{2}{3\cdot 2}} = x^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{x}}}$

2. $\sqrt[3]{x^3 \cdot \sqrt{x^3}} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{9}{2}}} = x^{\frac{9}{2\cdot 3}} = x^{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{x^3}}}$

3. $\sqrt[5]{28} = 28^{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{1{,}9473}}$

4. $\sqrt[3]{5{,}2^{2,5}} = 5{,}2^{\frac{2,5}{3}} = \underline{\underline{3{,}9507}}$

5. $2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{a} - \sqrt{3} - 5 \cdot \sqrt[3]{a} = \underline{\underline{\sqrt{3} + \sqrt{a} - 5 \cdot \sqrt[3]{a}}}$

6. $\sqrt[2]{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = \underline{\underline{a^3}}$

7. $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$

8. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}} = \underline{\underline{\sqrt[6]{a^5}}}$

9. $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{3}{3}} = \underline{\underline{x}}$

10. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{2}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{2\cdot 3}} = 2^{\frac{1}{6}} = \underline{\underline{\sqrt[6]{2}}}$

11. $\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{6^2} = 6^{\frac{2}{4}} = 6^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$

12. $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{4^2} = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$

13. $B = \dfrac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{\underbrace{76{,}5^2 - 67{,}5^2}_{\text{Binom: } a^2-b^2=(a+b)(a-b)}}} = \sqrt{\dfrac{12 \cdot 27}{(76{,}5+67{,}5)\cdot(76{,}5-67{,}5)}} = \sqrt{\dfrac{\overset{1}{\cancel{12}} \cdot \overset{3}{\cancel{27}}}{\underset{12}{\cancel{144}} \cdot \underset{1}{\cancel{9}}}} = \sqrt{\dfrac{3}{12}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

7.5 Übungen

1. $\sqrt[3m]{(a+b)^{2m}} \cdot \sqrt[3]{(a+b)}$

2. $\sqrt[5]{\sqrt[2]{x^5}} + \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^6}}$

3. $\dfrac{\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{\sqrt[4]{a^4 - b^4}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}}{a}$

4. $\sqrt[9]{\dfrac{(x+y)^6}{z^5}} \cdot \sqrt[9]{\dfrac{(x+y)^3}{z^4}}$

5. $\sqrt[3]{\sqrt{x^2}}$

6. $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^2}}$

7. $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[6]{x}\right)^3$

8. $\sqrt{\left(\dfrac{n^4 \cdot x^3}{nx}\right)^2}$

Mit Taschenrechner:

9. $\sqrt[5]{500}$

10. $\sqrt[2,5]{3^{\frac{2}{3}}}$

11. $\sqrt[5]{7}$

12. $\sqrt[3,256789]{1^{2,56783219}}$

13. Berechnen und vereinfachen Sie so weit als möglich:

$$E=\frac{\left(\sqrt[4]{u}\right)^{3}\cdot s^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{s^{-1}}}{\left(\frac{1}{\sqrt[12]{u}}\right)^{5}\cdot s^{-\frac{5}{6}}\cdot\left(\sqrt[3]{u}\right)^{2}}$$

14. Vereinfachen Sie den Ausdruck E und bestimmen Sie nachher seinen Wert für $a=\frac{2}{7}$ und $b=31{,}5$:

$$E=\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

15. Berechnen und vereinfachen Sie so weit als möglich:

$$E=\frac{\sqrt[12]{v^{5}}\cdot t^{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{t^{-1}}}{v^{-\frac{3}{4}}\cdot t^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{v^{2}}}$$

16. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck so weit als möglich:

$$5a\cdot\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}-2\cdot\sqrt{a^{3}\cdot\sqrt[4]{a^{3}}}+a\cdot\sqrt[4]{a^{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^{3}}}}$$

17. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck so weit als möglich:

$$a^{4}\cdot\left(1-\frac{2}{a}-\frac{2}{a^{2}}\right)^{2}-a^{4}\cdot\left(1-\frac{2}{a^{2}}\right)^{2}$$

18. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck so weit als möglich:

$$A=\left(1+\frac{2}{a}\right)^{2}\cdot\left\{\frac{1}{a}-\left(\frac{a}{2}-1\right)^{-1}\right\}^{-2}$$

7.6 Übungen Potenzieren und Radizieren

1. $(3ax^3)^7$

2. $-a^4 \cdot (-a^6)$

3. $(2a^2b)^3 \cdot (3ab^2)^3$

4. $100 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^{-2}$

5. $-\left[3 \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)^{-2}\right]^3$

6. $\sqrt[3]{27^4}$

7. $\sqrt[x]{a^x}$

8. $(\sqrt[3]{x})^2 \cdot (\sqrt[6]{x})^3$

9. $\frac{\sqrt{98}}{49 \cdot \sqrt{2}}$

10. $\sqrt{\left(\frac{n^4x^3}{nx}\right)^2}$

11. $(\sqrt[4]{49a})^2 \div 14$

12. $\left[(n^2 \cdot x^3)^2\right]^{-2}$