4 Zerlegen in Faktoren (Ausklammern)

4.1 Einführung

Haben alle Summanden einer algebraischen Summe einen gemeinsamen Faktor, so kann man diesen gemeinsamen Faktor ausklammern. Die **Summe** wird dadurch in ein **Produkt** umgewandelt. **Tipp:** Kontrolle durch zurückmultiplizieren (Distributivgesetz)!

x^2+xy	$=$	$x(x+y)$
$\downarrow$		$\downarrow$
Summe		Produkt

4.2 Ausklammern eines gemeinsamen Faktors aus allen Gliedern zugleich

$15ab-21bc+9b$	$=$	$3b(5a-7c+3)$
Polynom mit 3 Gliedern		Produkt

Beispiele

1. $2xy+3yz-y=?$ $\quad \underline{\underline{y(2x+3z-1)}}$

2. $11\cdot25+15\cdot25-2\cdot25=?$ $\quad 25(11+15-2)=25\cdot24=\underline{\underline{600}}$

3. $\frac{8x}{3y}+\frac{2}{y}-\frac{6b}{y}=?$ $\quad \underline{\underline{\frac{2}{y}\left(\frac{4x}{3}+1-3b\right)}}$

4. $(a+b)n+(a+b)m=?$ $\quad \underline{\underline{(a+b)(n+m)}}$

5. $x(a-b)-(a-b)y=?$ $\quad \underline{\underline{(a-b)(x-y)}}$

6. $(b-c)z+b-c=?$ $\quad \underline{\underline{(b-c)(z+1)}}$

4.3 Ausklammern eines gemeinsamen Faktors aus Gruppen von zwei oder mehreren Gliedern (Mehrmaliges Ausklammern)

$$\underbrace{21ax - 6x}_{3x(7a-2)}\underbrace{-35a + 10}_{-5(7a-2)} = 3x(7a-2) - 5(7a-2) = (7a-2)(3x-5)$$

Merke: Die Anzahl Glieder muss eine gerade Zahl ist!

Kontrolle: $(7a-2)(3x-5) = 21ax - 35a - 6x + 10$

Beispiele

1. $ac + bc - ad - bd = ?$

   $c(a+b) - d(a+b) = \underline{\underline{(a+b)(c-d)}}$

2. $ab + 5b - ac - 5c = ?$

   $b(a+5) - c(a+5) = \underline{\underline{(a+5)(b-c)}}$

3. $20ab + 4b - 5a - 1 = ?$

   $4b(5a+1) - 1(5a+1) = \underline{\underline{(5a+1)(4b-1)}}$

4. $ac - cx + a - x = ?$

   $c(a-x) + 1(a-x) = \underline{\underline{(a-x)(c+1)}}$

5. $6bd + 2bn + 3cd + cn = ?$

   $2b(3d+n) + c(3d+n) = \underline{\underline{(3d+n)(2b+c)}}$

6. $(5a-b)(x+y) - (x+y)(3a+b) = ?$

   $(x+y)[(5a-b) - (3a+b)] = (x+y)\left[\overbrace{5a - b - 3a - b}^{2a-2b}\right] = \underline{\underline{2(x+y)(a-b)}}$

7. $15mp - 5mq + 10mr - 3p + q - 2r = ?$

   $5m(3p - q + 2r) - 1(3p - q + 2r) = \underline{\underline{(3p - q + 2r)(5m-1)}}$

4.4 Faktorzerlegung aus der Differenz zweier Quadrate (Binom)

$$\underbrace{a^2}_{\substack{\text{Quadrat}\\(\text{Basis } a)}} - \underbrace{b^2}_{\substack{\text{Quadrat}\\(\text{Basis } b)}} = (a+b)(a-b)$$

↓	↓
Differenz	Produkt

Man nimmt die Basen der beiden Quadrate und bildet daraus das **Produkt aus Summe und Differenz**.

Kontrolle: $(a+b)(a-b) = a^2 \cancel{-ab} \cancel{+ab} - b^2 = \underline{\underline{a^2 - b^2}}$

Beispiele

1. $100 - c^2 = ?$

$(10+c)(10-c)$

2. $9a^2 - 1 = ?$

$\underline{\underline{(3a+1)(3a-1)}}$

3. $4m^4 - 9n^4 = ?$

$\underline{\underline{(2m^2+3n^2)(2m^2-3n^2)}}$

4. $a^4 - b^4 = ?$

$(a^2+b^2)(a^2-b^2) = \underline{\underline{(a^2+b^2)(a-b)(a+b)}}$

5. $\overbrace{(4x+2y)}^{\circ^2}{}^2 - \overbrace{9y^2}^{\square^2} = ?$

$\left(\underbrace{4x+2y}_{\circ} + \underbrace{3y}_{\square}\right)\left(\underbrace{4x+2y}_{\circ} - \underbrace{3y}_{\square}\right) = \underline{\underline{(4x+5y)(4x-y)}}$

6. $\overbrace{(a-b)^2}^{\circ^2} - \overbrace{(a-1)^2}^{\square^2} = ?$

$\left[\underbrace{(a-b)}_{\circ} + \underbrace{(a-1)}_{\square}\right]\left[\underbrace{(a-b)}_{\circ} - \underbrace{(a-1)}_{\square}\right] = (a-b+a-1)(a-b-a+1) = \underline{\underline{(2a-b-1)(-b+1)}}$

4.5 Rückbildung zum Quadrat eines Binoms

$$\underbrace{4x^2}_{\substack{\text{Quadrat}\\(\text{Basis } 2x)}} - \underbrace{28x}_{\substack{\text{doppeltes Produkt}\\\text{der beiden Basen}\\2\cdot(2x\cdot 7)}} + \underbrace{49}_{\substack{\text{Quadrat}\\(\text{Basis } 7)}} = (2x-7)^2$$

$\downarrow$ Summe $\qquad\qquad$ $\downarrow$ Produkt

Merke: Die Anzahl Glieder ist drei (Trinome).

Kontrolle: $(2x-7)(2x-7) = 4x^2 - 14x - 14x + 49 = \underline{\underline{4x^2 - 28x + 49}}$

Beispiele

1. $x^2 + 10x + 25 = ?$

$\underline{\underline{(x+5)^2}}$

2. $n^2 - 2n + 1 = ?$

$\underline{\underline{(n-1)^2}}$

3. $9x^2 + 6x + 1 = ?$

$\underline{\underline{(3x+1)^2}}$

4. $50a^2 - 60ab + 18b^2 = ?$ **Achtung:** Zuerst gemeinsamen Faktor ausklammern!

$2\left(25a^2 - 30ab + 9b^2\right) = \underline{\underline{2(5a-3b)^2}}$

4.6 Rückbildung in zwei ungleiche Binome, wenn der Faktor vor dem Quadrat 1 ist

$1x^2$	$+$	$7x$	$+$	12	$=$	$(x+3)(x+4)$
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		
Quadrat mit Faktor 1		$(3)+(4)$ Summe = 7		$(3)\cdot(4)$ Produkt = 12		

Merke: Die Anzahl Glieder ist 3 (Trinome) und der Faktor vor dem quadratischen Term ist 1!

Kontrolle: $(x+3)(x+4) = x^2 + 4x + 3x + 12 = \underline{\underline{x^2 + 7x + 12}}$

Beispiele

1. $x^2 - 7x + 12 = ?$

$\underline{\underline{(x-3)(x-4)}}$

2. $y^2 - 17y + 60 = ?$

$\underline{\underline{(y-5)(y-12)}}$

3. $x^2 - 6x + 5 = ?$

$\underline{\underline{(x-1)(x-5)}}$

4. $d^2 + 8d + 15 = ?$

$\underline{\underline{(d+3)(d+5)}}$

5. $a^2 - 11a - 26 = ?$

$\underline{\underline{(a+2)(a-13)}}$

6. $3x^2 + 6x - 45 = ?$ **Achtung:** Zuerst gemeinsamen Faktor ausklammern!

$3(x^2 + 2x - 15) = \underline{\underline{3(x-3)(x+5)}}$

4.7 Rückbildung in zwei ungleiche Binome, wenn der Faktor vor dem Quadrat ≠1 ist

Wenn der Faktor vor dem Quadrat **ungleich 1** ist, können **geeignete** Trinome mit geschicktem Probieren erraten werden. Systematisch können solche Trinome mit Hilfe der quadratischen Gleichung faktorisiert werden. Das Lösen von quadratischen Gleichungen wird in einem späteren Kapitel vorgestellt.

$$10x^2 \quad + \quad 19x \quad + \quad 6 \quad = \quad (2x+3)(5x+2)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$2x \cdot 5x \qquad\qquad\qquad 3 \cdot 2$$

Achtung: Reihenfolge beachten

$$5x \cdot 3 = 15x$$

$$2x \cdot 2 = 4x$$

$$\text{Summe} = 19x$$

Grundlegendes Vorgehen:

1. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, wie Sie zwei ganzzahlige Zahlen multiplizieren können, um den Faktor vor der quadratischen Variable zu erhalten (10).
2. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, wie Sie zwei Zahlen ganzzahlige multiplizieren können, um den konstanten Term zu erhalten (6).
3. Bestimmen Sie die Summe des mittleren Terms analog dem obigen Schema. Falls die Summe mit dem mittleren Term übereinstimmt, haben Sie die korrekten Faktoren gefunden. Falls nicht probieren Sie eine neue Kombination aus.
   Achtung: $2x \cdot 5x$ mit $3 \cdot 2$ liefert ein anderes Ergebnis als $2x \cdot 5x$ mit $2 \cdot 3$. Dies müssen Sie beim Ausprobieren einer neuen Kombination berücksichtigen. Hier der Beweis:
   $$\underbrace{(2x+3)(5x+2)}_{10x^2+19x+6} \neq \underbrace{(2x+2)(5x+3)}_{10x^2+16x+6}$$
4. Ordnen Sie Ihre Auswahl als Binome analog dem obigen Schema an und machen Sie die Kontrolle durch Zurückmultiplizieren.

Beispiele

1. $18a^2 + 39a + 20 = ?$

$$\underline{\underline{(3a+4)(6a+5)}}$$

2. $12x^2 + 44x + 40 = ?$

$$4(3x^2+11x+10) = \underline{\underline{4(3x+5)(x+2)}}$$

3. $5u^2 - 15u + 10 = ?$

$$5(u^2-3u+2) = \underline{\underline{5(u-2)(u-1)}}$$

4.8 Rückbildung von Summen und Differenzen

a. gleichhoher ungerader Potenzen

Differenz:

$$\left(a^3-b^3\right)=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$
$$\left(a^5-b^5\right)=(a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)$$
$$\left(a^7-b^7\right)=(a-b)\left(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6\right)$$

usw.

Summe:

$$\left(a^3+b^3\right)=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$
$$\left(a^5+b^5\right)=(a+b)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)$$
$$\left(a^7+b^7\right)=(a+b)\left(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6\right)$$

usw.

b. gleichhoher gerader Potenzen

Differenz:
→ kann zerlegt werden nach Regel «Differenz zweier Quadrate»

$$\left(a^2-b^2\right)=(a-b)(a+b)$$
$$\left(a^4-b^4\right)=\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)=(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)$$

usw.

→ oder nach der Regel unter Punkt a) (siehe oben)

$$\left(a^2-b^2\right)=(a-b)(a+b)$$
$$\left(a^4-b^4\right)=(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)$$
$$\left(a^6-b^6\right)=(a-b)\left(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5\right)$$

Summe:

$$\left.\begin{array}{l}\left(a^2+b^2\right)=\\ \left(a^4+b^4\right)=\\ \text{usw.}\quad=\end{array}\right\}\text{kann nicht faktorisiert werden!}$$

Beispiele:

1. $\left(x^3-1\right)=?$

$$\left(\underbrace{x^3}_{a^3}-\underbrace{1^3}_{b^3}\right)=\left(\underbrace{x}_{a}-\underbrace{1}_{b}\right)\left(\underbrace{x^2}_{a^2}+\underbrace{x}_{ab}+\underbrace{1}_{b^2}\right)=\underline{\underline{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}}$$

2. $\left(a^5-32\right)=?$

$$\left(\underbrace{a^5}_{a^5}-\underbrace{2^5}_{b^5}\right)=\left(\underbrace{a}_{a}-\underbrace{2}_{b}\right)\left(\underbrace{a^4}_{a^4}+\underbrace{2a^3}_{a^3b}+\underbrace{4a^2}_{a^2b^2}+\underbrace{8a}_{ab^3}+\underbrace{16}_{b^4}\right)=\underline{\underline{(a-2)\left(a^4+2a^3+4a^2+8a+16\right)}}$$

3. $\left(8x^3+27y^3\right)=?$

$$\left(\underbrace{8x^3}_{a^3}+\underbrace{27y^3}_{b^3}\right)=\left(\underbrace{2x}_{a}+\underbrace{3y}_{b}\right)\left(\underbrace{4x^2}_{a^2}-\underbrace{6xy}_{ab}+\underbrace{9y^2}_{b^2}\right)=\underline{\underline{(2x+3y)\left(4x^2-6xy+9y^2\right)}}$$

4.9 Faktorzerlegung, Übersicht über die verschiedenen Vorgehensweisen

1. Ausklammern eines gemeinsamen Faktors aus allen Gliedern.	$\underbrace{15ab - 6ac + 3ad}_{\text{Summe}} = \underbrace{3a(5b - 2c + d)}_{\text{Produkt}}$
2. Ausklammern eines gemeinsamen Faktors aus **Gruppen von zwei oder mehreren Gliedern** (mehrmaliges Ausklammern).	$\underbrace{21ax - 6x}_{3x(7a-2)} \underbrace{-35a + 10}_{-5(7a-2)} = 3x(7a-2) - 5(7a-2) = (7a-2)(3x-5)$
3. Differenz zweier Quadrate (Binom). Typ: $a^2 - b^2$	$\underbrace{a^2}_{\text{Quadrat}} - \underbrace{b^2}_{\text{Quadrat}} = (a-b)(a+b)$
4. Rückbildung zum Quadrat eines Binoms. Typen: $a^2 + 2ab + b^2$ bzw. $a^2 - 2ab + b^2$	$\underbrace{4x^2}_{\substack{\text{Quadrat} \\ (\text{Basis } 2x)}} - \underbrace{28x}_{\substack{\text{doppeltes Produkt} \\ \text{der beiden Basen} \\ 2\cdot(2x\cdot 7)}} + \underbrace{49}_{\substack{\text{Quadrat} \\ (\text{Basis } 7)}} = (2x-7)^2$
5. Rückbildung in zwei ungleiche Binome, wenn der Faktor vor dem Quadrat 1 ist.	$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Quadrat} \\ \text{mit Faktor 1}}}{1x^2} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Summe} \\ (3)+(4)}}{7x} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Produkt} \\ (3)\cdot(4)}}{12} = (x+3)(x+4)$
6. Rückbildung in zwei ungleiche Binome, wenn der Faktor vor dem Quadrat ≠ 1 ist.	$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Quadrat} \\ \text{mit Faktor} \neq 1}}{10x^2} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Summe} \\ 5x\cdot 3+2x\cdot 2}}{19x} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Produkt} \\ 3\cdot 2}}{6} = (2x+3)(5x+2)$
7. Rückbildung von Summen und Differenzen **gleichhoher ungerader** Potenzen.	$(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $(a^5 - b^5) = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ $(a^7 - b^7) = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$ usw. $(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $(a^5 + b^5) = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ $(a^7 + b^7) = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$ usw.

4.10 Faktorzerlegung mit dem TI

Beispiel 1 $10x^2 + 19xy + 6y^2 = ?$

Eingabe: $\text{Faktor}(10x \wedge 2 + 19x * y + 6y \wedge 2)$

Ergebnis: $\underline{\underline{(2x+3y)(5x+2y)}}$

Hinweis: Die Funktion Faktor() ist über [F2] erreichbar.
Die Buchstaben x, y und z werden mit den Tasten [X], [Y] und [Z] eingegeben. Die Taste [alpha] ist bei den Buchstaben x, y, z und t nicht notwendig!
Das Multiplikationszeichen [×] zwischen x und y ist notwendig.
Tipp: Anzeige kontrollieren, Sie merken anhand der falschen Schreibweise, dass der Rechner xy als eine Variable anschaut!
Die Berechnung wird mit der Taste [ENTER] ausgeführt.

Beispiel 2 $x^3 + y^3 = ?$

Eingabe: $\text{Faktor}(x \wedge 3 + y \wedge 3)$

Ergebnis: $\underline{\underline{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}}$

Hinweis: Die Funktion Faktor() ist über [F2] erreichbar.
Die Buchstaben x, y und z werden mit den Tasten [X], [Y] und [Z] eingegeben. Die Taste [alpha] ist bei den Buchstaben x, y, z und t nicht notwendig!
Die Berechnung wird mit der Taste [ENTER] ausgeführt.

Beispiel 3 $u^3 + u^2v^2 - vu^2 - v^3u = ?$

Eingabe: $\text{Faktor}(u \wedge 3 + u \wedge 2v \wedge 2 - v * u \wedge 2 - v \wedge 3u = ?)$

Ergebnis: $\underline{\underline{u(u-v)(u+v^2)}}$

Hinweis: Die Funktion Faktor() ist über [F2] erreichbar.
Das Multiplikationszeichen [×] zwischen v und u^2 ist notwendig.
Tipp: Anzeige kontrollieren, Sie merken anhand der falschen Schreibweise, dass der Rechner vu als eine Variable anschaut!
Die Berechnung wird mit der Taste [ENTER] ausgeführt.

4.11 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
29 (alle)	18	Kontrolle mit TI üben
30 (d bis h)	18	Kontrolle mit TI üben
31 (b, d bis i)	18	Kontrolle mit TI üben
32 (alle)	19	Kontrolle mit TI üben
33 (b, d, f bis l)	19	Kontrolle mit TI üben
34 (a, c, e, g, h und i)	19	Kontrolle mit TI üben
35 (a, c, e, g, i und k)	19	Kontrolle mit TI üben
36 (c bis f)	19	Kontrolle mit TI üben
37 (alle)	20	Kontrolle mit TI üben
38 (alle) → GSBM (a und b)	20	Kontrolle mit TI üben
39 (alle) → GSBM (a und b)	20	Kontrolle mit TI üben

4.12 Übungen (zum Teil alte BM-Prüfungen)

Zerlegen Sie in Faktoren und vereinfachen Sie falls möglich:

1. $\dfrac{2a^2-14a+24}{3a^2-27a+60}=?$

$$\frac{2(a^2-7a+12)}{3(a^2-9a+20)}=\frac{2(a-3)\cancel{(a-4)}}{3\cancel{(a-4)}(a-5)}=\underline{\underline{\frac{2(a-3)}{3(a-5)}}}$$

2. $16r^2-8r+1=?$

$$\underline{\underline{(4r-1)^2}}$$

3. $u^3+u^2v^2-vu^2-v^3u=?$

$$u\left(u^2+uv^2-uv-v^3\right)=u\left[u\left(u+v^2\right)-v\left(u+v^2\right)\right]=\underline{\underline{u\left(u+v^2\right)(u-v)}}$$

4. $3x^4-18x^2-81=?$

$$3\left(x^4-6x^2-27\right)=3\left(x^2+3\right)\underbrace{\left(x^2-9\right)}_{\text{Binom}}=\underline{\underline{3\left(x^2+3\right)(x-3)(x+3)}}$$

5. $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-4x^2-x+4}=?$

$$\frac{x^2(x-2)-(x-2)}{x^2(x-4)-(x-4)}=\frac{(x-2)\cancel{\left(x^2-1\right)}}{(x-4)\cancel{\left(x^2-1\right)}}=\underline{\underline{\frac{x-2}{x-4}}}$$

6. $a^2+(x+y)a+xy=?$

$$\underbrace{\underline{\underline{(a+x)(a+y)}}}_{\text{direkt}}\quad \text{oder}\quad a^2+ax+ay+xy=a(a+x)+y(a+x)=\underline{\underline{(a+x)(a+y)}}$$

7. $r^2 + rs + s^2 + r + sr + s = ?$

$$\overbrace{r^2 \underbrace{+rs+rs}_{\text{doppeltes Produkt}} + s^2}^{\text{Binom}} + r + s = (r+s)^2 + (r+s) = (r+s)\left[(r+s)+1\right] = \underline{\underline{(r+s)(r+s+1)}}$$

8. $(3a^2 - 2a + 3)^2 - (a^2 - 6a + 1)^2 = ?$

$$\underbrace{(3a^2 - 2a + 3)^2}_{\triangle^2} - \underbrace{(a^2 - 6a + 1)^2}_{\square^2} =$$

$$\left[(3a^2 - 2a + 3) - (a^2 - 6a + 1)\right]\left[(3a^2 - 2a + 3) + (a^2 - 6a + 1)\right] =$$

$$(3a^2 - 2a + 3 - a^2 + 6a - 1)(3a^2 - 2a + 3 + a^2 - 6a + 1) =$$

$$(2a^2 + 4a + 2)(4a^2 - 8a + 4) = 2\underbrace{(a^2 + 2a + 1)}_{(a+1)^2} \cdot 4\underbrace{(a^2 - 2a + 1)}_{(a-1)^2} = \underline{\underline{8(a+1)^2(a-1)^2}}$$

9. $\dfrac{(v^2 - u^2)\left[(u-v)^2 - (u+v)^2\right]}{u^2v - uv^2} = ?$

$$\frac{(v-u)(v+u)\left[\underbrace{(u-v)^2}_{\bigcirc^2} - \underbrace{(u+v)^2}_{\square^2}\right]}{uv(u-v)} = \frac{(v-u)(v+u)\left[(u-v)-(u+v)\right]\left[(u-v)+(u+v)\right]}{uv(u-v)} =$$

$$\frac{(v-u)(v+u)(u-v-u-v)(u-v+u+v)}{uv(u-v)} = \frac{(v-u)(v+u)(-2v)(2u)(-1)}{uv(u-v)(-1)} =$$

$$\frac{\cancel{(v-u)}(v+u)(2\cancel{v})(2\cancel{u})}{\cancel{u}\cancel{v}\cancel{(v-u)}} = \underline{\underline{4(u+v)}}$$

10. $\dfrac{x^2 + y^2 - 2xy - w^2}{x^2 - y^2 + w^2 + 2wx} = ?$

$$\frac{\overbrace{x^2 - 2xy + y^2}^{\text{Binom}} - w^2}{\underbrace{x^2 + 2wx + w^2}_{\text{Binom}} - y^2} = \frac{\overbrace{(x-y)^2}^{\bigcirc^2} - \overbrace{w^2}^{\square^2}}{\underbrace{(x+w)^2}_{\bigcirc^2} - \underbrace{y^2}_{\square^2}} = \frac{(x-y-w)\cancel{(x-y+w)}}{\cancel{(x+w-y)}(x+w+y)} = \underline{\underline{\frac{x-y-w}{x+y+w}}}$$

11. $\frac{(a-b+c)^2-(a+b+c)^2}{a+c}=?$ (Rapperswil 1987)

$$\frac{\overbrace{(a-b+c)^2}^{\bigcirc^2}-\overbrace{(a+b+c)^2}^{\square^2}}{a+c}=$$

$$\frac{\left[(a-b+c)-(a+b+c)\right]\left[(a-b+c)+(a+b+c)\right]}{a+c}=$$

$$\frac{(a-b+c-a-b-c)(a-b+c+a+b+c)}{a+c}=\frac{(-2b)(2a+2c)}{a+c}=\frac{(-2b)2\cancel{(a+c)}}{\cancel{a+c}}=\underline{\underline{-4b}}$$

12. $\frac{(x+y)\left[(x^2+y^2)(x-y)-(x-y)\right]}{(x-y)\left[(x+y)-(x^2+y^2)(x+y)\right]}=?$ (Biel 1987)

$$\frac{(x+y)\left[(x^2+y^2)(x-y)-(x-y)\right]}{(x-y)\left[(x+y)-(x^2+y^2)(x+y)\right]}=$$

$$\frac{(x+y)(x-y)\left[(x^2+y^2)-1\right]}{(x-y)(x+y)\left[1-(x^2+y^2)\right]}=$$

$$\frac{(x^2+y^2-1)(-1)}{(1-x^2-y^2)(-1)}=\frac{\cancel{(x^2+y^2-1)}\,(-1)}{\cancel{(-1+x^2+y^2)}}=\underline{\underline{-1}}$$

13. $\frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{a^2-b^2}=?$ (Biel 1987)

$$\frac{a^2(a-b)+b^2(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{\cancel{(a-b)}\,(a^2+b^2)}{\cancel{(a-b)}\,(a+b)}=\underline{\underline{\frac{a^2+b^2}{a+b}}}$$

14. $$\frac{\left(a^3-a^2b+ab^2-b^3\right)\left(a^4+a^3b-ab^3-b^4\right)}{a^3+b^3-a^2b-ab^2}=?$$ (Biel 1987)

$$\frac{\left[a^2(a-b)+b^2(a-b)\right]\left[a^3(a+b)-b^3(a+b)\right]}{a^3-a^2b+b^3-ab^2}=$$

$$\frac{\left[(a-b)\left(a^2+b^2\right)\right]\left[(a+b)\left(a^3-b^3\right)\right]}{a^2(a-b)-b^2(a-b)}=\frac{(a-b)\left(a^2+b^2\right)(a+b)\overbrace{\left(a^3-b^3\right)}^{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}}{(a-b)\underbrace{\left(a^2-b^2\right)}_{\text{Binom}}}=$$

$$\frac{\cancel{(a-b)}\left(a^2+b^2\right)\cancel{(a+b)}\cancel{(a-b)}\left(a^2+ab+b^2\right)}{\cancel{(a-b)}\cancel{(a-b)}\cancel{(a+b)}}=\underline{\underline{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+ab+b^2\right)}}$$

15. $$\frac{\left(18m^3n^2-6m^3n+9m^2n^2-3m^2n\right)\left(m^2n+2mn^2+n^3\right)}{\left(m^2-n^2\right)\left(12m^2n^2+6mn^2\right)}=?$$ (Frauenfeld 1996)

$$\frac{3m^2n(6mn-2m+3n-1)n\left(m^2+2mn+n^2\right)}{(m-n)(m+n)6mn^2(2m+1)}=$$

$$\frac{3m^2n\left[2m(3n-1)+(3n-1)\right]n(m+n)^2}{(m-n)(m+n)6mn^2(2m+1)}=$$

$$\frac{\cancel{3}m^{\cancel{2}}\cancel{n}(3n-1)\cancel{(2m+1)}\cancel{n}(m+n)^{\cancel{2}}}{(m-n)\cancel{(m+n)}\underset{2}{\cancel{6}}\cancel{m}\cancel{n^2}\cancel{(2m+1)}}=\underline{\underline{\frac{m(3n-1)(m+n)}{2(m-n)}}}$$